Mathematik 2 für Bauingenieurwesen

Errata zur Ausgabe des Skriptums vom 21. Februar 2019

10. Oktober 2019

Vorbemerkung:

Trotz bzw. teilweise wegen umfangreicher Revisionen und Verbesserungen des Skriptums „Mathematik 2 für Bauingenieuwesen“ vor dem Sommersemester 2019 ist auch die bislang jüngste Version (Ausgabe 21. Februar 2019) leider noch weit entfernt von einem Idealzustand. Einige sinnstörende Fehler, die mir im Laufe des Semesters aufgefallen sind und die den Prüfungsstoff betreffen, sollen durch die vorliegende Sammlung von Errata korrigiert werden. Wer sich auf die Prüfung vorbereitet möge bitte die hier angegebenen Korrekturen übertragen.

Bevor ich die Vorlesung das nächste Mal halten werde (voraussichtlich im Sommersemester 2021) möchte ich noch zahlreiche weitere Verbesserungen vornehmen. Um jedoch nicht mehr Verwirrung als Aufklärung zu stiften, nehme ich die meisten dieser beabsichtigten Verbesserungen in der vorliegenden Errata-Sammlung jedoch noch nicht auf.

Reinhard Winkler, im Mai 2019

Zur Symbolik:
S ... Seite
Zn ... n-te Zeile von oben bzw. nach der Überschrift des angegebenen (Unter-) Abschnitts
Z-n ... n-te Zeile von unten

- S12, 1.1.2, Z3, Inhalt in Kurzfassung: $U = \{\mathbf{o}\}$ statt $U = \mathbf{o}$
- S15, Z-17: ... Koeffizient $-1 \neq 0$ zu denken ist.
- S33, Z7: $x_2 = f(2)$
- S33, Z-3: Statt $f : \mathbf{o}_m \mapsto \mathbf{o}_n$ sollte es heißen: $f : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{o}_n$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.
- S39, den Absatz in der unteren Hälfte korrigieren zu:

  Bezieht man sich auf die Standardvektorräume $V_1 = \mathbb{R}^m$ und $V_2 = \mathbb{R}^n$ und sind keine anderen Basen gegeben, interpretieren wir eine Matrix stets in Bezug auf die kanonischen Basen von V_1 und V_2. Zur Unterscheidung schreiben wir $\mathbf{e}_j^{(m)}$, $j = 1, \ldots, m$, bzw. $\mathbf{e}_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann entspricht die Matrix $A = (a_{i,j})$ jener linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, die den kanonischen Basisvektor $\mathbf{e}_j^{(m)} \in \mathbb{R}^m$ auf den j-ten Spaltenvektor von A abbildet, also

  $$f = f_A : \mathbf{e}_j^{(m)} \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \mathbf{e}_i^{(n)} \in \mathbb{R}^n.$$

  Die Spaltenvektoren von A sind also die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren.

  Der Rest auf Seite 39 kann gestrichen werden, weil er auf S40 wiederholt wird.
- S42, Z14: $C = (c_{i,j})$
- S53, etwa Mitte: Indizes in der ersten Komponente des Vektors rechts korrigieren zu:

  $$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$
- S54, nach Z9, Indizes in der zweiten Zeile der Matrix Q korrigieren zu:

  $$Q = \begin{Vmatrix} \beta_{1,1} \beta_{1,2} \cdots \beta_{1,d} \\ \beta_{2,1} \beta_{2,2} \cdots \beta_{2,d} \\ \vdots \vdots \vdots \\ \beta_{d,1} \beta_{d,2} \cdots \beta_{d,d} \end{Vmatrix}$$

- S54, 6 Zeilen weiter, Formel ergänzen und korrigieren zu:

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \beta\left(\sum_{i=1}^{d} x_i \mathbf{b}_i, \sum_{j=1}^{d} y_j \mathbf{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} x_i y_j \beta(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \sum_{i}^{d}\sum_{j}^{d} x_i \beta_{i,j} y_j = \mathbf{x}_Z Q \mathbf{y}_S$$

- S54, 2 Zeilen weiter: $\mathbf{y}_S$ (statt $\mathbf{y}_Z$, Spalten- statt Zeilenvektor)
- S55, Z-2: Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ (statt $\mathbf{a}_i$)
- S65, Z-6: $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1$
- S67, Z2: $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ (Index)
- S69 oben, Beweis korrigieren zu:

