Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht durch Förderung der Phantasie

Reinhard Winkler (TU Wien)

Zusammenfassung

Für die Matura partiell integrieren lernen, im späteren Leben aber schon angesichts einer Division mehrstelliger Zahlen mit Bleistift und Papier überfordert sein: Nachhaltig kann so ein Ergebnis mathematischer Schulbildung nicht genannt werden; real anzutreffen ist es aber zweifellos, wenn nicht gar repräsentativ. Ich beschäftige mich deshalb mit folgenden Fragen: Was läuft oft falsch? Was kann besser gemacht werden? Wie lauten sinnvolle Ziele von Mathematikunterricht, sowohl anhand konkreter Beispiele wie auch allgemeiner Prinzipien?

Als das wichtigste Lehrziel betrachte ich die Entwicklung von Phantasie und mathematischem Vorstellungsvermögen, sowohl in einem engen, auf die geometrische Anschauung, als auch in einem weiteren, auf abstrakte Objekte bezogenen Sinn. Denn, um mit Kant (Kritik der reinen Vernunft) zu sprechen: Begriffe ohne Anschauung sind leer. Mit dem Vorstellungsvermögen verbinden sollte sich die sprachbezogene Fähigkeit, mathematische Vorstellungen in klare Begriffe und Aussagen zu fassen. Denn, nochmals nach Kant: Anschauungen ohne Begriffe sind blind. Diese sprachliche Fähigkeit steht in engem Zusammenhang mit der Schulung des logischen Schließens und Argumentierens. Als gleichermaßen tragenden Pfeiler im Gebäude der mathematischen Bildungsziele sehe ich schließlich das Vermögen, Mathematik mit anderen Bereichen der menschlichen Existenz in Verbindung zu setzen. Klassische Anwendungen der Mathematik zum Nutzen der Wirtschaft und Gesellschaft allgemein wie auch des Eizelnen in der alltäglichen Lebensbewältigung geben uns wichtige, aber bei weitem nicht die einzigen Beispiele hierzu in die Hand.

Im vorliegenden Artikel begründe ich diese Zielsetzungen ausführlich und argumentiere, warum ich unter ihnen der Phantasie und dem Vorstellungsvermögen in Hinblick auf Nachhaltigkeit sogar eine führende Rolle einräume. Ich schließe mit Vorschlägen, wie wir uns den Zielen nähern können.

1 Einleitung

So sehr *Nachhaltigkeit* als Schlagwort angesichts seiner Häufigkeit in ökologischem, ökonomischem, demographischem, gesundheitspolitischem oder sonstigem Kontext von inflationsbedingter Entwertung bedroht ist, so wichtig ist es, für das zu sorgen, was das Wort bezeichnet: Langfristige Gesichtspunkte nicht durch die Aussicht auf kurzfristige Belohnung in den Hintergrund treten zu lassen. Für Bildung, an sich auf Nachhaltigkeit ausgelegt, ist das besonders brisant. Denn sowohl für Schüler als auch für Lehrer gibt es die Verlockung trügerischer Erfolgserlebnisse. Einem Schulkind ist es nicht zu verargen, wenn es nur den Erfolg bei der nächsten Prüfung vor Augen hat. Der Lehrer aber ist sehr wohl verantwortlich dafür, ob sein Unterricht und auch seine Prüfungen Nachhaltigkeit gewährleisten.

Wir können nicht zufrieden sein, wenn – was in der Mathematik besonders häufig geschieht – der Weg des geringsten Widerstandes gegangen wird: Der Lehrer erkauft sich das Stillhalten der Schüler auch bei langweiligem und substanzlosem Unterricht dadurch, dass er uninteressante aber durch braves Erlernen einiger weniger Dressurakte leicht bewältigbare Placebo-Prüfungen gibt. Damit will ich Prüfungen keineswegs als vorsätzliche Selektionsmaßnahmen missverstanden wissen, sondern als höchst wirksame Steuerungsinstrumente und vor allem als Anreize für sinnvolles Lernen.

Es geht darum, Bewusstsein für weit verbreitete Mängel zu schaffen, Alternativen aufzuzeigen und eine allgemeine Atmosphäre zu befördern, die jenen Lehrern den Rücken stärkt, welche den Mut haben, Verbesserungen in Unterricht und Prüfungspraxis auch gegen anfänglichen Widerstand zu wagen.

Ich äußere mich als Fachwissenschaftler, dem die Mathematik als solche am Herzen liegt, als Hochschullehrer, der durch seine Erfahrungen Einblick in Stärken und Schwächen unseres Bildungssystems hat, und als Staatsbürger, der sich der wertvollen Rolle bewusst ist, welche nachhaltige mathematische Bildung in einer aufgeklärten demokratischen Gesellschaft spielen kann.

Der vorliegende Artikel ist wie folgt gegliedert:

Kapitel 2 unmittelbar nach der Einleitung ist der Frage gewidmet, was Mathematik denn überhaupt sei. Natürlich versuche ich keine strenge Definition. Statt dessen deute ich zahlreiche Blickwinkel an, unter denen man Mathematik sehen und aus denen man sich ihr nähern kann. Ich versuche also nicht nur eine Bestimmung von innen, sondern auch eine von außen aus der Sicht anderer Wissensgebiete wie Naturwissenschaft, Ökonomie, Jurisprudenz, Informatik, Philosophie, Sprache, Kunst, Geschichte und sogar Sport. Mathematikunterricht soll diesen Facettenreichtum vermitteln. Denn die Verankerung von Bildungsinhalten in einem stark vernetzten Kontext ist einer der verlässlichsten Garanten für Nachhaltigkeit.

In Kapitel 3 folgt eine Diskussion, inwiefern Mathematikunterricht in der Schule nach den jeweiligen Bedürfnissen verschiedener Adressaten zu differenzieren ist. Ich unterscheide danach, wie weit Schüler in ihrem zukünftigen Berufsleben mit Mathematik zu tun haben werden. Die ausführlichen Überlegungen in diesem Kapitel führen aber immer wieder zu sehr ähnlichen Resultaten. Es erweist sich, dass sinnvolle mathematische Bildung für alle Zielgruppen einen ähnlichen Charakter hat.

Worauf es dabei vor allem ankommt, ist Gegenstand von Kapitel 4: Neben der Schärfung des logischen Denkvermögens geht es um die Schulung sprachlicher Ausdruckskraft, die Einordnung der Mathematik in den zivilisatorischen Gesamtkontext und – das scheint mir das Allerwesentlichste – die Entwicklung von Vorstellungskraft und Phantasie. Dieses Kapitel, besonders Abschnitt 4.4, enthält die Kernaussagen des vorliegenden Artikels. Der ungeduldige Leser kann diesen Teil vorziehen. Die vorangehenden Teile dienen vor allem der ausführlichen und systematischen Begründung.

Das letzte Kapitel 5 schließlich beschäftigt sich mit bestehenden Missständen und mit Vorschlägen, wie gegen diese angekämpft werden kann.

2 Was ist Mathematik? – Vielfältig!

2.1 Vielfalt und Nachhaltigkeit

Bei einer Erörterung von Nachhaltigkeit mathematischer Bildung muss weitgehende Klarheit darüber bestehen, was Mathematik überhaupt ist. Dass diese Klarheit keine Trivialität ist, fällt jedem auf, der in die Mathematik tiefer als nur oberflächlich eingedrungen ist. Er muss zur Kenntnis nehmen, dass in mathematisch weniger gebildeten Kreisen sehr enge, wenn nicht gar verkehrte Vorstellungen von Mathematik weit verbreitet sind. Auf eine kurze Formel gebracht: Mathematik ist keineswegs nur der rechnerische Umgang mit Zahlen und Quantitäten, sie ist viel mehr. Worin dieses *mehr* besteht, lässt sich nicht in eine kurze Formel bringen. In meinem etwa 20 Seiten langen Artikel [6] habe ich versucht, diesem Thema auf einer eher allgemeinen Ebene halbwegs gerecht zu werden. Für ungleich mehr konkretes Material empfehle ich den Klassiker [1], ein reichhaltiges Buch, das sogar den Titel *Was ist Mathematik?* trägt.

Im vorliegenden Kapitel möchte ich die Vielfalt und den Facettenreichtum der Mathematik dadurch belegen, dass ich Verbindungen zu anderen Wissensbereichen erwähne. Es geht mir dabei nicht nur um die hinlänglich bekannte Tatsache, dass die Mathematik nutzbringende Anwendungen besitzt, sondern darum, dass in vielen Bereichen, die auf den ersten Blick mit Mathematik scheinbar nichts zu tun haben, eine gewisse Vertrautheit mit grundlegenden mathematischen Ideen für das Verständnis entscheidend ist. Anders formuliert: In zahlreichen außermathematischen Zusammenhängen treten Ideen auf, deren genauere Analyse notgedrungen in die Mathematik mündet. Wer die Idee im außermathematischen, vielleicht als anschaulicher empfundenen Kontext verstanden hat, wird sich vergleichsweise leicht tun, wenn es um die mathematische Formulierung und Weiterentwicklung derselben geht. Was hinsichtlich Nachhaltigkeit am wichtigsten ist: Ideen, Vorstellungen und Querverbindungen, die einmal lebendig waren, vergisst man nicht so schnell; Merksätze und Verfahren, die lediglich auswendig gelernt wurden, aber sehr wohl.

Darin scheint mir der wichtigste Schlüssel zu nachhaltigem mathematischen Verständins zu liegen: Lebendige Vorstellungen zu entwickeln, in welchen die Ideen zum Ausdruck kommen.

Fachmathematiker unterscheiden darin nicht grundsätzlich von Nichtmathematikern. Auch Mathematiker denken vorwiegend in anschaulichen Vorstellungen. Nur beherrschen sie überdies einen abstrakten Apparat für die ökonomische Formulierung und Behandlung dieser Vorstellungen. (Freilich sind manche Phänomene so komplex, dass sie jedes naive Vorstellungsvermögen überfordern und deshalb ohne das hohe Abstraktionsniveau gewisser mathematischer Teilgebiete nicht auskommen.)

