Internat. Math. Nachrichten
Nr. 221 (2012), 21–38

Endre Szemerédi: Ein mathematisches Universum in kombinatorischem Gewande

Mathias Beiglböck und Reinhard Winkler
Universität Wien — TU Wien

1 Einleitung

In der Begründung der Verleihung des diesjährigen Abelpreises an den ungarischen Mathematiker Endre Szemerédi durch die Norwegische Akademie der Wissenschaften heißt es an zentraler Stelle, der Preis werde

> *for his fundamental contributions to discrete mathematics and theoretical computer science, and in recognition of the profound and lasting impact of these contributions on additive number theory and ergodic theory*

verliehen. Entsprechend der Bedeutung des Abelpreises wie auch der durch ihn ausgezeichneten Leistungen Szemerédis sind die Würdigungen zahlreich (eine jüngst erschienene ist etwa [RS12], siehe aber auch [Gow12]). Trotz der Reichhaltigkeit von Szemerédis Lebenswerk – der erste Teil des obigen Zitats der Norwegischen Akademie deutet die Schwerpunkte seiner Arbeit an – ist es doch der nach ihm benannte *Satz von Szemerédi* aus dem Jahr 1975 [Sze75], der die meiste Aufmerksamkeit hervorruft. Der Grund dafür lässt sich aus dem zweiten Teil des Zitats erschließen.

Denn nur wenige mathematische Einzelleistungen sind in vergleichbarem Ausmaß Angelpunkt explosionsartiger Entwicklungen in der Wissenschaft, wie sich dies von Szemerédis berühmtestem Resultat behaupten lässt. Entsprechend liegen auch die Schwerpunkte des Artikels von Mihyun Kang im vorliegenden Heft der *IMN* [Kan12] auf den facettenreichen Entwicklungen der Mathematik, die vom Satz von Szemerédi ausgingen. Das gilt sowohl für das einleitende Interview der

ISSN 0020-7926

Autorin mit Szemerédi, als auch für den zweiten Teil, in dem sie besonders auf das sogenannte Regularitätslemma eingeht. Dieses tauchte in einer speziellen Version erstmals im Originalbeweis des Satzes von Szemerédi in [Sze75] auf und erhielt später in [Sze78] seine bleibende Gestalt.

Auch im vorliegenden Aufsatz streben wir keine repräsentative Darstellung von Szemerédis Lebenswerk an. Stattdessen wollen wir gewisse Aspekte näher ins Auge fassen, die uns im Zusammenhang mit der in [Kan12] dargestellten Entwicklung des Satzes von Szemerédi besonders faszinieren.

Unser Programm hat folgende Gestalt. Im Kapitel 2 geht es zunächst um die Aussage des Satzes von Szemerédi. Dabei interessieren wir uns für Aspekte, die unter anderem im Kontext von Ramsey-Theorie und Satz von van der Waerden sichtbar werden. Kapitel 3 setzt sich mit der außergewöhnlichen Schwierigkeit auseinander, einen kurzen und trotzdem angemessenen Überblick auch nur über die wichtigsten Ideen im kombinatorisch extrem komplizierten Originalbeweis von Szemerédi zu geben. Anstatt diese Schwierigkeit in Angriff zu nehmen, bevorzugen wir hier einen anderen, leichteren Weg. Und zwar versuchen wir, einen Einblick in den Zugang von Furstenberg[1] zu geben, der kurz nach Szemerédis Durchbruch in [Sze75] eine neuartige Sichtweise erschloss (siehe [Fur77, Fur81]). Besonders wichtig sind bei Furstenberg topologische Strukturen, Rekurrenzfragen dynamischer Systeme und die sich daraus ergebenden ergodentheoretischen Sichtweisen. Entsprechend versuchen wir in Kapitel 4 plausibel zu machen, wie Topologie in der Kombinatorik nützlich werden kann. Kapitel 5 mit Furstenbergs Korrespondenzprinzip und seinem multiplen Rekurrenzsatz zeigt, wie sich die Situation im Satz von Szemerédi in die Sprache der Dynamik übersetzen lässt. Das umfangreiche Kapitel 6 zielt auf einen Struktursatz von Furstenberg ab. Dieser zeigt, dass sich maßerhaltende Systeme aus solchen aufbauen lassen, die man gut unter Kontrolle hat. Und zwar treten als Bausteine nur zwei Typen auf: sogenannte kompakte Systeme einerseits und schwach mischende Systeme andererseits. Für beide lassen sich die für den Satz von Szemerédi erforderlichen Eigenschaften relativ leicht nachweisen, wenn auch aus ganz unterschiedlichen, geradezu diametral entgegengesetzten Gründen: Bei kompakten Systemen nutzt man aus, dass sie sehr starr sind und gewissermaßen hochstrukturiert sind; schwach mischende Systeme hingegen verhalten sich fast wie unabhängige Zufallsfolgen und ermöglichen deshalb den Einsatz stochastischer Sichtweisen. Wir versuchen eine Idee zu geben, wie Furstenberg all dies zu einem Beweis des Satzes von Szemerédi zusammensetzte. Im abschließenden Kapitel 7 gehen wir noch auf neuere Entwicklungen ein, die teilweise auf Szemerédi und Furstenberg aufbauen, und teilweise neue Wege beschreiten.

[1] In diesem Artikel, der die Verleihung des Abel-Preises an Szemerédi zum Anlass hat, sei auch erwähnt, dass Furstenberg im Jahr 2007 mit dem vergleichbar prominenten Wolf-Preis für Mathematik ausgezeichnet wurde.

2 Die schillernde Aussage des Satzes von Szemerédi

Der Satz von Szemerédi gehört zu den bedeutendsten Resultaten der Kombinatorik, bzw. etwas enger gefasst, der Ramseytheorie. Ein Motiv, das sich durch die Ramseytheorie zieht, besteht im Phänomen, dass, grob gesagt, gut organisierte Strukturen sich (so wie der Besen in Goethes „Zauberlehrling") nicht ohne weiteres zerschlagen lassen. Wir wollen dieses Phänomen hier das *Ramseyprinzip* nennen. Eine triviale Erscheinungsform des Ramseyprinzips: Zerteilt man eine unendliche Menge in zwei Teile, so ist nach dem Schubfachprinzip mindestens einer davon wieder unendlich (tatsächlich sogar gleich groß) wie die ursprüngliche Menge. Ihren Namen bezieht die Ramseytheorie aus folgendem klassischen Resultat.