  Der Basiswechsel zwischen B_1 und B_2 wird nach 1.3.5 durch eine quadratische Matrix S mit Inverser S^{-1} beschrieben, so dass gilt $B_2 = SB_1S^{-1}$. Aus Satz 1.4.5.1 folgt damit

$$\det(A_2) = \det(SA_1S^{-1}) = \det(S)\det(A_1)\det(S)^{-1} = \det(A_1).$$

- S76, Z-7: Index a_{nn} (statt a_{an}).
- S77, Z3: $A^{-1} = A'$
- S79, Formel in der Mitte:

$$\det A = (-1)^k \det B = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} b_{ii} = (-1)^k b_{11} b_{22} \ldots b_{nn},$$

- S91, Definition 1.6.1.1, ersten Satz umformulieren:
  Sei V ein Vektorraum, $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{x} \in V$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (sehr oft auch: $\lambda \in \mathbb{C}$) mit $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Dann heißt λ ein **Eigenwert** von f, und $\mathbf{x}$ heißt **Eigenvektor** von f zum Eigenwert λ.
- S103 Mitte: Der vorletzte Satz der Einleitung („Weil in der Vorlesung im Sommersemester 2017 dafür nur sehr wenig Zeit war, gilt Abschnitt 2.3 für sich aber nicht als Prüfungsstoff.“) ist im Sommersemester 2019 nicht mehr aktuell. Streichen! (Analog S165, S195 und S252, siehe weiter unten.)
- S116, Z5: Index im Index streichen, korrekt: $\operatorname{grad} f : D \to \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} f$
- S119, 2.2.3, Beginn des zweiten Absatz: Die Bestimmung der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $\mathbf{x}_0 \in D \ldots$
- S121 unten:

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \approx \frac{1}{t} f'_{\mathbf{x}_0}(t\mathbf{e}) = \frac{1}{t}\operatorname{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)(t\mathbf{e}) = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)\mathbf{e},$$

- S122, Z5:
$$|\operatorname{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)\cdot \mathbf{e}| \leq \|\operatorname{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)\| \cdot \|\mathbf{e}\| = \|\operatorname{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)\|,$$

- S122, Proposition 2.2.3.3, umformulieren zu:

  …der größten Richtungsableitung. Ihr Betrag stimmt mit der Norm $\|\operatorname{grad}_{\mathbf{x}_0} f\|$ des Gradienten überein.

- S127 oben, Formel in Definition 2.2.4.4:
$$f^{(0)} := f : D \to \mathbb{R}^m, \quad f^{(k+1)} := \left(f^{(k)}\right)' : D \to \mathbb{R}^{n^{k+1}m}.$$

- S127 unten, die letzten Zeilen: Mehrmals m durch n ersetzen und Gradienten umschreiben:

  Im Fall $m = 1$ (also f reellwertig) ist $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}^{n^k}$. Sehr gut kennen wir bereits die Situation $k = 1$: Die erste Ableitung $f^{(1)} = f' : D \to \mathbb{R}^n$ wird durch den Gradienten $\mathbf{x} \mapsto \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(f)$ dargestellt. Für $k = 2$ ist $f^{(k)} = f^{(2)}$ gegeben durch sämtliche $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, die sich in natürlicher Weise in einer $n \times n$-Matrix darstellen lassen, der sogenannten **Hesse-Matrix** von f. …

- S131, Z1: **Flächen ($m = 3, n = 2$):**

- S141, letzte Zeile: $f_i : D \to \mathbb{R}$

- S153, Z7-18: Die Gleichung $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 = (x+y)^2 - (x-y)^2$ ist falsch, das Beispiel wird in der nächsten Version durch ein korrektes ersetzt werden.

- S165, letzter Absatz vor 3.1 etwa in der Mitte: Analog zu S103, S195 und S252 (siehe dort) ist ein Satz aus dem Jahr 2017 zu streichen, nämlich:

  „Sie wurden in den Übungen kurz berührt, konnten in der Vorlesung aber nur so oberflächlich behandelt werden, dass es sich um keinen Prüfungsstoff handelt."