Will man auch Schüler erreichen, die der Mathematik nicht von vornherein besonderes Interesse entgegenbringen, wird man nach Einstiegen von einer Seite suchen, wo schon erhöhtes Interesse besteht. Es gibt aber sehr unterschiedliche Schüler mit entsprechend unterschiedlichen Interessen. Glücklicherweise ist die Mathematik extrem universell (es gibt gute Argumente, sie als die universellste Wissenschaft überhaupt anzusehen), weshalb sich von fast jeder denkbaren Seite ein Zugang finden lässt. Entsprechend vielseitig und flexibel muss ein Mathematiklehrer sein. Als die höchste Fachkompetenz eines Mathematiklehrers sehe ich daher die Fähigkeit an, von möglichst vielen Richtungen Verbindungen zur Mathematik und ihren Kernideen zu finden. Der Mathematiklehrer muss nicht extrem viel Stoff beherrschen, aber er muss vielfältige Zugänge zu den zentralen Ideen kennen. Entsprechend will ich einige Beispiele für Verbindungen zwischen der Mathematik und anderen Disziplinen geben.

2.2 Mathematik und Naturwissenschaften

Der mit Namen wie Galilei und Newton verbundene Siegeszug des naturwissenschaftlichen Weltbildes beruht darauf, dass erst die Entwicklung mathematischer Begriffe (vor allem im Rahmen der Differential- und Integralrechnung) ein tieferes Verständnis von Naturvorgängen ermöglicht hat. Entsprechend ist die Mathematik kein bloßes Werkzeug, das man auf vorgegebene naturwissenschaftliche Fragen anwendet; schon um nur adäquat formulieren zu können, wovon diese Fragen handeln, muss man mit fundamentalen mathematischen Begriffen vertraut sein. Das hat zur Konsequenz, dass es nicht möglich ist, über Physik auch nur halbwegs adäquat zu sprechen, ohne ein beträchtliches Ausmaß an Mathematik zu beherrschen. Und auch in der modernen Chemie und Biologie – um bei jenen klassischen Naturwissenschaften zu bleiben, die durch eigene Fächer in der Schule vertreten sind – weiten sich jene Teilgebiete aus, wo die Mathematik nicht nur die wichtigsten Methoden, sondern auch die mit Abstand tragfähigsten begrifflichen Grundlagen liefert.

2.3 Mathematik und Ökonomie

Was seit der frühen Neuzeit für die Naturwissenschaften gilt, hat sich im 20. Jahrhundert auch für die Ökonomie immer deutlicher herauskristallisiert: Dass nämlich für viele Phänomene schon eine sinnvolle Beschreibung mathematische Begriffe voraussetzt. Vielfach wird eingewendet, dass das oft irrationale und nicht prognostizierbare Verhalten real handelnder Individuen eine rationale (mathematische) Analyse von vornherein ausschließe. Dieses Argument greift aber aus mehreren Gründen viel zu kurz.

Erstens liegt es auf der Hand, dass auch für die Analyse des Irrationalen nicht Irrationalität das geeignete Mittel ist, sondern Rationalität. Zweitens bedeutet die Unvorhersagbarkeit der Entscheidung Einzelner noch lange nicht, dass keine Aussagen über größere Kollektive gemacht werden können; die gesamte Statistik beruht darauf. Und drittens sind viele Mechanismen, die es in der

Ökonomie zu verstehen gilt, so kompliziert, dass schon allein zu ihrer Formulierung nur mathematische Begriffe taugen. Ob sich aus dem Verständnis einzelner solcher Mechanismen Voraussagen für die Zukunft großer und komplexer ökonomischer Systeme ableiten lassen, ist freilich eine andere und nicht immer positiv zu beantwortende Frage. Dass wir nicht alles wissen können, darf uns aber nicht davon abhalten, nach einem möglichst guten Verständnis zu trachten.

2.4 Mathematik und logisch begriffliches Denken – auch für Juristen

Zwar herrscht Konsens darüber, dass in der Mathematik logisches Denken wichtig ist. Bei genauerer Betrachtung entsteht jedoch der Eindruck, dass diese Einschätzung bei vielen Menschen auf sehr oberflächlichen Erfahrungen beruht, die eher in einem zwar geordneten aber unreflektierten Nachvollziehen routinemäßiger Handlungsanweisungen bestehen, als in einer Kenntnis echter mathematischer Schlussweisen: Ein wenn-dann-Schluss wie *Wenn die Summe zweier Ziffern zweistellig wird, dann muss ich für die Addition einen Übertrag berücksichtigen* ist eine sehr einfach automatisierbare algorithmische Regel aber noch keine logische Argumentation. Substantielle mathematische Überlegungen sind da von ganz anderer Art und machen typischerweise von der logischen Struktur der involvierten Begriffe wesentlichen Gebrauch. Insbesondere spielen die logischen Quantoren eine entscheidende Rolle. Als besonders charakteristisch dafür möchte ich die Analysis und den ihr fundamentalen Grenzwertbegriff erwähnen. (Etwas eingehender habe ich das in [6] ausgeführt.)

Was die Präzision und logische Komplexität der Begriffe und der Arbeit mit ihnen betrifft, geht die Mathematik wohl weiter als alle anderen Wissensgebiete. Es sind gar nicht so sehr die Naturwissenschaften, die ihr da am nächsten kommen, sondern die Philosophie und, weniger abstrakt, die Jurisprudenz, die im Interesse eines funktionierenden Gemeinwesens sehr hohen Ansprüchen hinsichtlich Eindeutigkeit ihrer Beschreibung von Sachverhalten und Rechtsnormen gerecht wird. Mit dieser Ähnlichkeit erkläre ich meine Erfahrung, dass Gespräche mit Juristen für mich als Mathematiker oft von besonders raschem gegenseitigen Verstehen geprägt sind.

2.5 Mathematik und Informatik

Die Tatsache, dass moderne Computer Rechenaufgaben bewältigen können, deren Komplexität und Aufwand in astronomischem Ausmaß alles Menschenmögliche übersteigt, zeigt eine Verbindung zwischen Mathematik und Informatik, die eher an der Oberfläche liegt. Auch ist die technische Entwicklung der letzten Jahrzehnte zu einem guten Teil ein Verdienst von Technikern und Ingenieuren. Die entscheidenden Impulse jedoch sind Mathematikern zu verdanken, von deren genialen Ideen die technische Entwicklung um die Mitte des 20. Jahrhunderts ihren Ausgang nahm.

Grundsätzliche Fragen zur Berechenbarkeit, die systematische Analyse von automatisierbaren Algorithmen und im Zusammenhang damit das berühmte offene P=NP-Problem bilden zahlreiche Ansatzpunkte, um Schülern, die sich für Informatik begeistern, auch Mathematik schmackhaft zu machen.

2.6 Mathematik und Philosophie

Was ist eine Zahl? Gibt es Zahlen, Punkte, Geraden etc. auch in der Erfahrungswelt, oder handelt es sich nur um Fiktionen unseres Geistes? Was ist Unendlichkeit? Wie lassen sich mit endlichen Mitteln Aussagen über unendliche Mengen beweisen? Lassen sich alle Wahrheiten beweisen? Was ist überhaupt ein Beweis? Können wir darauf vertrauen, dass die Mathematik widerspruchsfrei ist? Was sind Raum und Zeit?

Zahllose Fragen im Grenzbereich zwischen Mathematik, Naturwissenschaft und Philosophie haben nicht immer eine eindeutige Antwort, können aber jedenfalls Ausgangspunkte für interessante Diskussionen sein, die zu tiefen und substantiellen mathematischen Überlegungen motivieren. Vielleicht regen sie manchen Schüler auch zur Lektüre von Platon, Descartes, Russel etc. an.

2.7 Mathematik und Sprache

Es ist von offensichtlichem Nutzen, die Formelsprache der Mathematik bis zu einem gewissen Ausmaß wenigstens passiv zu beherrschen. Schon alltägliche Größen (z.B. das Sparguthaben G als Funktion von Eigenerlag E, einer jährlichen Verzinsung von p Prozent und der Laufzeit von t Jahren) lassen sich durch mathematische Formeln (im Beispiel $G = E(1+\frac{p}{100})^t$) wesentlich konziser fassen als durch notgedrungen äußerst schwerfällige verbale Umschreibungen. (Das Beispiel habe ich in [6] ausführlich behandelt und vertieft.) Entsprechend nützlich bis notwendig ist die Fähigkeit, derartige mathematische Formeln zu verstehen.

Abgesehen davon macht die Mathematik so wie jede Wissenschaft Aussagen über ihren Gegenstand und bedient sich somit der natürlichen Sprache. Besteht Mathematikunterricht nur aus extrem reduzierten und weitgehend nonverbalen Rechenschemata, verliert der Schüler diese Selbstverständlichkeit leicht aus den Augen. Dabei reicht die Beziehung zwischen Mathematik und Sprache noch wesentlich tiefer. Die Mathematik, genauer die mathematische Logik als mathematisches Teilgebiet, betrachtet es nämlich sogar als eine ihrer zentralen Aufgaben, die Ausdruckskraft formaler Sprachen und, darauf aufbauend, die Beweiskraft axiomatischer Systeme zu analysieren. Die berühmten Resultate von Gödel über die Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe und über die Unvollständigkeit formaler Systeme wie der Peano-Arithmetik oder der axiomatischen Mengenlehre gewinnen unter einem linguistischen Gesichtspunkt zusätzliche Faszinationskraft.

Schlussendlich ist die Klarheit mathematischer Aussagen eine der besten Schulen für Präzision auch in der natürlichen Sprache.