Satz 1 (Satz von Ramsey, 1930)**.** *Färbt man alle zweielementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit zwei (oder auch r) Farben, so gibt es ein unendliches $T \subseteq \mathbb{N}$ derart, dass alle zweielementigen $\{t_1, t_2\} \subseteq T$ gleiche Farbe haben.*

Die Interpretation dieses Satzes im Sinne des Ramseyprinzips geht vom vollständigen Graphen mit der abzählbar unendlichen Knotenmenge $\mathbb{N}$ aus. Durch die Färbung wird die Menge der Kanten in zwei Teile zerlegt. Der Satz von Ramsey besagt, dass dennoch wenigstens einer der Teile die ursprüngliche Struktur (nämlich den vollständigen Graphen auf der wieder abzählbar unendlichen Menge T) enthält. Elementare Beweise des Satzes von Ramsey machen wieder ganz entscheidend vom Schubfachprinzip Gebrauch.

Im Gegensatz zur graphentheoretischen Struktur im Satz von Ramsey geht es bei Szemerédi vor allem um die additive Struktur der natürlichen Zahlen. Auf diesem Felde ist der wichtigste Vorläufer des Satzes von Szemerédi jener von van der Waerden.

Satz 2 (Satz von van der Waerden, vgl. [vdW27])**.** *Sei $A_1, \ldots, A_r$ eine Partition der natürlichen Zahlen. Dann enthält wenigstens eines der A_i arithmetische Folgen beliebiger (endlicher) Länge.*

Dieser Satz ist nach dem Geschmack der meisten Mathematiker: Eine einfache Aussage, die zu beweisen sich aber als überraschend schwierig erweist. Der Beweis von van der Waerden ist nur wenige Seiten lang, enthält aber eine sehr gewitzte Induktion. Das reizt natürlich dazu, die Möglichkeiten der Methode nach allen Richtungen bis an die Grenzen auszuloten und zu versuchen, damit noch schwierigere Probleme zu lösen.

Doch hält die Mathematik nicht nur diesen geradezu sportlich anmutenden Aspekt bereit. Es lohnt innezuhalten, und sich die Aussage des Satzes noch besser klar zu machen. Denn auch wenn man den Beweis Schritt für Schritt verstanden hat, gibt es vielleicht noch mehr am Satz zu verstehen. Wie gar nicht so selten in der

Mathematik ist es besonders beim Satz von van der Waerden keineswegs dasselbe, einerseits einen Beweis des Sachverhalts zu kennen oder andererseits ihn auch in seiner weitreichenden Bedeutung zu verstehen.

Um konkreter zu werden: Im Fall des Satzes von van der Waerden ist es dem Verständnis zuträglich, zu begreifen, welches „besondere Merkmal“ der Zelle A_i dafür verantwortlich ist, dass sie beliebig lange arithmetische Folgen enthält. Hier bieten sich unterschiedliche Vermutungen an. Dass selbst Mathematiker vom Kaliber eines Pál Erdős und Pál Turán manch falsche äußerten, zeigt, dass die Situation weit weniger kanonisch ist, als es im Nachhinein den Anschein haben mag.[2] Als zutreffend erwies sich aber jene Vermutung der beiden aus 1936, wonach die besondere Eigenschaft der Menge A_i darin besteht, dass sie einen „positiven Anteil“ aller natürlichen Zahlen enthält.

Für eine präzise Formulierung definieren wir die *obere Dichte* einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ durch

$$\bar{d}(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap \{1,\ldots,N\})}{N}.$$

Die Frage von Erdős und Turán ist nun: Gegeben $k \in \mathbb{N}$, enthält jede Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $\bar{d}(A) > 0$ eine arithmetische Folge der Länge k? Eine positive Antwort würde den Satz von van der Waerden als offensichtliches Korollar enthalten. Der erste Schritt in diese Richtung war Roths Beweis für $k = 3$ [Rot53]. Die Verbesserung auf $k = 4$ ließ immerhin einige Jahre auf sich warten. Der junge Mathematiker, dem sie gelang: Endre Szemerédi [Sze69]. Sein berühmter Satz einige Jahre später schließlich bestätigt die Vermutung von Erdős und Turán in voller Allgemeinheit:

Satz 3 (Szemerédi [Sze75])**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge mit $\bar{d}(A) > 0$. Dann enthält A beliebig lange arithmetische Folgen (endlicher Länge).*

Der Beweis gestaltet sich überaus kompliziert. Tatsächlich kennt man mittlerweile eine Reihe unterschiedlicher Beweise, die sich in der Wahl der verwendeten Methoden deutlich unterscheiden. Eine hervorstechende Gemeinsamkeit ist, dass sie alle höchst komplex sind, tiefe Einsichten in verschiedene Gebiete liefern bzw. voraussetzen und sich entsprechend erst nach intensivem Studium erschließen.

Bevor wir dieses Thema vertiefen, vergleichen wir mit dem Satz von van der Waerden. Vermutet wurde er zunächst von Baudet und schon kurz darauf von van der Waerden [vdW27] bewiesen. Der ursprüngliche Beweis benötigt nur wenige Seiten, und seitdem wurden weitere kurze Beweise entdeckt – gegen Ende von Kapitel 6 kommen wir nochmals kurz darauf zurück. Im Gegensatz dazu war die Vermutung von Erdős und Turán nahezu 40 Jahre offen.

[2] Eine besonders ambitionierte Vermutung aus [ET36] wird durch ein Gegenbeispiel von Behrend [Beh46] widerlegt: Für festes $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes N existiert eine Menge $A \subseteq \{1,\ldots,N\}$ mit $\#A \geq N^{1-\varepsilon}$ ohne arithmetische Folge der Länge drei.

Eine natürliche Frage an dieser Stelle ist daher: Inwiefern war die Sichtweise von Erdős und Turán gerechtfertigt, inwiefern liefert der Satz von Szemerédi den Schlüssel zum Verständnis des Satzes von van der Waerden?

Natürlich sprengt man mit solchen Fragen den Bereich objektiver Gültigkeit, wie sie mathematische Theoreme besitzen. Doch gerade angesichts widersprüchlicher Einschätzungen aufgrund unterschiedlicher Sichtweisen, wie sie von Experten je nach mathematischer Prägung vertreten werden, lernt man Interessantes. Es zeigt sich nämlich die Buntheit, zu der Mathematik im Bewusstsein derer, die sie betreiben, fähig ist.