  Im Sommersemester 2019 wurde der sehr ausführliche Abschnitt 3.3 über gekoppelte lineare DGLen zwar stark gekürzt, er fällt als Prüfungsstoff aber nicht gänzlich aus.

- S172 unten: Die letzten beiden Zeilen des Systems verschmelzen, also:
$$\begin{aligned} y_0'(t) &= y_1(t) \\ y_1'(t) &= y_2(t) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(t) &= F(y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t), t) \end{aligned}$$

- S175, Z10: Die Funktion y_{n+1} wird an der Stelle t definiert, also lautet die Rekursion korrekt: $y_{n+1}(t) := 1 + \int_0^t y_n(x)\,dx$

- S181, 3.1.7, zweiter Absatz, Z4/5: Weil es sich um eine DGL handelt, setzt sich Δ ...
- S182, Z7: ... Lösung und L_0 der Lösungsraum ...
- S182, Z9: $L_0 = \{y_h : \ \Delta(y_h) = 0\}$ streichen
- S182, Z13: $y^{(n-1)} = y_{n-1}$
- S186, fünf Zeilen vor Proposition 3.2.2.1:

  Wir dürfen annehmen, dass die λ_i der Größe nach geordnet sind:

  $$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1}$$

  Wir dividieren die Gleichung durch $e^{\lambda_{n+1}}$ und erhalten

  $$\sum_{i=1}^{n+1} r_i e^{(\lambda_i - \lambda_{n+1})t} = 0.$$

  Wegen $\lambda_i - \lambda_n < 0$ für $i = 1, \ldots, n$ konvergieren alle Summanden außer dem letzten für $t \to \infty$ gegen 0, woraus doch $r_{n+1} = 0$ folgt, Widerspruch.

- S187, zweite Formel in der Mitte:

  $$\frac{f(t) - g(t)}{2i} = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

- S193, Z11: $I'(t) = a(t)I(t)$
- S195, 3.3: Analog zu S103, S165 und S252 den ersten Satz („Der vorliegende Abschnitt über gekoppelte lineare DGLen musste im Sommersemester 2017 in der Vorlesung im Wesentlichen übersprungen werden und zählt daher nicht zum Prüfungsstoff.“) streichen.
- S231, Z2: $y_2 := y_1 + (t_2 - t_1) f(t_1, y_1)$ für $y(t_2)$
- S237, Z9: Im letzten Integral ist die Integrationsreihenfolge zu vertauschen:

  $$\int_{[a,b]\times[c,d]} f \, d\lambda_2 = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dx \, dy$$

- S241, Formel etwa in der Mitte: vorletzten Index korrigieren zu

  $$\lambda_3(T(Q)) \approx \sum_i |\det(T'_{\mathbf{v}_i})| \lambda_3(Q_i).$$

- S252, unten: Analog zu S103, S165 und S195 die letzten beiden Sätze streichen, weil sie aus dem Jahr 2017 stammen und 2019 nicht mehr gelten. („Kurvenintegrale erster Art wurden in der Vorlesung nicht durchgenommen und sind deshalb nicht Prüfungsstoff. Sie werden hier trotzdem aufgenommen und zum Studium empfohlen, weil die Analogie zu den später zu behandelnden Oberflächenintegralen bei deren Verständnis helfen kann.“)
- S253: Die Grafik ist im Zusammenhang mit Kurvenintegralen erster Art verfrüht und kann an dieser Stelle gestrichen werden.
- S257 unten: In Satz 4.2.3.1 soll $\mathbf{v}$ nicht nur stetig, sondern stetig differenzierbar sein.
- S283, Z3 und Z5: Die Notationen $I(D)$ und $|D|$ stehen hier wie auch an einigen anderen Stellen für das Lebesguesche Maß der jeweiligen Dimension. Im Zusammenhang mit der Leibnizschen Sektorformel ist also $|D| = I(D) = \lambda_2(D)$.
- S292, Z6: ... die Menge Ω aller sogenannten Elementarereignisse. ...
- S302, Z-5: Der Integrationsbereich ist bei beiden Integralen A:

$$\mathbb{W}_\rho(A) := \int_A \rho(x)\,dx = \int_A \rho\,d\lambda$$

- S303, Z4: ... die Dichtefunktion $\rho := \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$ ...
- S303, Z-12: ... differenzierbar ist: $F'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus N$, auf ...
- S311, Z5: ... als Zufallsgrößen X'_n auf ...
- S311, Z8: ... Ist A eine messbare Menge ...
- S312, Formel etwa in der Mitte (einen Index korrigieren):

$$\mathbb{W}(A) = \sum_n \mathbb{W}(A \cap B_n) = \sum_n \mathbb{W}(B_n)\mathbb{W}(A|B_n).$$