2.8 Mathematik und Kunst

Spätestens seit Pythagoras, also seit über 2500 Jahren, beschäftigt die geheimnisvolle Rolle der Mathematik in Kunstwerken Mathematiker wie auch Künstler. Pythagoras beobachtete, dass ganzzahlige Verhältnisse der Längen klingender Saiten für das Empfinden von Harmonie verantwortlich sind. Er leitete daraus seine allumfassende Botschaft ab, alles sei Zahl, womit er meinte, alle Proportionen ließen sich mittels ganzer Zahlen ausdrücken. Auch wenn diese Botschaft in ihrem universellen Geltungsanspruch schon in der griechischen Antike durch die Entdeckung von irrationalen Zahlen widerlegt wurde, so fasziniert dieser Themenkreis auch heute noch ungebrochen. Als klassisches Beispiel einer irrationalen Proportion von größter Bedeutung in Bildender Kunst, Architektur und Musik sei der Goldene Schnitt erwähnt (Zahlenverhältnis $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, Grenzwert der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen, Kettenbruchentwicklung $[1, 1, 1, 1, \ldots]$).

2.9 Mathematik und Geschichte

Der namhafte Mathematiker Don Zagier führte in einem allgemeinen Vortrag anlässlich der Eröffnung des Wiener *math.space* 2003 sehr überzeugend aus, dass im Spektrum der Wissenschaften Mathematik und Geschichte extreme Pole darstellen: Die Mathematik interessiert sich für die allgemeinsten Wahrheiten, die bei beliebig wiederholter Überprüfung unverändert bleiben, während sich die Geschichte mit einmaligen Ereignissen ohne eindeutige allgemeine Gesetzmäßigkeiten beschäftigt. Dennoch hat auch die Mathematik als Wissenschaft ihre Geschichte, die sich in einen großen kulturhistorischen Kontext einfügt.

Warum soll man nicht im Mathematikunterricht diskutieren, wie weit z.B. die großen mathematischen Fortschritte von Leonhard Euler und seinen Zeitgenossen in Beziehung zum Zeitalter der Aufklärung stehen und damit vielleicht gar zur Französischen Revolution? Immerhin lässt sich d'Alembert sowohl als Mathematiker als auch, neben Diderot, als Kopf der Enzyklopädisten anführen und belegt somit gewisse Verbindungen. Außerdem ist die Geschichte auch der Mathematik voller Anekdoten über ihre Helden, womit Interesse am Gegenstand geweckt werden kann.

2.10 Mathematik und Sport

Die Beziehung zwischen Mathematik und Sport mag oberflächlicher sein als die zwischen Mathematik und klassischen Wissenschaften. Dennoch gibt es ein wichtiges verbindendes Element. Kaum ein Wissensgebiet eignet sich nämlich so gut für wettkampfähnliche Herausforderungen wie die Mathematik. Um ein klug gestelltes mathematisches Problem zu lösen, hilft es nämlich nicht, irgendeine Information im Internet zu ergoogeln. Man muss sich statt dessen wirklich anstrengen. Dafür wird, wer das Problem eigenständig löst, mit einer nachhaltigeren Befriedigung belohnt als jemand, der bei einer herkömmlichen Quizveranstaltung eine banale Antwort, die viele wissen, nur als erster herausrufen kann. Denn in mathematischen Ideen kommen immer auch Individualitäten zum Ausdruck.

Bei der in der Mathematik besonders wichtigen langen, konzentrierten Einzelarbeit liegt der Vergleich mit dem Reiz von sportlichen Ausdauerleistungen oder von Gipfelsiegen beim Bergsteigen nahe. Es gibt sicher genug Schüler, die man auf diese Weise besser ansprechen kann als irgendwie sonst.

3 Wer soll was lernen?

Nachdem ich mich recht ausführlich mit vielfältigen Zugängen zur Mathematik beschäftigt habe, wende ich mich nun der Frage zu, wie weit mathematischer Schulunterricht in Hinblick auf die spätere Berufswahl differenziert werden muss. Unterscheiden sich die Bedürfnisse der Schüler in Abhängigkeit davon, ob es sich um zukünftige mathematische Forscher handelt, um Mathematiklehrer, um Anwender der Mathematik in Technik und Wirtschaft, oder ob Mathematik im späteren Berufsleben wenigstens vordergründig keine Rolle spielen wird? Vielleicht wird es den Leser überraschen: Meiner Ansicht nach sind diese Unterschiede gering. Abgesehen von (relativ kleinen) Leistungsgruppen zur Förderung von Spezialbegabungen halte ich frühe Spezialisierungen nicht für sinnvoll. Die wichtigsten Richtlinien gelten nämlich für alle Gruppen in sehr ähnlicher Weise. Zur Begründung meiner These muss ich die Gruppen trotzdem einzeln behandeln. Dabei werde ich aus der Gruppe derer, die in ihrem Beruf keine Mathematik brauchen, auch noch eine zwar kleine, aber wichtige Untergruppe hervorheben, für die ich die hässliche Bezeichnung *opinion leader* gebrauche. Dabei denke ich an jene Menschen, die, obwohl sie zur Mathematik scheinbar keine nähere Beziehung unterhalten, durch ihre Stellung in Beruf, Gesellschaft und Öffentlichkeit die Rolle der Mathematik mitzuprägen imstande sind, z.B. weil sie bildungs- und forschungspolitische Entscheidungen zu treffen haben. Was also sollen diese unterschiedlichen Personengruppen jeweils lernen?

3.1 Begabtenförderung für zukünftige mathematische Forscher

Die Gruppe der zukünftigen mathematischen Forscher ist natürlich viel zu klein, als dass sich generelle Lehrinhalte an ihr orientieren dürfen. Außerdem teile ich mit vielen Kollegen die Einschätzung, dass sich mathematische Spezialbegabungen weitgehend unabhängig von der Qualität des Schulunterrichts zeigen. Entsprechend finden sich unter den Studienanfängern der Mathematik Jahr für Jahr ähnlich viele Hochbegabte. Diese kommen aus den unterschiedlichsten Schultypen; aus humanistischen nicht weniger als aus technisch-naturwissenschaftlichen.

Ungeachtet dessen ist es natürlich wünschenswert, auch hochbegabten Schülern zusätzliche Angebote in Form von Förderprogrammen zu bieten wie etwa den Mathematik-Olympiaden u.ä. Träumt man von Weltklassemathematikern, wird frühe Begabtenförderung ebenso unerlässlich sein wie etwa in der Musik.

3.2 An zukünftige Mathematiklehrer denken!

Die Gruppe der zukünftigen Mathematiklehrer, wenn auch ebenfalls nicht sehr groß, spielt wegen der großen Multiplikatorwirkung des Lehrerberufes eine besonders wichtige Rolle, wenn es um Nachhaltigkeit geht. Nirgendwo ist Geld besser investiert als in die Ausbildung erstklassiger Lehrer. Der hervorragenden Lehrerausbildung muss aber auch eine funktionierende Auswahl vorangehen, wenn es darum geht, wer sich für diesen Beruf und damit für das Lehramtsstudium entscheidet. Und hier beginnt es problematisch zu werden, wenn der Schulunterricht vom Fach Mathematik ein unausgewogenes oder gar verkehrtes Bild vermittelt. Die Erfahrung zeigt, dass bei der Entscheidung für ein Lehramtsstudium der Mathematik leider selten eine besonders innige Beziehung zum Fach der Grund ist. Selbst Neigungen pädagogischer und kommunikativer Art, wie sie zweifellos zu den wichtigsten Voraussetzungen für Lehrer gehören, scheinen selten an vorderster Stelle zu stehen. Ich selbst und viele meiner Kollegen in der Lehrerausbildung müssen den Eindruck bestätigen, dass Gründe wie familiäre Traditionen (meine Eltern sind Lehrer, also werde auch ich Lehrer) oder schlicht eine gewisse Ängstlichkeit, die im Lehrerberuf wenigstens etwas aus der eigenen Schulzeit Vertrautes erblickt, sehr häufig für die Berufswahl entscheidend sind. Wenn dann gar noch die Entscheidung für das Fach Mathematik aus den falschen Gründen erfolgt, ist späteres Leid im Unterricht vorprogrammiert – für den Lehrer und, noch schlimmer, auch für seine Schüler. In Hinblick auf zukünftige Mathematiklehrer sehe ich als vordringlichstes Ziel eines Mathematikunterrichts daher: Ein authentisches Bild von der Mathematik vermitteln und keinen Torso mit absurden Gewichtungen! Was ich unter richtigen und falschen Gewichtungen verstehe, wird sich angesichts der noch zu behandelnden anderen Adressatengruppen ergeben. Denn das Wesen der Mathematik kann sich nicht zirkulär über das Wesen des Mathematikunterrichts definieren.

3.3 Brauchen zukünftige Anwender der Mathematik einen speziellen Schulunterricht?

Menschen, die keine mathematische Forschung im engeren Sinn betreiben, sehr wohl aber Mathematik als Hilfsmittel in Wirtschaft und Technik einsetzen, bilden zwar auch keine extrem große Gruppe, repräsentieren aber ein Berufssegment, welchem von allen Seiten für die Zukunft wachsende Bedeutung vorausgesagt wird. Als Hochschullehrer an einer Technischen Universität kenne ich diese Gruppe ziemlich gut, wobei ich bisher (neben den Fachmathematikern) mit angehenden Elektrotechnikern, Informatikern und Maschinenbauern zu tun hatte. Bemerkenswerterweise ist an diesen drei Gruppen jeweils so etwas wie ein kollektiver Charakter zu beobachten, der sie als Gruppen voneinander abhebt. Auch gibt es unterschiedliche fachliche Schwerpunkte in den Studienplänen. Es wäre aber illusorisch, bereits in der Schule auf die genannten Studien oder andere mögliche zukünftige fachliche Spezialisierungen abzuzielen. Deshalb halte ich auch nicht viel von frühzeitiger methodischer Verfeinerung in der Schule. Der Anteil der Schüler, die damit später etwas anfangen können, ist zu gering. Überdies fällt es nicht schwer, speziellere Fertigkeiten im Rahmen eines Universitätsstudiums rasch nachzuholen, sofern aus der Schule nur die richtigen Denkgewohnheiten mitgebracht werden. Solche Denkgewohnheiten sind von allgemeinerer Natur, aber entscheidend. Es gibt nämlich eine ganz wichtige Gemeinsamkeit, um die sich alles dreht: Welche mathematischen Methoden auch immer erlernt werden müssen, stets zeichnen sich die Erfolgreichen dadurch aus, dass sie damit sinnvolle Vorstellungen verbinden können. Denn nur aus einer lebendigen Vorstellung heraus entwickeln sich Verständnis, Sicherheit und in weiterer Folge Flexibilität bei eigenverantwortlichem Einsatz und vielleicht sogar selbständiger Modifikation und Weiterentwicklung erlernter Methoden. Für den Anwender ist die richtige Vorstellung von den zwar meist außermathematischen, aber nur durch die Mathematik adäquat beschreibbaren Objekten entscheidend, zusammen mit dem Verständnis der (mathematischen) Sprache dieser Beschreibung. (Im Unterschied dazu muss der Fachmathematiker auch noch mit dem logisch stringenten Aufbau der Theorie vertraut sein.)