Beim Satz von van der Waerden zeichnen sich wenigstens zwei Sichtweisen ab, für die jeweils gute Argumente vorliegen. Die Kürze der Beweise des ursprünglichen Satzes legt nahe, dass damit die richtige Sichtweise zur Geltung kommt. Hier soll aber auch zugunsten der konträren Ansicht argumentiert werden, dass nämlich die Beweise des stärkeren Satzes von Szemerédi trotz ihrer viel höheren Komplexität die zugrundeliegende Intuition klarer zum Ausdruck bringen. Für diese Sichtweise kann man auch ins Treffen führen, dass die beste qualitative Fassung des Satzes von van der Waerden eine solche ist, die aus einem Beweis des Satzes von Szemerédi folgt, welchen Gowers in [Gow01] gegeben hat. Weiters lassen sich mächtige Verallgemeinerungen des Satzes von van der Waerden nur gewinnen, wenn man den Satz von Szemerédi mitbeweist, indem man den Umweg über Mengen mit positiver Dichte geht (Bergelson, Leibman, Lesigne [BLL08]). Szemerédis Satz ist ein wesentlicher Schritt zum Beweis des Satzes von Green und Tao [GT08]: Es gibt beliebig lange arithmetische Folgen von Primzahlen. Schließlich kann man die Schönheit des Satzes in der inhärenten stochastischen Komponente sehen. Es stellt sich nämlich heraus, dass der Satz von Szemerédi in unglaublicher Weise starke deterministische Struktur mit Phänomenen vereint, die bei stochastischer Unabhängigkeit (also gewissermaßen bei *Zufall*) typisch sind.

Über die im Fall der verschiedenen Zugänge zu den Sätzen von van der Waerden und Szemerédi beobachtete Polarität zweier Sichtweisen lässt sich durchaus auch in sehr allgemeinem mathematischen Kontext nachdenken. Gewissermaßen verkörpern sich darin zwei verschiedene ästhetische Prinzipien, die zweifellos beide ihre Berechtigung haben. Auf der einen Seite empfinden wir elementare Beweise oft gerade deshalb als elegant, weil sie, quasi frei von Ballast, besonders schlank auf uns zukommen und ein oder mehrere Argumente ohne Beiwerk vor Augen treten lassen. Kombinatorische Schlussweisen sind tendenziell von dieser Art. Auf der anderen Seite – hier ist die epische Breite von Bourbaki das geradezu archetypische Beispiel – können wir an einer begrifflich reich ausdifferenzierten, abstrakten Darstellung von Mathematik einen weit bis zum Horizont reichenden Ausblick genießen, der uns die Tragweite und Wirkungsmacht mathematischer Konzepte zu fassen hilft.

3 Ausnahme-Kombinatorik

An den Würdigungen von Szemerédis Lebenswerk fällt fast durchwegs Folgendes auf: Der Satz 3 wird ins Zentrum gerückt, oft noch die entscheidende Rolle des Regularitätslemmas hervorgehoben; aber fast nichts wird über Szemerédis Originalbeweis verraten. Auch in unserem Text halten wir es nicht anders. Die Gründe werden deutlich, wenn man sich einige Zeilen vergegenwärtigt, die sich in einem der wenigen Texte finden, die sich doch der schwierigen Aufgabe stellen, auf wenigen Seiten etwas Greifbares über Szemerédis Methode zu sagen. Und zwar ist es kein Geringerer als Terence Tao, der u.a. Folgendes schreibt (siehe [Tao12]):

> Szemerédi's original proof of this theorem is a remarkably intricate piece of combinatorial reasoning. Most proofs of theorems in mathematics – even long and difficult ones – generally come with a reasonably compact 'high-level' overview, in which the proof is (conceptually, at least) broken down into simpler pieces. There may well be technical difficulties in formulating and then proving each of the component pieces, and then in fitting the pieces together, but usually the 'big picture' is reasonably clear. To give just one example, the overall strategy of Perelman's proof of the Poincaré conjecture can be briefly summarised as follows: to show that a simply connected three-dimensional manifold is homeomorphic to a sphere, place a Riemannian metric on it and perform Ricci flow, excising any singularities that arise by surgery, until the entire manifold becomes extinct. By reversing the flow and analysing the surgeries performed, obtain enough control on the topology of the original manifold to establish that it is a topological sphere.
>
> In contrast, the pieces of Szemerédi's proof are highly interlocking, particularly with regard to all the epsilon-type parameters involved; it takes quite a bit of notational setup and foundational lemmas before the key steps of the proof can even be stated, let alone proved. Szemerédi's original paper contains a logical diagram of the proof (reproduced in Gowers' recent talk) which already gives a fair indication of this interlocking structure. (Many years ago I tried to present the proof, but I was unable to find much of a simplification, and my exposition is probably not that much clearer than the original text.)

Diesen aussagekräftigen Bemerkungen von Tao wollen wir hier nicht viel hinzufügen. Auf einem viel bescheideneren Niveau erhellend könnte aber der Hinweis auf Kapitel 4 und auf den in Abschnitt 6.4 angedeuteten Beweis des Satzes von van der Waerden mithilfe der Stone-Čech-Kompaktifizierung sein.

Dort werden topologische Argumente bemüht, um kombinatorische oder zahlentheoretische Sachverhalte zu beweisen. In gewisser Weise lässt sich die umfangreiche Geschichte, die auf Szemerédis Durchbruch 1975 folgte und von der wir hier einige wenige Episoden zu beleuchten versuchen, in diesem Zusammenhang sehen: Durch Entfaltung eines eindrucksvollen konzeptuellen Apparats vor allem durch Furstenberg, aber auch durch seine Nachfolger, werden Szemerédis Ideen, deren kombinatorische Komplexität das Fassungsvermögen der meisten MathematikerInnen übersteigt, in intuitiv begreifbare Teile zerlegt, die dann – wenn auch erst nach eingehendem Studium und in vielen Etappen – einer viel breiteren mathematischen Gemeinschaft zugänglich gemacht werden können.

Es zeigt sich hier ein Potential abstrakter mathematischer Konzepte, das vielfach unterschätzt wird, weil gerade Abstraktion oft als etwas angesehen wird, das nur eingeweihten Spezialisten vorbehalten ist. Wir glauben aber, dass Abstraktion viel mit mathematischem Erkenntnisfortschritt auch auf breiter Front zu tun hat und insofern als ein Element der Popularisierung und sogar der Aufklärung wirken kann.[3]

4 Kombinatorik versus Topologie

Die Formulierung des Satzes von Szemerédi, die wir in Satz 3 gegeben haben, ist knapp und prägnant, allerdings mitunter insofern etwas irreführend, als sie verschleiert, dass der Satz auch eine finitäre Fassung besitzt:

Satz 4 (Satz von Szemerédi, finitäre Version)**.** *Seien eine natürliche Zahl k und eine reelle Zahl $\delta > 0$ gegeben. Dann existiert eine natürliche Zahl $S(k,\delta)$, sodass für jede natürliche Zahl $N > S(k,\delta)$ und jede Teilmenge A von $\{1,\ldots,N\}$, die mindestens δN Elemente enthält, eine arithmetische Folge $a, a+n, \ldots, a+(k-1)n$ der Länge k in A liegt.*

Obwohl die Äquivalenz der Formulierungen in Satz 3 und Satz 4 nicht sehr tief liegt, wollen wir sie kurz erläutern. Das nämlich gibt uns Gelegenheit, anhand einer der beiden Implikationen zu illustrieren, wie der Begriff der Kompaktheit auch in der Kombinatorik zwischen finitärer und unendlicher Mathematik vermittelt. Tatsächlich ist das Wechselspiel dieser beiden Pole ein ganz entscheidendes Charakteristikum der Mathematik rund um Szemerédis Theorem.