- S315, Z3-6: ... die Ungleichung

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| = |\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))\right)| \leq$$
$$\leq \|X - \mathbb{E}(X)\| \cdot \|Y - \mathbb{E}(Y)\| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X) \cdot \mathbb{V}(Y)}$$

  liefert. Folglich ist (für $\mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y) \neq 0$) der sogenannte **Korrelationskoeffizient**

$$\mathrm{Kor}(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X) \cdot \mathbb{V}(Y)}}$$

  eine reelle Zahl zwischen -1 und 1. ...

- S317, Z-5: $n \leq r + s$ (statt $n \leq r$ und $n \leq s$)
- S320, Z-8: In der Gleichung ist der erste der vier Terme zu streichen. Es verbleibt also:
$$\mathbb{W}(X \geq t + s | X \geq s) = \mathbb{W}(X \geq t) = 1 - F(t)$$
- S323, Z3:
$$|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon \cdot Y.$$
- S323, Z7-8: Wir gehen jetzt von einer Folge unkorrelierter und identisch verteilter Zufallsgrößen X_n aus, die der Einfachheit halber überdies als beschränkt angenommen seien.
- S337, letzten Satz vor 5.3.4 umformulieren: Unter der Annahme, dass der Parameter diesen oder jenen Wert hat (bzw. Element einer bestimmten Menge von Parametern ist), liegt bzw. läge eine bestimmte (empirisch, d.h. aus den Daten bestimmbare) statistische Größe mit Wahrscheinlichkeit $\geq \alpha$ in jenem anzugebenden Bereich.
- S339, Maximum-Likelihood-Schätzer, Absatz korrigieren zu:

  Sind die in Frage kommenden Verteilungen $\mathbb{W}_\theta$ diskret, so heißt T_n **Maximum Likelihood-Schätzer**, wenn für jeden Datensatz $(X_1, \ldots, X_n)$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{W}_\theta(T_n(X_1, \ldots, X_n) = r)$ unter allen möglichen Werten $r \in \Theta$ für den Wert $r = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ maximal ist. (Ähnlich kann man Maximum-Likelihood-Schätzer für stetige Verteilungen mit Dichtefunktionen definieren.)
- S343, Z14/15: Ist $\sigma > 0$ bekannt, kann man für ein angestrebtes Irrtumsniveau von maximal α beispielsweise $t^- := m - c\sigma$ und $t^+ := m + c\sigma$ mit einem an α angepassten $c > 0$ nehmen.
- S346, Z5-6: Der Satz „Dabei ist $0 \leq K_\alpha \leq n$ möglichst klein zu wählen ist, um die Güte des Tests zu optimieren.“ ist missglückt. Am einfachsten streichen.
- S346, Z6-14: Korrigieren zu:

  Gilt bei gegebener Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ die Ungleichung $S_n(X_1, \ldots, X_n) < K_\alpha$, so kann H_0 nicht verworfen werden. Beim zweiseitigen Test geht man analog von der Bedingung
$$\mathbb{W}_{p_0}(\{|S_n - np_0| \geq K_\alpha\}) = 1 - \sum_{i:\ np_0 - K_\alpha < i < np_0 + K_\alpha} \binom{n}{i} p_0^i (1 - p_0)^{n-i}$$
  aus. Hier liegen Annahme- und Verwerfungsbereich symmetrisch um den Erwartungswert np_0, was aber keineswegs zwingend ist, sondern hier nur der leichteren Fasslichkeit halber so gewählt wurde. Gilt bei gegebener Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ die Ungleichung $|S_n(X_1, \ldots, X_n) - np_0| < K_\alpha$, so kann H_0 nicht verworfen werden.