3.4 Was sollen zukünftige *opinion leader* über Mathematik wissen?

Ich erinnere mich an das Interview mit einem berühmten Musiker, der Mängel der musischen Erziehung in unserem Bildungssystem beklagte. Hierin folge ich ihm uneingeschränkt. Nicht einverstanden war ich aber, als er den seiner Meinung nach überbewerteten Gegenpol der zu fördernden musisch-kreativen Erziehung als den mathematisch-ökonomischen bezeichnete. Aus dem Interview ging klar hervor, dass er – wie auch ich – eine Erziehung ablehnt, die als Rechtfertigung für Bildungsinhalte lediglich den in Geldmengen ausdrückbaren unmittelbaren ökonomischen Nutzen gelten lässt. Aber so wie eine wissenschaftliche Ökonomie wenig mit Geldgier zu tun hat (obwohl sie gewisse Aspekte derselben analysiert), hat Mathematik noch viel weniger mit der Lust an großen Zahlen zu tun, die Geldwerte beschreiben. Da wurde wohl Mathematik mit Kontoführung verwechselt! Man fragt sich, welcher Mathematikunterricht in dem Musiker dieses Vorurteil hervorgerufen hat.

Tatsächlich sind die Mängel in der künstlerisch-musikalischen Erziehung sogar wesensverwandt mit jenen in der mathematischen. Denn Mathematik und Kunst sind verschiedene Ausdrucksformen sehr ähnlicher, im Menschen fest verankerter kultureller und intellektueller Bedürfnisse. Es sind diese zutiefst humanen Bedürfnisse, an denen schlechter Unterricht sich versündigt. Es ist verhängnisvoll, wenn gerade sogenannte opinion leader sich dessen nicht bewusst sind. Ich darf aber auf ein großartiges positives Beispiel verweisen, den Artikel [2] von Hans Magnus Enzensberger. Der Artikel zeugt von der tiefen Einsicht eines bedeutenden Schriftstellers ins Wesen der Mathematik und in die Problematik, mit der wir uns hier beschäftigen.

Ähnlich wie die weiter oben behandelten Mathematiklehrer stellen auch die zukünftigen opinion leader eine zwar zahlenmäßig nicht sehr große Gruppe dar, verdienen wegen ihrer Multiplikatorwirkung aber eine besondere Beachtung. Ich möchte gar nicht das Klischee von der Seitenblickefigur strapazieren, die öffentlich betont, wie fern ihr Mathematik steht. Ich denke eher an den brillanten Juristen, dessen hohe Funktion in der öffentlichen Verwaltung ihm Einfluss auf bildungspolitische Entscheidungen gibt, oder an den Manager, dessen ökonomische Macht ihn in eine ähnlich verantwortungsvolle Position bringt; meist hochintelligente Menschen, unabhängig davon, wie lustvoll ihr bisheriger Kontakt mit der Mathematik war. Wenn sich dieser Kontakt auf einen unglücklichen Schulunterricht beschränkte, in dem ein Zerrbild der Mathematik vermittelt wurde, kann das katastrophale Auswirkungen haben. Zu bedenken ist auch, dass gerade intelligente Menschen zu schärferer Kritik neigen, hohe geistige Ansprüche stellen und deshalb von einem ungenügenden Mathematikunterricht ganz besonders negativ geprägt werden können. Man lasse sich von dem Argument, die Begabung dieser Leute läge eben in anderen Bereichen, nicht zu falschen Schlüssen verleiten! Wohl sollten wir es vermeiden, im Mathematikunterricht das rechnerische Detail zu sehr zu strapazieren. Geistig lebendige Menschen sind in der Regel aber empfänglich für interessante Ideen, Querbezüge und historische, philosophische wie kulturelle Hintergründe jeglicher Art. In Hinblick auf Nachhaltigkeit bei dieser gesellschaftlich besonders wichtigen Gruppe geht es also vor allem um ein emotional positiv besetztes und durch Facettenreichtum schillerndes Mathematikbild. Am häufigsten sind diesbezügliche Defizite der Grund, wenn Mathematikunterricht als unbefriedigend erlebt wird.

3.5 Welche Mathematik braucht jeder?

Die meisten Menschen in unserer Gesellschaft haben weder beruflich viel mit Mathematik zu tun, noch genießen sie das Privileg, überproportionalen Einfluss auszuüben. Vor allem aber ihre Bedürfnisse müssen berücksichtigt werden. Was also sollen sie aus dem Mathematikunterricht in der Schule mitnehmen? Eine pauschale Antwort liegt auf der Hand: Wovon sie individuell und die Gesellschaft insgesamt am meisten haben. Aber was ist das?

Im vorliegenden Abschnitt will ich die Perspektive des Einzelnen einnehmen. Offensichtlich gibt es einige für die Bewältigung des Alltags unabdingbare Fertigkeiten. Ich denke z.B. an ein hinreichendes Verständnis für Zahlen, Größenordnungen und Quantitäten, eine entsprechende Beherrschung der Grundrechnungsarten, ein sicheres Vorstellungsvermögen für die wichtigsten geometrischen Konstellationen, eine Vetrautheit mit elementaren Phänomenen der Finanzmathematik sowie mit Grundprinzipien der Statistik. Dem Leser wie auch mir fallen sicher noch andere Punkte ein, aber mir geht es an dieser Stelle nicht um Vollständigkeit. Allerdings fällt auf, dass selbst bei diesen elementaren Zivilisationstechniken oft schmerzhafte Mängel festzustellen sind, obwohl im Mathematikunterricht Stoff weit darüber hinaus auf dem Programm steht. Wie lässt sich diese Diskrepanz erklären?

Bereits auf dem Niveau der Grundrechnungsarten so wie generell in der Mathematik erwächst Kompetenz nicht aus Repetition allein und schon gar nicht aus Drill, sondern aus der Entwicklung adäquater Vorstellungen. Wenn ein Erwachsener Probleme bei der Division mehrstelliger Zahlen mit Bleistift und Papier hat, so in den meisten Fällen nicht deshalb, weil er in der Schule zu wenige Beispiele dieser Art gerechnet hat, sondern weil diese lediglich als Automatismus zur rein symbolischen Zeichenmanipulation vermittelt worden sind und nicht als Anwendung gewisser Vorstellungen, die mit arithmetischen Operationen (wie etwa der Anwendung des Distributivgesetzes) verknüpft sind. Im Beispiel der Division wie auch sonst ist die Entwicklung von stimmigen Vorstellungen primär, erst daran kann die Einübung von algorithmischen Rechenverfahren erfolgreich anschließen. Denn die dauerhaften Grundbausteine des menschlichen Bewusstseins sind Ideen und Vorstellungen, nicht automatisierte Handlungsabläufe, deren Bedeutung im Dunkeln bleibt.

So viel zum Aspekt der Nützlichkeit. Aber auch auf die Mehrheit der Bevölkerung bezogen soll sich mathematische Bildung nicht nur über ihre unmittelbare und offensichtliche Nützlichkeit definieren. Zu einer für alle offensichtlichen Nützlichkeit kommt nämlich ein versteckterer Wert hinzu, den nur würdigen kann, wer ihn selber kennt. Mehr als eine Sammlung nützlicher Methoden ist Mathematik ein vielfach vernetztes System von grundlegenden Ideen und Betrachtungsweisen, an denen die unterschiedlichsten Phänomene der Wirklichkeit teilhaben (durchaus in einem Platon nahe stehenden Sinn). Ein Beispiel:

Wer die Grundideen der Differentialrechnung verstanden hat, dem wird ihre Relevanz für die Bestimmung von Bremswegen ebenso wie für die Planetenbewegungen oder auch für Wachstumsprozesse offensichtlich sein. Das ist von unschätzbarem Wert für die Ökonomie des Denkens. Unabhängig davon, wieviele Polynome oder auch kompliziertere Funktionen im Schulunterricht differenziert werden mussten, wird das Verständnis für die Grundidee der Differentialrechnung viel entscheidender für die Nachhaltigkeit dieser Bildungsinhalte sein.

Bildungsdiskussionen gehen häufig von der Frage aus: Was braucht die Wirtschaft und was muss der einzelne können, um auf dem Arbeitsmarkt erfolgreich zu sein? Zweifellos ist diese Frage wichtig. Ein humanes System fragt darüber hinaus aber auch: Welche Bildung verhilft dem Einzenen insgesamt, also nicht nur in Hinblick auf seinen beruflichen und ökonomischen Erfolg, zu einem glücklichen und erfüllten Leben? Ich hoffe, dass der Leser aus Kapitel 2 bereits Antworten auf diese Frage gewinnen konnte. Denn Mathematik ist ein unverzichtbarer Teil auch unseres kulturellen Erbes.