Beweis. Satz 4 $\Longrightarrow$ Satz 3: Diese Implikation erweist sich als trivial, sobald man beide Formulierungen des Satzes verdaut hat.

Satz 3 $\Longrightarrow$ Satz 4 (Diese Richtung ist interessanter zu beweisen): Angenommen, die Implikation wäre falsch. Dann gibt es Zahlen $k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$, sodass die Aussage von Satz 4 für jedes S falsch ist. Somit gibt es eine Folge natürlicher Zahlen $N_1 < N_2 < \ldots$ und Mengen $A_m \subseteq \{1,\ldots,N_m\}$ mit $\#A_m \geq \delta N_m$, die alle keine arithmetische Folge der Länge k enthalten.

[3] Auch wenn es im hier vorliegenden Fall wohl nur um Popularisierung innerhalb der wissenschaftlichen Gemeinschaft geht, so gibt es gute Argumente (die hier allerdings zu weit führen würden), das universell zu sehen.

Wir betrachten für jede Menge A_m die Indikatorfunktion

$$f_m := \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N} \setminus A_m \\ 1 & n \in A_m \end{cases}$$

und interpretieren sie als *Punkt* des Raumes $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist X *kompakt* (Satz von Tychonoff). Daher hat die Folge (f_m) einen Häufungspunkt f, welcher der Teilmenge $A = \{n : f(n) = 1\}$ der natürlichen Zahlen entspricht. Es lässt sich dann unschwer nachvollziehen, dass einerseits $\bar{d}(A) \geq \delta$ und andererseits A keine arithmetische Folge der Länge k enthält. Das heißt, wir haben den gesuchten Widerspruch zu Satz 3 gefunden. □

Bei diesem Argument wird Kompaktheit auf eine sehr einfache Weise eingesetzt, die sich natürlich sehr leicht zu einem Beweis umschreiben ließe, der auf keine Topologie Bezug nimmt. Insbesondere ist die hier verwendete Version des Satzes von Tychonoff eine harmlose, die mit einer sehr schwachen Version des Auswahlaxioms auskommt (wie sie etwa schon für den Satz von Bolzano-Weierstraß in klassischen Formulierungen der elementaren reellen Analysis gebraucht wird). Trotzdem zeigt schon das hier verwendete Kompaktheitsargument sehr typisch den Nutzen für unseren Themenkreis. Methodisch gehen mögliche Anwendungen allerdings weit über den elementaren Rahmen hinaus, auch wenn sie sich auf relativ elementare Probleme beziehen.

Es mag auf den ersten Blick überraschen, dass für den Satz von van der Waerden, bei dem es ja um das anscheinend (oder nur scheinbar?) sehr elementare Objekt $\mathbb{N}$ geht, sich eine unerhoffte Welt erschließt, wenn man in der Welt der Kompaktifizierungen viel weiter ausholt als im obigen Beweis. Und zwar kann man sehr erfolgreich die maximale Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ ins Spiel bringen, nämlich die Stone-Čech-Kompaktifizierung. Wir werden darauf noch zurückkommen. Späteres vorwegnehmend, kann aber schon hier angedeutet werden, dass im Falle des Satzes von Szemerédi Kompaktheit nur die Hälfte der *analytischen* Seite der Medaille ist. Die andere Hälfte, die gewissermaßen auch den Rahmen für den Satz von van der Waerden sprengt, ist stochastische Unabhängigkeit.

5 Kombinatorik versus Rekurrenz dynamischer Systeme

Furstenbergs epochale Einsicht bestand darin, die Aussage des Satzes von Szemerédi als Phänomen über die *Rekurrenz* dynamischer Systeme, genauer *maßerhaltender Systeme*, zu begreifen.

Unter einem maßerhaltenden System (X, μ, T) verstehen wir einen polnischen Wahrscheinlichkeitsraum (X, μ), auf dem die (messbare) Bijektion $T : X \to X$ so agiert, dass das Maß durch T erhalten wird, d.h. $\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ für jede messbare Teilmenge B von X gilt. Unter Rekurrenz versteht man die Eigenschaft von Teilmengen von X, unter iterierter Anwengung der Abbildung T immer wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückzukehren. Beispielsweise gibt es für jede Menge B mit $\mu(B) > 0$ eine natürliche Zahl n mit

$$\mu(B \cap T^{-n}(B)) > 0.$$

Dies folgt leicht aus der Annahme, dass der gesamte Raum X endliches Maß hat – eine simple, nichtsdestotrotz wichtige Eigenschaft, die als Poincaré-Rekurrenz bekannt ist.

Furstenberg [Fur77, Fur81] folgend, lässt sich der Zusammenhang zwischen oberer Dichte, maßerhaltenden Systemen und Rekurrenz in folgendes Prinzip kleiden.

Satz 5 (Korrespondenzprinzip)**.** *Zu jeder Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein maßerhaltendes System (X, μ, T) und eine Menge $B \subseteq X$ mit $\mu(B) = \bar{d}(A)$ und*

$$\bar{d}((A - m_1) \cap \ldots \cap (A - m_k)) \geq \mu(T^{-m_1}(B) \cap \ldots \cap T^{-m_k}(B)),$$

für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.

Der Beweis ist nicht schwer und wenig überraschend für jene, die Erfahrung mit der Konstruktion von Maßen haben.[4]

Intuitiv gesprochen, erhalten wir zu $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge B in einem maßerhaltenden System, die A gewissermaßen repräsentiert, d.h. uns erlaubt, Aussagen über die „Rekurrenz" der Menge A aus Aussagen über die Rekurrenz von B bezüglich T herzuleiten.

Wir fixieren nun $k \in \mathbb{N}$ und halten fest, dass Satz 3 folgt, wenn es uns gelingt, zu zeigen, dass für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{d}\big(A \cap (A - n) \cap \ldots \cap (A - (k-1)n)\big) > 0. \tag{1}$$

Offenbar besagt (1) nämlich sogar, dass es nicht nur ein $a \in A$ gibt, bei dem eine arithmetische Folge beginnen kann. Vielmehr bilden solche a's eine Menge positiver oberer Dichte.

[4] Beispielsweise lässt sich ein Shift-Raum $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $T((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$, $B := \{(x_n)_n : x_0 = 1\}$ mit geeignetem, der Menge A angepasstem Maß wählen. Um dieses zu konstruieren, betrachtet man zunächst die (abzählbare!) Algebra, die von den Translaten $\mathcal{A} = \{A - n : n \in \mathbb{Z}\}$ innerhalb der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ erzeugt wird. Durch Ausdünnen und Diagonalisieren findet man eine Folge $(k_n)_n$, sodass $m(C) := \lim_n \#(C \cap \{1, \ldots, k_n\})/k_n$ existiert, wann immer $C \in \mathcal{A}$ und überdies $m(A) = \bar{d}(A)$ gilt. Dieses (endlich additive) Maß induziert nun in natürlicher Weise einen Inhalt auf der Algebra der Teilmengen von X, die nur von endlich vielen Koordinaten abhängen: Man setzt $\mu(B) := m(A)$, $\mu(T^{-n_1}B \cap T^{-n_2}(B^c)) = m((A - n_1) \cap (A^c - n_2))$, etc. Die Additivität von m überträgt sich dann auf die μ und nach dem Kolmogorovschen Fortsetzungssatz induziert μ ein Maß auf den Borelmengen von X. Es ist nun nicht schwer, zu überprüfen, dass das so konstruierte maßerhaltende System die in Satz 5 geforderten Eigenschaften hat.

Gewissermaßen stellt die Beziehung (1) eine „Rekurrenz-Formulierung“ des Satzes von Szemerédi dar. Das Korrespondenzprinzip besagt nun gerade, dass diese Rekurrenz in (1) in rigoroser Beziehung zur Rekurrenz in maßerhaltenden Systemen steht. Insbesondere sind (1) und mithin auch der Satz von Szemerédi unmittelbare Folgerungen aus dem Korrespondenzprinzip zusammen mit der folgenden mächtigen Verallgemeinerung des Poincaréschen Rekurrenzsatzes:

Satz 6 (Furstenbergs multipler Rekurrenzsatz [Fur77]). *Sei* (X,μ,T) *ein maßerhaltendes System und* $B \subseteq X$ *messbar mit* $\mu(B) > 0$. *Dann gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\mu(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B) > 0. \tag{2}$$

Das relativ einfach zu beweisende Korrespondenzprinzip in Satz 5 formalisiert die in ihren Konsequenzen kaum zu überschätzende Einsicht, dass sich additive Kombinatorik und Ergodentheorie verbinden lassen, und hat zahllose Anwendungen.

Im Gegensatz dazu ist Furstenbergs multipler Rekurrenzsatz (6) ein sehr tief liegendes Resultat. Trotzdem erscheint es möglich, Furstenbergs Beweis in groben Zügen darzustellen.

6 Ergodentheoretische Erklärungen zum Satz von Szemerédi

Wie angekündigt, wollen wir uns auf Furstenbergs Beweis des Satzes von Szemerédi konzentrieren. In ihm tritt die Dichotomie zwischen Struktur und Zufall besonders deutlich zutage. Das liegt unter anderem daran, dass man für maßerhaltende Systeme (X,μ,T) besonders klar festmachen kann, inwiefern sie „strukturierten“ oder eben „zufälligen“ Charakter an den Tag legen.

6.1 Rekurrenz durch Struktur

Betrachen wir zunächst maßerhaltende Systeme mit besonders regulärem Verhalten. Sei etwa T periodisch, d.h. $T^n = \mathrm{Id}$ für ein $n > 0$. In diesem Fall ist Satz 3 trivial, da $\mu(B \cap T^{-n}B \cap \cdots \cap T^{-n(k-1)}B) = \mu(B) > 0$. Offenbar entspricht dieser Fall dem einer periodischen Menge A.

Etwas interessanter ist es, den Fall eines *fast periodischen* Systems zu betrachten. Sei etwa X der eindimensionale Torus (= Kreislinie = $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$), d.h. das Einheitsintervall, versehen mit der Addition modulo 1, $\mu = \lambda$ das Lebesguemaß, und bedeute T die Addition einer irrationalen Zahl α, d.h. $T(x) = x + \alpha$ (Torusrotation).

Bekanntlich kommen geeignete Vielfache $n\alpha$ beliebig nahe an ganze Zahlen heran (Dirichletscher Approximationssatz, der einfache Beweis verwendet das Schubfachprinzip). Für so ein n ist T^n fast die Identität, also hat T „fast" die Periode n.

Um Furstenbergs Rekurrenzsatz in diesem Fall zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass für jede messbare Menge $B \subseteq X$ die Abbildung

$$[0,1) \to \mathbb{R}, \quad \beta \mapsto \mu(B \cap B - \beta)$$

stetig ist. Dies folgt leicht aus der Regularität des Maßes. Insbesondere folgt

$$\mu(B \cap (B - \beta)) \approx \mu(B)$$

für alle hinreichend kleinen β.

Wählen wir nun mithilfe des Dirichletschen Approximationssatzes eine Zahl n, sodass die Zahlen $n\alpha, \dots, n(k-1)\alpha$ klein (d.h. nahe einer ganzen Zahl) sind, so liegt

$$\mu\big(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B\big)$$

beliebig nahe an $\mu(B)$. Insbesondere gilt die Aussage von Satz 6 in dem speziellen, hier betrachteten Fall.

Tatsächlich funktioniert das soeben präsentierte Argument in *kompakten* maßerhaltenden Systemen. Um diese zu definieren, bemerken wir, dass für eine Funktion $f \in L^2(X)$ auch die Funktion $f \circ T^n$ nicht nur in $L^2(X)$ liegt, sondern sogar dieselbe L^2-Norm hat.

Eine Funktion $f \in L^2(\mu)$ heißt *kompakt*, falls die Menge

$$\overline{\{f \circ T^n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq L^2 \tag{3}$$

kompakt ist. Das System (X, T, μ) heißt nun kompakt, wenn $L^2(X)$ ausschließlich aus kompakten Elementen besteht.

Nach dem Satz von Halmos und von Neumann [HvN42] lässt sich jedes kompakte System (X, T, μ) als *Gruppenrotation* darstellen. Das heißt, modulo eines Isomorphismus dürfen wir annehmen, dass X eine kompakte Gruppe ist, μ das entsprechende Haarmaß und $T(x) = x + \alpha$ für ein $\alpha \in X$. Die Situation unterscheidet sich für unsere Belange daher nicht wesentlich von der gerade präsentierten Torusrotation. Es ist eine lehrreiche Übung, die multiple Rekurrenzaussage dennoch direkt aus (3) abzuleiten, weil die Situation in (3) einem wesentlichen Schritt im Beweis des allgemeinen Satzes 6 ähnelt.