3.6 Welche mathematische Bildung braucht die Gesellschaft?

Diese Frage wird zu eng behandelt, wenn ökonomische Gesichtspunkte dominieren. Eine demokratische Gesellschaft braucht vieles mehr, damit – abgesehen vom ökonomischen Wohlergehen mehr oder weniger großer Gruppen – auch Errungenschaften wie Freiheit, Rechtsstaatlichkeit, kultureller Reichtum, soziale Gerechtigkeit und Zugang aller zu öffentlichen Einrichtungen bewahrt und weiterentwickelt werden können. Ein riesiges Anwendungsfeld für Nachhaltigkeit!

Aufgeklärte Individuen mit einem entwickelten Urteilsvermögen sind Voraussetzung, sofern politische Entscheidungsprozesse nicht nur autoritär von oben herab erfolgen sollen. Wir wünschen uns, dass der Einzelne am politischen Leben teilnimmt und dieses bereichert, indem er die Möglichkeit hat und nutzt, sich in öffentliche Diskurse einzubringen. Hierfür sind zwei weitere wichtige und politisch relevante Bildungsziele hervorzuheben, zu denen insbesondere mathematischer Unterricht Wichtiges beitragen kann:

Erstens der klare Blick für logische Stringenz und zweitens, in Verbindung damit, die Fähigkeit, die eigenen Gedanken und Vorstellungen in klarer Sprache auszudrücken. Dass die Logik als Methode zutiefst mit der Mathematik verbunden ist, liegt auf der Hand – auch wenn schlechter Schulunterricht logische Argumentation oft vernachlässigt und durch geradezu automatisierbare Rechenabläufe ohne für den Schüler sichtbare logische Hintergründe ersetzt. Dass Mathematik aber auch eine der besten Schulen für sprachlichen Ausdruck darstellt, ist vielleicht weniger populär. Der Grund liegt auch hierin in unglücklichen Traditionen von solchem Schulunterricht, wo nur einige starre Lehrsätze auswendig gelernt werden müssen, anstelle Schüler zu eigenen Gedanken und deren sprachlicher Formulierung zu ermuntern.

4 Die Hauptaufgaben mathematischen Schulunterrichts

Die Analyse in Kapitel 3 der je nach beruflicher Zukunft unterschiedlichen Interessenslagen hat gezeigt, dass die wichtigsten Ziele eines nachhaltigen Mathematikunterrichts für alle Gruppen bei nur geringfügig unterschiedlicher Gewichtung immer die gleichen sind. Sie lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Schärfung des logischen Denkvermögens
2. Schulung der sprachlichen Ausdruckskraft
3. Einordnung der Mathematik in den zivilisatorischen Gesamtkontext
4. Entwicklung der Vorstellungskraft (Phantasie)

Ich will diese vier Ziele unter dem Gesichtspunkt der Nachhaltigkeit diskutieren.

4.1 Logisches Denken – notwendig, aber nicht hinreichend

Die Fähigkeit zu logischem Schließen ist gewiss eines jener Charakteristika des Menschen, auf die wir besonders stolz sind. Aus Abschnitt 3.6 geht hervor, dass die Förderung dieser Fähigkeit nicht nur im Interesse des Einzelnen liegt, sondern auch Voraussetzung ist für eine offene, demokratische Gesellschaft. Es wäre schon viel gewonnen, wenn häufig auftretende aber falsche Denkfiguren wie unzulässige Verallgemeinerungen (von einem Beispiel darf nicht leichtfertig auf die Gesamtheit geschlossen werden), oder Umkehrschlüsse (eine notwendige Bedingung muss nicht hinreichend sein und umgekehrt) auf mehr Kritik stößen. Ein gewisses Mindestniveau in öffentlichen Diskursen ist notwendig.

Freilich hat die Mathematik logische Stringenz keineswegs für sich allein gepachtet. Jede menschliche Tätigkeit, die ein Mindestmaß an begleitender Argumentation voraussetzt, ist als Schulung wertvoll. Doch geht die Mathematik am systematischsten vor.

(Nebenbemerkung: Die mathematische Logik als Teildisziplin der Mathematik reicht weit über das hinaus, entfaltet ihre eigenen Reize und verdiente vor allem in Studienplänen für das Lehramt mehr Aufmerksamkeit.)

Argumentieren im Allgemeinen und somit Logik und Mathematik im Besonderen sind an Sprache gebunden. Dieser Umstand ist so wichtig, dass er uns unmittelbar zum nächsten Ziel nachhaltiger mathematischer Bildung führt.

4.2 Mathematik als Sprachschule

Die populäre Einteilung von Begabungen in mathematisch-naturwissenschaftliche und sprachlich-musische halte ich zumindest für unglücklich, in mancherlei Hinsicht sogar für grundfalsch. Wohl entspricht es meiner persönlichen Erfahrung, dass für einen begabten Mathematiker andere Fähigkeiten typisch sind, als sie z.B. beim Erlernen von Fremdsprachen helfen. Der Mathematiker braucht einen Blick fürs Allgemeine, der von Einzelbeispielen abstrahiert. Für die Sprachbeherrschung vergleichsweise wichtiger ist z.B. eine große Aufnahmefähigkeit für ein großes Vokabular inklusive Wendungen und ganzer Bedeutungsfelder, insbesondere also ein gutes Gedächtnis auch für Einzelphänomene. Mir persönlich geht das leider ab. Ungeachtet dessen kenne ich viele Mathematiker mit außergewöhnlichen Fremdsprachenkenntnissen. Insgesamt scheint also Begabung für Fremdsprachen von jener für Mathematik ziemlich unabhängig zu sein.

Schon bei der Beherrschung der Muttersprache jedoch liegen die Dinge deutlich anders. Mathematiker, deren sprachliche Ausdruckskraft gegenüber allgemeinen Standards unter Hochschulabsolventen abfällt, sind äußerst selten. Gleichzeitig gibt es aber viele mit diesbezüglich zweifellos überdurchschnittlichen Fähigkeiten. Das Bild vom versponnenen und lebens- wie kommunikationsuntüchtigen Mathematiker rührt von anderen Defiziten her, welche bei Mathematikern vielleicht tatsächlich etwas häufiger auftreten als sonst: Schüchternheit und Ängstlichkeit in persönlichen Begegnungen mag ein Anreiz sein, sich lieber mit Dingen zu beschäftigen, die auch für Einzelgänger und möglichst unabhängig von der Umwelt zugänglich sind. Und davon hat die Mathematik natürlich besonders viel anzubieten. Doch zurück zur Sprachbeherrschung.

Unsere entwicklungspsychologischen Anlagen sind offenbar so stark, dass – von offensichtlichen Behinderungen einmal abgesehen – jeder Mensch in seinen ersten Lebensjahren sich seine Muttersprache ebenso automatisch aneignet, wie er gehen lernt. (Fremdsprachen spielen also offenbar deshalb eine andere Rolle, weil ihr Erwerb typischerweise in eine spätere Phase fällt, wo das Gehirn nicht mehr so unmittelbar aufnimmt.) Aus diesem Grunde sind einsprachig aufwachsende Kinder, sobald sie die Grundstrukturen ihrer Sprache einmal beherrschen, für ihre weitere sprachliche Entfaltung zunächst einmal ziemlich ähnlich ausgestattet. Wie kommt es in der späteren Entwicklung dazu, dass einige Menschen Sprachvirtuosen werden, die mit ihrem gesprochenen, geschriebenen oder gesungenen Wort Massen für sich einnehmen können, während andere nicht einmal dazu in der Lage sind, ihre fundamentalsten Interessen verbal zu vertreten?

Gäbe es eine einfache Antwort auf diese Frage, löste sich ein guter Teil aller bildungspolitischen Probleme in nichts auf. Sprachkompetenz ist zweifellos ein vielschichtiges Phänomen mit einer stark psychologischen Komponente. Und natürlich trägt in unseren Schulen der Deutschunterricht den größten Teil der Verantwortung dafür. Aber auch jedes andere Schulfach setzt sprachliche Kommunikation als zentrales Instrument ein und hat daher eine entsprechende Mitverantwortung. Ich behaupte, dass die Mathematik diesbezüglich sogar einen besonders wertvollen Beitrag leisten kann. Wie ist das möglich, wo Mathematik doch oft geradezu als extremer Gegensatz zu sprachlichen Fächern hingestellt wird?

Zunächst muss es Ziel sein, über Mathematik genauso zu sprechen wie über andere Themen. Dass manchmal Formalisierungen hilfreich eingesetzt werden, ändert daran nichts. Denn die mathematische Formelsprache ist keine Vermeidung der natürlichen Sprache, sondern eine (symbolische, nicht aber inhaltliche) Abkürzung, um komplizierte Zusammenhänge konziser und übersichtlicher darzustellen, ähnlich wie Landkarten in der Geographie, Notenschrift in der Musik und generell Abbildungen und schematische Darstellungen in wohl allen Fächern. In der Mathematik hat der sprachliche Aspekt deshalb ein so großes Gewicht, weil der genaue Umgang mit komplizierten Begriffen zu ihrem innersten Wesen gehört und Begriffe in der Sprache durch Worte repräsentiert werden. Worte müssen sich ihrerseits in relativ komplizierten Sätzen zusammenfinden, um sinnvolle mathematische Aussagen zu bilden. Wegen der Strenge mathematischer Begriffe und Beweisführungen folgen diese mathematischen Aussagen besonders markanten Denkgesetzen, welche sich – mehr oder weniger deutlich, aber unvermeidlich – auch in der grammatikalischen Struktur natürlicher Sprachen niederschlagen. Deshalb sind klarer sprachlicher Ausdruck, stilistische Eleganz und Präzision der Gedankenführung sehr eng miteinander verknüpft. (Ich darf Robert Musil, der bekanntlich eine besondere Affinität zur Mathematik hatte und auch seinen *Mann ohne Eigenschaften* Mathematiker sein ließ, als Zeugen hierfür anführen.)

Um diese Zusammenhänge zwischen Mathematik und Sprache zu nutzen, wäre es freilich wünschenswert, im Mathematikunterricht viel mehr Wert zu legen auf die sorgfältige Formulierung mathematischer Sachverhalte und nicht nur aufs doppelte Unterstreichen von Rechenergebnissen.

Wer es nicht aus eigener Erfahrung weiß, wird es kaum für möglich halten, wie schwer den meisten Schülern und Studenten der grammatikalisch wie inhaltlich korrekte Sprachgebrauch fällt, sobald es nicht um alltägliche Mitteilungen geht, sondern um die Beschreibung nur geringfügig komplizierterer oder abstrakterer Sachverhalte. Doch der Lehrer lasse sich von anfänglichen Misserfolgen nicht entmutigen! Sprachkompetenz ist wegen ihrer universellen Wirkung eine der wichtigsten konkreten Fähigkeiten, welche die Schule zu fördern hat. Deshalb darf insbesondere der Mathematikunterricht den sprachlichen Aspekt nicht aus den Augen verlieren.

4.3 Mathematik als wichtige Stimme im Kanon von Kultur und Zivilisation

In Kapitel 2 habe ich an mehreren Beispielen ausgeführt, dass sich viele Wege anbieten, um Schüler mit unterschiedlichen individuellen Neigungen zur Mathematik zu führen. Diese Wege zeigen, wie tief verwoben die Mathematik mit den vielfältigsten Aspekten unserer Zivilisation ist. Sie sind selbst wesentlicher Teil des Gesamtphänomens Mathematik und auch für sich genommen interessant. Entsprechend halte ich sie nicht nur für ein didaktisches Instrument, sondern für einen wesentlichen Inhalt nachhaltigen Mathematikunterrichts. Bildung erweist sich generell weniger in der Quantität des Wissens, sondern in der Einsicht in die Zusammenhänge. Für die Mathematik gilt das in besonderem Maße, weil sie ihrem Wesen nach die universellsten Gesetze und Gestalten unseres Denkens und unserer Anschauung zum Gegenstand hat, die besonders in Verbindungen ihre Wirkung entfalten. Mathematisch gebildet ist, wer hinter vielfältigen Erscheinungsformen und Zusammenhängen der Wirklichkeit mathematische Strukturen wiederzuerkennen vermag. Deshalb verfehlt ein Mathematikunterricht, der auf Anwendungen und Querverbindungen verzichtet, eine seiner wichtigsten Aufgaben und verzichtet überdies auf Veranschaulichungen von mathematischem Kernstoff, die der Förderung der Vorstellungskraft dienen könnten.

4.4 Das Primat von Phantasie und Vorstellungskraft

Oft höre ich Mathematiklehrer aus allen Bereichen des Bildungssystems, insbesondere von den Universitäten darüber klagen, dass es bei ihren Schülern und Studenten an grundlegenden Rechenfertigkeiten fehle und dass diese im vorangegangenen Unterricht zu wenig trainiert worden seien. Dem stimme ich nur sehr eingeschränkt zu. Sehr wohl sind auch mir solche Mängel bekannt. Geht man der Sache auf den Grund, indem man sich ehrliche Rechenschaft darüber ablegt, worin denn mathematische Tätigkeit und Kompetenz besteht, kommt man aber zu ganz anderen Prioritäten. Um meine Gedanken dazu nachvollziehbar zu machen, wähle ich ein möglichst elementares Beispiel.

Kürzlich sprach ich mit einer Bekannten, die selbst kein besonderes Naheverhältnis zur Mathematik hat, über die Beziehung der Mathematik zu anderen Bereichen. Beiläufig erwähnte sie, dass für sie die Zahl 16 sehr eng mit der Zahl 7 in Verbindung stehe. Ich verstand zunächst überhaupt nichts und war einigermaßen verwundert. Darauf begründete sie ihre Assoziation mit der Beziehung $1 + 6 = 7$, die zwar über die dekadische Darstellung auf der Hand liegt, mir jedoch nie in den Sinn gekommen wäre. Abgesehen von ihrer Position in der Zahlenreihe verbinde ich mit der Zahl 16 nämlich eine ganz andersartige, ziemlich feste Assoziation. Und zwar ist für mich die Beziehung $16 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ viel bestimmender. Deshalb steht 16 für mich vor allem mit 2, 4 und vielleicht noch 8 in Verbindung. In meiner Assoziation tauchen kaum Ziffern auf, sondern ein Quadrat der Seitenlänge 4; allerdings eher in Form von vier mal vier gleichförmigen Objekten (von nicht näher spezifizierter Art) denn als ideales Quadrat aus vier Linien der Länge vier. Denn Messen von Längen und Flächen ist etwas anderes als Zählen von einzelnen Objekten, und als natürliche (nicht als reelle) Zahl hat 16 für mich in erster Linie die Bedeutung einer Anzahl.

Um sicher zu gehen, dass nicht meine Assoziation willkürlich ist, fragte ich sechs andere Mathematiker nach ihrer ersten Assoziation mit der Zahl 16. Und alle nannten die Beziehung $16 = 4^2$, manche auch in geometrisch anschaulicher Ausprägung. Eine Erklärung fällt dem Mathematiker nicht schwer:

Vor allem bei großen Zahlen ist die Multiplikation im Allgemeinen viel leichter als die Zerlegung in Faktoren. Deshalb ist eine vorliegende Faktorisierung eine wertvolle Information, die man nicht freiwillig verwischt, sobald man sie einmal in der Hand hat. Also bevorzugt der Mathematiker die Repräsentation großer Zahlen meist als Produkt kleinerer. Hinzu kommt, und das ist mir noch wichtiger, dass für den Mathematiker eine Zahl nicht eine Ziffernkombination (Nummer) ist, sondern eine Bedeutung hat; eine natürliche Zahl stellt vor allem eine Anzahl von Objekten dar, als reelle Zahl (Maßzahl) besitzt sie vor allem eine Position auf der kontinuierlichen Zahlengeraden.

Das Wissen um mathematische Sachverhalte wird in Form möglichst anschaulicher Vorstellungen im Gedächtnis behalten, nur seltener als symbolische Formel. Freilich gibt es da individuelle Unterschiede zwischen verschiedenen Mathematikern. (Auch Formeln können ein anschauliches Eigenleben entwickeln, das in der Vorstellung eine wichtige Rolle spielt; die generelle Tendenz ist aber eindeutig.) Wie aber gehen Mathematiker mit ihren teils extrem abstrakten Objekten um, von denen man oft sogar beweisen kann, dass sie z.B. keinen Platz im dreidimensionalen Raum unserer Erfahrung und Anschauung haben oder in einem noch viel extremeren Sinne unser Vorstellungsvermögen sprengen?

Die Antwort ist ein einziges Aufbegehren: Mathematiker machen sich dennoch ein Bild von ihren Göttern! Genauer gesagt handelt es sich nicht immer um ein Bild im engeren Sinne, sondern um eine komplizierte Hierarchie verschiedener meist bildhafter Vorstellungen, die jeweils gewisse Aspekte eines abstrakten Objektes wiedergeben und deren komplexes Zusammenwirken durch eine Art Metavorstellung im Bewusstsein präsent gehalten wird. Die mentale Konstruktion dieser Vorstellungen geht mit der Entwicklung der für die mathematische Arbeit unerlässlichen Intuition einher und stellt einen langen und mühsamen Prozess dar, den ich als Kern mathematisch kreativer Tätigkeit betrachte. Sind die Vorstellungen aber erst einmal hinreichend klar ausgeprägt, erweist sich der logisch korrekte Umgang mit ihnen als vergleichsweise trivial. Routinemäßiges Abrufen des methodischen Handwerkszeugs reicht dafür meist aus. Deshalb vertrete ich die Überzeugung, dass sich herausragende Mathematiker weniger durch außergewöhnliche logische Virtuosität auszeichnen als durch eine besonders ausgeprägte Phantasie.

Bezeichnend dafür ist die Anekdote, wonach sich der große Mathematiker David Hilbert (1862-1943) nach einem ehemaligen Studenten erkundigte, den er aus den Augen verloren hatte. Er habe sich von der Mathematik abgewendet und sei als Journalist und Schriftsteller tätig, lautete die Antwort. Dazu meinte Hilbert: “Das ist gut so, denn für die Mathematik fehlte es ihm doch an Phantasie.”

Wenn auch der Grad der Komplexität im Schulunterricht nicht vergleichbar ist mit Hilberts Mathematik, so geht es qualitativ doch auf allen Ebenen um dasselbe, nämlich die Entwicklung von Phantasie und Vorstellungsvermögen.

Ich erinnere mich an meine ersten Schuljahre. Damals gab es im Unterricht oft kleine Tourniere, wo im k.o.-Verfahren der sogenannte Rechenkönig ermittelt wurde. Wer schneller das Ergebnis einer einfachen Rechenaufgabe wusste, war in der nächsten Runde. Die Sieger verdankten ihren Erfolg nicht so sehr einer höheren Geschwindigkeit, mit der sie das Ein-mal-Eins aus dem Gedächtnis abriefen, sondern dem Umstand, dass sie mit Zahlen, Additionen und Multiplikationen Vorstellungen verbanden, die für Kopfrechnungen offenbar tragfähigere Dienste leisten als automatisierte Fertigkeiten.

Mit fortschreitendem Alter geht es natürlich um mehr als nur um schnelles und fehlerfreies Kopfrechnen. (Ich äußere sogar den Verdacht, dass außergewöhnliche Fähigkeiten in so isolierten Fertigkeiten mit einer Zurückgebliebenheit anderer Fähigkeiten kausal verknüpft sein können, etwa des Vermögens, zwischen wichtig und unwichtig zu unterscheiden.) Die Vorstellungen, die es zu entwickeln gilt, müssen mit der Komplexität der Aufgaben mitwachsen. Eine diesbezügliche Bildung gibt nicht nur nützliche Instrumente in die Hand, um konkrete Probleme wie Rechenaufgaben zu lösen. Ein reiches Arsenal an klaren Vorstellungen hilft vor allem bei der Wiedererkennung von Mustern und ermöglicht deshalb in vielen Situationen eine raschere Orientierung und einen schärferen Blick auf das Wesentliche an einer Konstellation. Diese Fähigkeit ist auch denen, die sie besitzen, nicht immer bewusst und wird in ihrem Wert oft unterschätzt. Sie scheint mir aber eine wichtige Komponente dessen zu sein, was man Intelligenz nennt.