6.2 Rekurrenz durch Zufall

Diesmal betrachten wir dynamische Systeme mit ausgeprägt probabilistischem Verhalten: Sei (Y, ν) ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X, μ) das unendliche Produkt

$$\Pi_{\mathbb{Z}} Y, \quad \mu = \otimes_{\mathbb{Z}} \nu.$$

Die Elemente von X sind also Folgen $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ mit Gliedern $y_m \in Y$. Wie man leicht einsieht, erhält die *shift-Abbildung*

$$T : (y_m)_{m\in\mathbb{Z}} \mapsto (y_{m+1})_{m\in\mathbb{Z}}$$

das Maß ν.[5]

Sei B eine messbare Teilmenge von X, die zunächst nur von endlich vielen Koordinaten abhänge. Nach Definition des Produktmaßes gilt dann

$$\mu(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B) = \mu(B)^k \tag{4}$$

für alle hinreichend großen n. Durch solche B lassen sich aber beliebige messbare Mengen approximieren. Deshalb gilt auch im allgemeinen Fall wenigstens die asymptotische Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B) = \mu(B)^k. \tag{5}$$

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich etwas allgemeiner in sogenannten *schwach mischenden* maßerhaltenden Systemen. Dynamische Systeme dieses Typs bilden eine sehr wichtige Klasse und lassen sich durch eine ganze Reihe äquivalenter Bedingungen charakterisieren. Eine davon lautet:

Für alle messbaren Mengen A, B gibt es eine Ausnahmemenge N mit $N \subseteq \mathbb{Z}$, $\bar{d}(N) = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin N} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B). \tag{6}$$

In der Tat lässt sich ohne allzu großen Aufwand zeigen, dass (5) in allen schwach mischenden Systemen gültig ist, sofern man – wie in (6) – bereit ist, eine Ausnahmemenge mit Dichte Null zuzulassen. Insbesondere gilt damit also der Furstenbergsche Rekurrenzsatz für alle schwach mischenden Systeme.

Eine andere Charakterisierung von „schwach mischend“ lautet: Der Operator

$$U : L^2(\mu) \to L^2(\mu), \quad f \mapsto f \circ T$$

besitzt nur triviale Eigenfunktionen, d.h.:

$$f = c\,U f, \text{ mit } c \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv \text{const}, \tag{7}$$

(wobei in maßerhaltenden Systemen nur Eigenwerte c mit $|c| = 1$ auftreten). Diese zweite Charakterisierung erlaubt, eine Beziehung mit kompakten Systemen herzustellen. Während der Operator U im schwach mischenden Fall nur triviale Eigenfunktionen hat, werden kompakte Systeme dadurch charakterisiert, dass die Eigenfunktionen einen dichten Unterraum von $L^2(X)$ erzeugen.

[5] Aus dem Blickwinkel der Wahrscheinlichkeitstheorie betrachten wir also ein System unabhängiger Zufallsgrößen mit Verteilung ν.

6.3 Zusammenspiel von Struktur und Zufall

In den letzten beiden Abschnitten haben wir zwei Klassen von maßerhaltenden Systemen behandelt, die einerseits eine sehr „periodische“ und andererseits eine sehr „zufällige“ Natur aufweisen, und zwischen den beiden Situationen eine gewisse Polarität festgestellt.

Wie zu erwarten, ist ein generisches maßerhaltendes System im Allgemeinen aber weder kompakt noch schwach mischend. Wie der später noch etwas näher zu erläuternde Struktursatz von Furstenberg zeigt, setzen sich aber sehr allgemeine maßerhaltende Systeme in einer Weise aus den beiden extremen Typen zusammen, die sich für einen Beweis seines multiplen Rekurrenzsatzes 6 eignet. Furstenberg folgend, wollen wir deshalb versuchen, ein allgemeines System auf geeignete Art zu analysieren und möglichst in ein kompaktes und ein schwach mischendes zu zerlegen.

Ein sehr natürlicher Ansatz besteht darin, den Hilbertraum $L^2(\mu)$ in zwei Komponenten zu zerlegen in den Unterraum H_c aller kompakten Funktionen und dessen orthogonales Komplement $H_m := H_c^{\perp}$. Auf diesen beiden Komponenten können die Argumente der vorangegangenen Abschnitte sinnvoll angewandt werden. Es ist dann möglich, einen kurzen und übersichtlichen Beweis der Sätze von Furstenberg beziehungsweise Szemerédi zu geben, allerdings nur im Fall $k = 3$ (siehe beispielsweise [Ber06, Section 4.2.3]). Leider reicht die beschriebene Zerlegung des Hilbertraums nicht aus, um den Rekurrenzsatz in der notwendigen Allgemeinheit zu beweisen. Die noch nötige Verfeinerung leistet der bereits erwähnte *Struktursatz* von Furstenberg. In unserem Rahmen müssen wir uns allerdings mit einer oberflächlichen Beschreibung begnügen.

Dem algebraischen Begriff des homomorphen Bilds entspricht in der Theorie dynamischer Systeme jener des Faktors: Sind die Systeme $X = (X, \mu, T)$ und $X' = (X', \mu', T')$ durch eine surjektive und struktur-, hier maßerhaltende surjektive Abbildung $\phi : X \to X'$ mit $\phi \circ T = T' \circ \phi$ verbunden, so heißt X' ein *Faktor* von X beziehungsweise umgekehrt X eine *Erweiterung* von X'.

Furstenberg definiert nun, wann eine Erweiterung X von X' *schwach mischend* beziehungsweise *kompakt* ist. Eine präzise Definition würde hier zu weit führen. Wir merken nur an, dass sie im Falle eines trivialen, einpunktigen Systems X' gerade bedeutet, dass das System X schwach mischend beziehungsweise kompakt ist.

Der entscheidende Schritt ist dann, dass jedes System als projektiver Limes einer transfiniten Folge von Erweiterungen dargestellt werden kann, wobei jede einzelne dieser Erweiterungen entweder kompakt oder schwach mischend ist. Genauer: Für jedes System $X = (X, \mu, T)$ gibt es eine abzählbare, potentiell transfinite Kette[6]

[6] Genauer gesagt, eine Kette von abzählbarem Wohlordnungstyp.

$$X = X_{\sigma+n} \to \ldots \to X_\sigma \to \ldots \to X_{\omega+1} \to X_\omega \to \ldots \to X_1 \to X_0$$

aus kompakten beziehungsweise schwach mischenden Erweiterungen $X_{\alpha+1} \to X_\alpha$, sodass X_0 ein triviales (einpunktiges) System ist. Es ist dann möglich, die gesuchte Rekurrenzeigenschaft mittels transfiniter Induktion zu beweisen; in jedem Schritt kommen Argumente zum Tragen, die jenen ähneln, wie sie zuvor beschrieben wurden.