Weit über den Aspekt der Nützlichkeit hinaus stellt ein lebendiger Vorrat an Vorstellungen ganz allgemein eine dauerhafte Bereicherung dar; ähnlich wie jemand, in dessen Leben Literatur, Musik oder Bildende Kunst eine Rolle spielen, sich dadurch innerlich reicher fühlt. Entsprechend sehe ich in der Förderung der Phantasie den vornehmsten und nachhaltigsten Wert mathematischer Bildung – deshalb auch der Titel dieses Artikels. Sie ist sogar allen anderen Zielen übergeordnet: Nur wer ein entwickeltes Vorstellungsvermögen hat, verfügt über Material, anhand dessen er die vielen Facetten der Mathematik im kulturellen und zivilisatorischen Kontext würdigen und sowohl Sprache wie Logik schärfen kann.

5 Missstände, Verbesserungsvorschläge

5.1 Welche Defizite fallen auf?

Niemanden wird es überraschen, dass meine Prioritäten bei mathematischen Bildungszielen, wie ich sie in Kapitel 4 formuliert habe, geprägt sind von meinen Erfahrungen, welche Art von Defiziten besonders häufig und schmerzhaft auftreten, und zwar hinsichtlich aller vier Ziele: Haarsträubende logische Fehler und Verdrehungen in öffentlichen Diskussionen, mitleiderregende Probleme beim Versuch, einfache Sachverhalte zu formulieren, völlig falsche Einschätzungen des Wesens der Mathematik und ihrer Rolle in unserer Zivilisation sowie eine unterentwickelte Vorstellungskraft.

Vor allem der letzte dieser Punkte verdient eine genauere Erläuterung. Ich hebe ihn deshalb so deutlich hervor, weil er mir selber erst in der intensiven Auseinandersetzung mit jenen Studenten klar geworden ist, deren Scheitern beim Verstehenwollen schon relativ einfacher mathematischer Sachverhalte ein besonders hartnäckiges ist. Auf den ersten Blick ist man als Lehrer nämlich verleitet zu glauben, dass eine Erklärung deshalb noch nicht überzeugt habe, weil die logischen Schlussweisen zu kompliziert gewesen wären. Jedem Mathematiker wird aber das Erlebnis vertraut sein, dass man einer Beweisführung zwar Schritt für Schritt folgen kann, dass aber dennoch ein Gefühl der Unsicherheit zurückbleibt, weil sich noch keine Intuition und bildhafte Vorstellung von der Kernidee verfestigt hat. An einer solchen Vorstellung pflegt man sich auch zu orientieren, wenn man einen mathematischen Zusammenhang, den man schon einmal verstanden hat, rekonstruiert. Dieser Prozess unterscheidet sich kaum von der Repräsentation von Wissen über andere Bereiche im Bewusstsein. Das linear Geordnete und Prozesshafte von Rechenabläufen, wie sie den Unterricht zu oft dominieren, verschleiert, dass die großräumige Orientierung in der Mathematik genauso bildhafte Vorstellungen zu Hilfe nimmt, wie die Orientierung im Gelände: Wer eine Vorstellung von der geometrischen Lage wichtiger Punkte zueinander hat, erspart sich die Beanspruchung des Gedächtnisses mit komplizierten Anweisungen über eine Route im Detail, weil sich die Einzelinformationen weitgehend von selbst aus den geometrischen Beziehungen ergeben.

Dem Hochschullehrer (und insbesondere dem in die Lehrerausbildung involvierten) bietet sich der Eindruck, dass die ausgeprägtesten mathematischen Schwächen in einem Defizit an jener Phantasie begründet sind, welche den erfolgreichen Mathematiker befähigt, Veranschaulichungen auch für abstrakte Zusammenhänge zu konstruieren und vor seinem inneren Auge wachzurufen. Erst wenn er diese Veranschaulichungen vergegenwärtigt hat, formuliert er Aussagen und Beweise in einer unmittelbar kommunizierbaren Weise. Dass wir an den Hochschulen gerade in der Lehrerausbildung (mehr als in anderen Studienrichtungen!) besonders häufig damit konfrontiert sind, dass das Scheitern bereits im Nichtvorhandensein brauchbarer Vorstellungen begründet liegt, gibt zu denken. Der Studententyp, der sich von der Mathematik fälschlicherweise eine Sammlung von Rechenprozeduren erhofft, die linear abgearbeitet und ebenso an die Schüler weitergegeben werden, ist dort besonders häufig. Man kommt nicht an der Vermutung vorbei, dass – mehr noch als Mathematik generell – Schulmathematik unter diesem karikaturhaften Image leidet.

Einen Hauptfehler sehe ich darin, dass im Unterricht nicht konsequent zwischen mathematischem Objekt und dem Symbol dafür unterschieden wird. Um genauer zu sein: Die eigentlichen mathematischen Objekte werden oft geradezu verheimlicht; entweder in der zumeist trügerischen Hoffnung, dass Schüler mit den Symbolen automatisch adäquate Vorstellungen verbinden, oder – noch schlimmer – aus dem Missverständnis heraus, Mathematik sei nichts als Manipulation von Symbolen. Als sehr einfaches und elementares Beispiel dazu rufe ich in Erinnerung, was ich an früherer Stelle über die Zahl 16 gesagt habe. Sie ist nämlich keineswegs identisch mit der Folge der Ziffern 1 und 6, sondern bezeichnet eine Anzahl, die man sich auf unterschiedliche Weise veranschaulichen kann. Auf einer etwas fortgeschritteneren Stufe werden das Umformen von Termen oder das Lösen von Gleichungen oft zum Selbstzweck, anstatt darin lediglich ein technisch sehr ausgereiftes und wertvolles Hilfsmittel zu sehen, um Information (z.B. über geometrische Objekte) in eine Form zu transformieren, in der sie besser handhabbar wird. In meinem Artikel [7] bin ich auf diesen Aspekt anhand weiterer Beispiele eingegangen. Für eine ausführliche Darstellung aus Sicht der wissenschaftlichen Fachdidaktik verweise ich auf [4].

Ein anderes Beispiel (Verzinsung von Sparguthaben) für defizitäre mathematische Bildung habe ich bereits in Abschnitt 2.7 angerissen und in meinem Artikel [6] zum Ausgangspunkt genommen. Aber die Beispiele für nicht nachhaltigen Mathematikunterricht sind Legion. Ein paar Schlagworte, die sich an den Themen aus Kapitel 2 orientieren:

Pseudoanwendungen statt Beispiele, die echtes Verständnis für naturwissenschaftliche oder ökonomische Zusammenhänge vertiefen; schematisches Ausfüllen von Wahrheitstabellen statt Behandlung real auftretender logischer Schlussweisen; auswendig gelernte Merksätze statt aktiver

Arbeit an sinnvollen Formulierungen mathematischer Sachverhalte; formales Rechnen statt inhaltliches Argumentieren; Imitation des Computers (in Form automatisierbarer Rechenabläufe) statt vernünftigen Einsatzes desselben als Instrument; Dressur gewisser Tastenkombinationen als Unterordnung des Menschen unter die Gegebenheiten der Maschine statt Vermittlung eines Einblicks in die faszinierende Logik ihrer Grundkonzeption; infantile Anwendung der Sprache der Mengenlehre (scheint zur Zeit aus der Mode gekommen zu sein) statt Behandlung des Unendlichen als ihres faszinierenden thematischen Kerns; Reduktion der präzisen mathematischen Sprache zu einem unverständlichen formalistischen Ungetüm; Unterdrückung freier (und möglicherweise noch ungeschliffener) Assoziationen und künstlerischer Aspekte der Mathematik zugunsten engstirniger und engherziger formaler Vorgaben, die mehr an soldatischen Drill erinnern als an geistige Entfaltung; Ausklammerung historischer Aspekte zugunsten einer sterilen Darstellung der Mathematik als eines rigiden, fest vorgegebenen und unveränderlichen Kanons; Aufgaben als Routine (weil engen, vorgegebenen Bahnen folgend) statt als Herausforderung.

Freilich ließe sich diese an sich schon lange Aufzählung fast beliebig fortsetzen. Statt dessen will ich als gemeinsamen Kern die strikte Ungleichungskette

$$\text{Fertigkeit} < \text{Wissen} < \text{Vorstellungsvermögen}$$

herausstellen. In Extremfällen von misslungenem Mathematikunterricht wird auf keiner dieser drei Stufen Nachhaltigkeit erreicht. Mittelmäßiger Unterricht vermag meist einige wenige Fertigkeiten zu vermitteln, die aber ohne Hintergrundwissen dumpf und stumpf bleiben, und daher insbesondere von kritischen Schülern meist sehr schnell wieder als sinnlos eingestuft und vergessen werden. Lehrer jedoch, denen es gelingt, mathematisches Wissen, das sich nicht auf Fertigkeiten reduzieren lässt, zu vermitteln, haben schon einiges erreicht. Wenn sich dieses Wissen ihrer Schüler sogar lang über die Schule hinaus als nachhaltig erweist, liegt es vermutlich daran, dass es sich auf wichtige Vorstellungen stützen kann, wie sie typischerweise zeitlebens verfügbar bleiben. Solche Vorstellungen erweisen sich als wertvoll und hilfreich auch außerhalb der Mathematik im engeren Sinn. Deshalb werden sie immer wieder in Erinnerung gerufen, erneuert und sogar weiterentwickelt. Wissen ohne begleitende Vorstellungen dagegen wird schnell vom Rest des Bewusstseins isoliert, wodurch es verkümmert, bis zum Skelett abmagert und schließlich zurückbleibt wie verstreute Knochen; ohne Nährwert und ohne Interesse für irgendwen. Mit bloßen Fertigkeiten ohne Hintergrundwissen verhält es sich noch schlimmer: Schon nach kürzester Zeit werden die Knochen zu geistigem Flugsand zerrieben, der in alle Winde verweht wird und an den bald nichts mehr erinnert.