Es ist an dieser Stelle interessant, noch auf die Natur der Induktionshypothese hinzuweisen. Eine Schwierigkeit besteht nämlich darin, dass sich die Rekurrenz in den beiden Grundtypen von Systemen in sehr unterschiedlicher Weise manifestiert. Im kompakten Fall existieren natürliche Zahlen n, für die der uns interessierende Durchschnitt annähernd Maß $\mu(B)$ hat. (Tatsächlich ist das sogar für „viele" natürliche Zahlen der Fall.) Im mischenden Fall hingegen hat für (die meisten) hinreichend großen n der Durchschnitt annähernd das i.A. viel kleinere Maß $\mu(B)^k$. Um die Furstenbergsche Induktion durchzuführen, benötigt man aber ein Konzept, das diesen beiden unterschiedlichen Formen von Rekurrenz simultan Rechnung trägt. So eines findet Furstenberg, indem er die Bedingung

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B) > 0 \tag{8}$$

verwendet.

6.4 Zur Rolle des Satzes von van der Waerden

In der Retrospektive lässt sich der Satz von van der Waerden etwa der Strukturhälfte (vgl. Abschnitt 6.1 über kompakte Systeme) des Satzes von Szemerédi zuordnen. (Es ist bemerkenswert, dass der Satz von van der Waerden in Szemerédis Beweis einfließt.[7])

Abschnitt 6.1 deutet darauf hin, dass Rekurrenz in kompakten Systemen mit der Theorie der kompakten Gruppen verbunden ist. In gewissem Sinn tritt Rekurrenz deswegen auf, weil die identische Abbildung $\alpha \mapsto \alpha + 0$ auf einer kompakten Gruppe durch Iterationen der Abbildung T approximiert werden konnte. Es liegt nahe zu fragen, ob auch der Satz von van der Waerden auf dieses Argument zurückgeführt werden kann. Mit gewissen Abstrichen ist diese Sichtweise

[7] Darüber hinaus findet der Satz von van der Waerden auch Verwendung in Furstenbergs ursprünglichem Argument dafür, dass die multiple Rekurrenz der Form (8) im Induktionsschritt unter kompakten Erweiterungen erhalten beibt. Allerdings ist diese Abhängigkeit vom Satz von van der Waerden nur eine scheinbare. Das zeigt eine Variante des Furstenbergschen Arguments in [FKO82], die ohne den Satz von van der Waerden auskommt.

zulässig. Man muss allerdings einen Schritt über kompakte Gruppen hinaus machen und sogar kompakte (links-topologische) Halbgruppen betrachten. Im Wesentlichen lässt sich der Satz von van der Waerden aus Rekurrenzphänomenen in der Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ableiten. Im Fall der kompakten Halbgruppe $\beta\mathbb{N}$ existiert dann zwar kein neutrales Element. Aus der allgemeinen Strukturtheorie kompakter Halbgruppen weiß man jedoch, dass es „idempotente" Elemente (d.h. $e \in \beta\mathbb{N}$ mit $e+e=e$) gibt, und diese garantieren hinreichend viel Rekurrenz, um den Satz von van der Waerden zu implizieren.

Schließlich erwähnen wir noch, dass $\beta\mathbb{N}$ als Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ aufgefasst werden kann. Das ist technisch oft praktisch, um $\beta\mathbb{N}$ mit der Ramseytheorie zu verquicken. Wir verdeutlichen dies am Beispiel des Satzes von van der Waerden. Wir bezeichnen $e \in \beta\mathbb{N}$ als AF-Ultrafilter, wenn jede Menge $A \in e$ beliebig lange arithmetische Folgen enthält. Wieder hilft die Theorie kompakter Halbgruppen weiter. Sie liefert Elemente e mit Eigenschaften, welche die AF-Ultrafiltereigenschaft garantieren. Und da von den Mengen $A_1, \ldots, A_r$ einer Partition von $\mathbb{N}$ genau ein A_i in einem gegebenen Ultrafilter e liegen muss, ist damit der Satz von van der Waerden bewiesen.

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung lässt auch den folgenden Vergleich der Sätze von van der Waerden und Szemerédi zu: Der Satz von van der Waerden bedeutet, dass es ein Element $e \in \beta\mathbb{N}$ gibt, das geeignet ist, arithmetische Folgen dingfest zu machen. Der Satz von Szemerédi hingegen drückt – wie Zirnstein in [Zir12] bemerkte – aus, dass sogar *fast alle*[8] Elemente von $\beta\mathbb{N}$ AF-Ultrafilter sind.

7 Schluss

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gibt es mittlerweile eine Reihe von verschiedenen Zugängen zum Satz von Szemerédi. Insbesondere gelang es Timothy Gowers in [Gow98], das Fourier-analytische Argument von Roth zunächst auf den Fall $k=4$ und schließlich auf arithmetische Folgen beliebiger Länge zu erweitern, siehe [Gow01].[9] Bis heute liefert der Beweis von Gowers die stärkste quantitative

[8]Die Notation *fast alle* bezieht sich hier auf „Haarsche" Maße auf $\beta\mathbb{N}$, d.h. auf Wahrscheinlichkeitsmaße, die invariant unter Translationen der Halbgruppe $\beta\mathbb{N}$ sind.

[9]Ein weiterer, wesentlich verschiedener, Ansatz geht zurück auf Rusza und Szemerédi [RS78], die einen graphentheoretischen Beweis des Satzes im Fall $k=3$ geben. Um auch den allgemeinen Fall zu behandeln, ist es notwendig, das Argument auf Hypergraphen zu verallgemeinern. Dies gelang Gowers [Gow06, Gow07] beziehungsweise Nagle, Rödl, Schacht und Skokan [NRS06, RS06, RS07b, RS07a].

Ein wichtiges Anliegen der aktuelle Forschung besteht darin, die tiefliegenden Zusammenhänge dieser verschiedenen Zugänge zu Szemerédis Satz zu verstehen. Im Zuge dessen wurden weitere Beweise und interessante Varianten bekannter Argumente entdeckt; erwähnenswert sind u.a. Arbeiten von Austin [Aus10], Bergelson-Leibman-Lesigne [BLL08], Green und Tao [GT10] und das erste Polymath-Projekt [Pol12].

Fassung der finitären Version des Satzes von Szemerédi (Satz 4).