5.2 Wie fördert man das Vorstellungsvermögen?

Der Lehrer steht vor der wahrhaft schwierigen aber gleichzeitig äußerst reizvollen Aufgabe, sich gleichsam in die Köpfe der Schüler und Studenten einzuschleichen und ihnen bei der Entwicklung von Vorstellungen zu helfen. Gewonnen hat er, wenn er selbst möglichst viele Vorstellungen anbieten und vermitteln kann, sowohl innermathematische als auch in Verbindung mit außermathematischen Inhalten. Das bedeutet vor allem eine hohe Fachkompetenz, die sich weniger im Umfang seines Wissens zeigt als in der Flexibilität, unterschiedliche Blickwinkel auf ein und dieselbe Sache einzunehmen. Sodann ist kommunikatives Geschick gefragt und Sensibilität, welche der verfügbaren Vorstellungen einem bestimmten Schüler individuell am nächsten liegen und als erster Strohhalm dienen können, an dem er sich möglichst eigenständig zu einem umfassenderen Verständnis vortasten kann. Das gilt insbesondere für die Entwicklung von Intuitionen für abstrakte Zusammenhänge, wo keine mehr oder weniger offensichtliche geometrische Anschauung auf der Hand liegt.

Erweist sich keine der im Repertoire des Lehrers verfügbaren Vorstellungen als tragfähig für den Schüler, so ist auch eine Eselsbrücke besser als gar keine Brücke. Ich denke dabei etwa an außermathematische und anekdotische Gedächtnisstützen, welche den Schülern die Scheu vor neuartigen mathematischen Gebilden nehmen sollen. Wenn es damit gelingt, Schüler zum mathematischen Anpacken zu bringen, soll der Zweck die Mittel heiligen; auch wenn die Eselsbrücke a posteriori wieder abgerissen werden muss, damit sich keine faulen Übergänge verfestigen. Als wünschenswerte Qualitäten von Lehrern sind also auch spontaner Einfallsreichtum und Improvisationsgabe sehr gefragt.

Ich habe bereits betont, dass jedes (mathematische) Symbol auf ein dadurch bezeichnetes Objekt verweist. Das Symbol hat also die Aufgabe, hinzuweisen und nicht zu verbergen, was aber gerade bei allzu formalistisch betriebenem Mathematikunterricht leicht geschieht. Meine (durchaus auch an mich selbst gerichtete) Empfehlung lautet deshalb, im Unterricht den Dialog zu pflegen und dabei permanent darauf zu achten, dass Schüler und Studenten noch wissen, worauf sich die immer komplizierter werdenenden Formeln und Rechnungen beziehen. Sollte sich die Symbolik verselbständigt und vom Boden mathematischer Realitäten abgehoben haben, ist eine Notlandung dem Abdriften ins Vakuum vorzuziehen. (Für ausführliche Beispiele verweise ich nochmals auf [7].)

Ein sehr sinnvoller Typ von Aufgaben besteht darin, vorgegebene mathematische Sachverhalte umzuformulieren und mit eigenen Worten neu zu fassen. Anfangs wird diese Aufgabe den Schülern auch dann schwer genug fallen, wenn es sich dabei um kaum mehr als tautologische Umformungen handelt ohne nennenswerte mathematische Überlegungen. Solche Aufgaben sind sowohl der Festigung mathematischer Vorstellungen (je klarer die Vorstellung desto leichter fällt die Umformulierung) als auch dem sprachlichen Bildungsauftrag der Mathematik (siehe Kapitel 4) verpflichtet. Überdies dienen sie der Emanzipation des logischen Schließens von formalistischer Ödnis.

5.3 Prüfungswesen

Eines der wichtigsten Instrumente für die Erzeugung von Nachhaltigkeit sind sinnvolle Prüfungen. Denn Prüfungen haben nicht den kurzfristigen Sinn, Schüler wie Lehrer=Prüfer durch einen formalen Erfolg zufriedenzustellen, sondern sie sollen helfen festzustellen, ob die Kandidaten das können, was man ihnen ursprünglich vermitteln wollte. Noch wichtiger aber ist es, dass sie durch kluge Gestaltung dem Schüler einen Anreiz geben, in der Vorbereitung nachhaltig zu lernen. Nebenbei will ich noch einen weiteren, wenn auch zugegebenermaßen nachgeordneten, so doch wichtigen Zweck von Prüfungen erwähnen: Der Lehrer soll ermessen können, ob der Unterricht fruchtbar war, oder ob über Verbesserungen nachzudenken ist. (Auch Lehrer stehen bei Prüfungen auf dem Prüfstand!) Dies kann – auch das meine eigene Erfahrung – insbesondere dann schmerzhaft sein, wenn man versucht, nachhaltige Kompetenzen zu prüfen. Eine erwartete höhere Punkteausbeute der Schüler bei leicht trainierbaren Prüfungsaufgaben darf aber nicht dazu verleiten, statt relevanter Fähigkeiten lediglich sinnarme Rechenabläufe zu testen. Besonders bei schriftlichen Prüfungen ist das Zusammenstellen aussagekräftiger Aufgaben eine aufwendige Arbeit, die dem Prüfer einige Phantasie und viel Zeit abverlangt. Ich halte die Praxis des Prüfungswesen aber für so entscheidend für die Nachhaltigkeit, dass das Argument, der Aufwand sei zu groß, nicht greifen darf. Ich weiß, dass ich hier Tugenden einmahne, die im momentanen System, an Schule wie an Universität, völlig unbedankt sind. Prüfer handeln sich durch sinnvolle, gemessen an herrschenden Traditionen aber unkonventionelle Prüfungsformen mehr Konflikte ein als Dank für wertvolle Innovationen. Ich hoffe aber darauf, dass ich, indem ich auf das Thema aufmerksam mache, ein Problembewusstsein befördere, das nach und nach breitere Kreise zieht. Mit meinen Anliegen stehe ich nicht alleine da. Vor einigen Jahren gab es zum Beispiel in Amerika eine intensive Diskussion im Zusammenhang mit mathematischer Grundausbildung in der Eingangsphase des Studiums. Als Beispiele dazu verweise ich auf die einander teilweise auch widersprechenden Artikel [5], [8] und [3].

Ein wichtiger Schritt zur Verbesserung des Prüfungswesens scheint mir eine stärkere Gewichtung mündlicher Leistungen, vor allem in der Schule, wo die Gesamtnote sich traditionell fast ausschließlich aus den Schularbeiten ergibt. Viele entscheidende Kompetenzen, vor allem was Hintergrundverständnis betrifft, lassen sich mündlich viel besser überprüfen.

Schließlich hätte eine wenigstens partielle Trennung der Funktionen von Lehrer und Prüfer Vorteile, weshalb sie in vielen Ländern schon üblich ist. Voraussetzung ist freilich, dass die Prüfer sehr sorgfältig und nach strengen fachlichen Kriterien ausgewählt werden. Ihre Aufgabe soll es keineswegs sein, strengere Prüfungen zu stellen, sondern sinnvollere. Lehrer müssten sich dann notgedrungen um einen entsprechenden Unterricht bemühen. Gelingen wird ihnen das, wenn sie neben pädagogischem Geschick vor allem solide fachliche Qualifikationen im Sinne der in diesem Artikel beschriebenen Kriterien mitbringen. Und das wiederum wird langfristig gewährleistet sein, wenn die Gesellschaft anerkennt, dass der Lehrerberuf einer der wichtigsten ist, wenn nicht gar der wichtigste. Kaum eine andere Berufsgruppe hat eine derart große Chance, die Zukunft vieler Menschen nachhaltig positiv zu beeinflussen. Herrscht einmal Konsens über diese herausragende Rolle der Lehrer, wird es sich die Gesellschaft mehr Geld kosten lassen, in ihr Bildungswesen zu investieren und die allerbesten Kräfte dafür anzulocken.

Mitbürger, gebt dem Lehrerberuf sein wohlverdientes hohes Ansehen zurück!

Literatur

[1] R. Courant und H. Robbins, *Was ist Mathematik?*, Fünfte, unveränderte Auflage, Springer-Verlag Berlin – Heidelberg – New York (2001).

[2] H. M. Enzensberger *Zugbrücke außer Betrieb. Die Mathematik im Jenseits der Kultur. Eine Außenansicht von Hans Magnus Enzensberger*, im Internet verfügbar z.B. unter: http://www.mathe.tu-freiberg.de/ hebisch/cafe/zugbruecke.html/

[3] D. Klein and J. Rosen, *Calculus Reform – For the $ Millions*, Notices of the AMS, 44.10, 1324-1325, November 1997.

[4] G. Malle, *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*, Vieweg, Wiesbaden (1993).

[5] D. Mumford, *Calculus Reform – For the Millions*, Notices of the AMS, 44.5, 559-563, May 1997.

[6] R. Winkler, *Von Nutzen, Wert und Wesen mathematischer Bildung.* In: Bildung zwischen Nutzen und Notwendigkeit, Lit-Verlag Münster – Berlin – Hamburg – London – Wien (2006). Auch unter http://www.dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/ verfügbar.

[7] R. Winkler, *Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht*, erscheint in den Didaktikheften der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Auch unter http://www.dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/ verfügbar.

[8] J. A. Yorke, *Efficient Methods for Covering Material and Keys to Infinity*, Notices of the AMS, 44.6, 685-687, June/July 1997.