Weiters erfuhr der Satz von Szemerédi eine Reihe von Verschärfungen und Erweiterungen. Furstenberg und Katznelson [FK78] gelang es, den multiplen Rekurrenzsatz wesentlich zu verallgemeinern; sie zeigten, dass er auch für $k > 1$ verschiedene maßerhaltende Transformationen gilt, sofern diese kommutieren, d.h. $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ erfüllen. Als kombinatorische Folgerung erhält man eine multidimensionale Version des Satzes von Szemerédi.[10]

In eine etwas andere Richtung wurde Szemerédis Satz von Bergelson und Leibmann verschärft. Sie zeigen (unter anderem), dass Rekurrenz auch entlang von Polynomen stattfindet. Insbesondere gibt es für Polynome $p_1, \ldots, p_k$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $p_i(0) = 0$ und eine Menge A mit $\bar{d}(A) > 0$ stets Zahlen $a, d \in \mathbb{N}$, sodass

$$a, a + p_1(d), \ldots, a + p_k(d) \in A.$$

Der Satz von Szemerédi entspricht dann dem „linearen“ Spezialfall $p_i(n) = in$.

Berühmt ist der schon eingangs erwähnte Satz von Green und Tao [GT08]. Er besagt, dass es beliebig lange arithmetische Folgen von Primzahlen gibt. Da die Primzahlen Dichte 0 haben, kann man das natürlich nicht einfach aus dem Satz von Szemerédi folgern. Sehr oberflächlich beschrieben, besteht die Strategie des Beweises darin, die Primzahlen als Teilmenge einer etwas größeren, besser fassbaren Menge (genauer: Funktion) zu betrachten, in der sie positive Dichte haben. Der Satz folgt dann im Wesentlichen aus einer „relativen“ Variante des Satzes von Szemerédi.

Von den vielen offenen Fragen des Gebiets erwähnen wir zum Abschluss eine, die mit dem Satz von Green und Tao in Verbindung steht und auf die Erdős 3000 Dollar ausgesetzt hatte.

Frage 1. *Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge mit $\sum_{k \in A} 1/k = \infty$. Enthält A dann beliebig lange arithmetische Folgen?*

Literatur

[Aus10] T. Austin. Deducing the multidimensional Szemerédi theorem from an infinitary removal lemma. *J. Anal. Math.*, 111:131–150, 2010.

[Beh46] F. A. Behrend. On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 32:331–332, 1946.

[Ber06] V. Bergelson. Combinatorial and Diophantine applications of ergodic theory. In *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, pages 745–869. Elsevier, Ams-

[10] Darüber hinaus konnten Furstenberg und Katznelson in [FK91] eine Dichte-Version des Satzes von Hales-Jewett beweisen. Bei diesem handelt es sich um eine mächtige kombinatorische Verallgemeinerung des Satzes von Szemerédi.

terdam, 2006. Appendix A by A. Leibman and Appendix B by Anthony Quas and Máté Wierdl.

[BLL08] V. Bergelson, A. Leibman, and E. Lesigne. Intersective polynomials and the polynomial Szemerédi theorem. *Adv. Math.*, 219(1):369–388, 2008.

[ET36] P. Erdős and P. Turán. On some sequences of integers. *J. London Math. Soc.*, 11:261–264, 1936.

[FK78] H. Furstenberg and Y. Katznelson. An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. *J. Analyse Math.*, 34:275–291 (1979), 1978.

[FK91] H. Furstenberg and Y. Katznelson. A density version of the Hales-Jewett theorem. *J. Anal. Math.*, 57:64–119, 1991.

[FKO82] H. Furstenberg, Y. Katznelson, and D. Ornstein. The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(3):527–552, 1982.

[Fur77] H. Furstenberg. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *J. Analyse Math.*, 31:204–256, 1977.

[Fur81] H. Furstenberg. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981. M. B. Porter Lectures.

[Gow98] W. T. Gowers. A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four. *Geom. Funct. Anal.*, 8(3):529–551, 1998.

[Gow01] W. T. Gowers. A new proof of Szemerédi's theorem. *Geom. Funct. Anal.*, 11(3):465–588, 2001.

[Gow06] W. T. Gowers. Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs. *Combin. Probab. Comput.*, 15(1-2):143–184, 2006.

[Gow07] W. T. Gowers. Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem. *Ann. of Math. (2)*, 166(3):897–946, 2007.

[Gow12] W. T. Gowers. The work of Endre Szemerédi. *http://gowers.files.wordpress.com/2012/03*, 2012.

[GT08] B. Green and T. Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008.

[GT10] B. Green and T. Tao. Yet another proof of Szemerédi's theorem. In *An irregular mind*, volume 21 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 335–342. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2010.

[HvN42] P. R. Halmos and J. von Neumann. Operator methods in classical mechanics. II. *Ann. of Math. (2)*, 43:332–350, 1942.

[Kan12] M. Kang. The 2012 Abel laureate Endre Szemerédi and his celebrated work. *Internationale Mathematische Nachrichten*, 221:1–19, 2012.

[NRS06] B. Nagle, V. Rödl, and M. Schacht. The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs. *Random Structures Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.

[Pol12] D. H. J. Polymath. A new proof of the density Hales-Jewett theorem. *Ann. of Math. (2)*, 175(3):1283–1327, 2012.

[Rot53] K. F. Roth. On certain sets of integers. *J. London Math. Soc.*, 28:104–109, 1953.

[RS78] I. Z. Ruzsa and E. Szemerédi. Triple systems with no six points carrying three triangles. In *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II*, volume 18 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 939–945. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[RS06] V. Rödl and J. Skokan. Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs. *Random Structures Algorithms*, 28(2):180–194, 2006.

[RS07a] V. Rödl and M. Schacht. Regular partitions of hypergraphs: counting lemmas. *Combin. Probab. Comput.*, 16(6):887–901, 2007.

[RS07b] V. Rödl and M. Schacht. Regular partitions of hypergraphs: regularity lemmas. *Combin. Probab. Comput.*, 16(6):833–885, 2007.

[RS12] M. Raussen and C. Skau. Interview with Abel Laureate Endre Szemerédi. *Eur. Math. Soc. Newsl.*, (85):39–48, 2012.

[Sze69] E. Szemerédi. On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 20:89–104, 1969.

[Sze75] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith.*, 27:199–245, 1975. Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.

[Sze78] E. Szemerédi. Regular partitions of graphs. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes: Orsay, 9–13 Juillet 1976* (Colloq. Internat. CNRS, vol. 260) Éditions du CNRS, Paris, 1978, pp. 339–401.

[Tao12] T. Tao. Some ingredients in Szemerédi's proof of Szemerédi's theorem. *http://terrytao.wordpress.com/2012/03/23/*, 2012.

[vdW27] B. van der Waerden. Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Arch. Wiskunde*, 15:212–216, 1927.

[Zir12] H.-G. Zirnstein. Formulating Szemerédi's Theorem in Terms of Ultrafilters. *ArXiv* preprint 1206.0967, June 2012.

Adresse der Autoren:

Mathias Beiglböck, Fakultät für Mathematik der Universität Wien, Nordbergstraße 15, A-1090 Wien. e-mail mathias.beiglboeck@univie.ac.at

Reinhard Winkler, Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail reinhard.winkler@tuwien.ac.at