Der Grenzwert – Zentralbegriff der Analysis (Druckversion)

REINHARD WINKLER (TU WIEN)

Der Begriff des Grenzwertes ist zentral in der Analysis und einer der wichtigsten der Mathematik überhaupt. Nicht nur an sich ist eine sorgfältige Behandlung dieses Begriffs im Unterricht wünschenswert, sie macht auch beträchtliche Teile der obligatorischen Analysis viel verständlicher. Analogien zwischen verschiedenen Ausprägungen des Grenzwertes (Folgen, Reihen, Funktionen und Stetigkeit, Ableitung, Integral) erleichtern es, über einen nur vagen „intuitiven Grenzwertbegriff" hinauszukommen und zu einem präzisen Begriff vorzudringen. Dabei wird klar, wie die fünf genannten Stoffkapitel auf einer einzigen gemeinsamen Grundidee fußen. Wie gleichfalls im vorliegenden Artikel gezeigt werden soll, lässt sich damit der Lehrstoff zur Analysis viel besser überschauen.

1. Einleitung

Der rote Faden im vorliegenden Artikel ist der für die Analysis zentrale und darüber hinaus in die gesamte Mathematik ausstrahlende Begriff des Grenzwertes in fünf für den Schulstoff wichtigen Ausprägungen: Folgen, Reihen, Funktionen samt Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung. An jedes dieser Themen schließen sich bestimmte Inhalte als Minimalprogramm an, ohne die ein adäquates Verständnis der Grundideen der Analysis unmöglich ist. Hier sollen die Grundbegriffe erarbeitet und ein solches Minimalprogramm präsentiert werden.

Da diese Inhalte den vorgegebenen Rahmen mehr als ausfüllen, muss die Darstellung sehr knapp gehalten werden. So gibt es keine Abbildungen, auch wenn mit ihnen die meisten der im Text verbal formulierten Ideen noch überzeugender dargestellt werden könnten. Ähnliches gilt für die äußerst interessanten historischen Bezüge. Auch Beweise fehlen im Haupttext. Sie sind in einen Anhang ausgelagert, der allerdings nur in der Langversion des Artikels enthalten ist, nicht jedoch in der kürzeren gedruckten Fassung. Das durch den Text vermittelte Minimalprogramm zur Analysis (ergänzt durch gelegentliche Verweise auf andere Artikel) ist inhaltlich zu verstehen und nicht als Anweisung für die konkrete Unterrichtsgestaltung. Folglich richtet sich der vorliegende Text an Lehrende und nicht direkt an Schüler. Ziel ist es, Hintergründe und Zusammenhänge herauszuarbeiten, die den Lehrenden jederzeit bewusst und im Unterricht (vor allem, aber nicht nur) für die zehnte bis zwölfte Schulstufe als Leitgedanken wirksam sein sollten.

Den mathematischen Inhalten sei lediglich die folgende pauschale Empfehlung für den Unterricht vorangestellt: Mathematisches Tun strebt nach klaren Begriffen und strengen Beweisen von interessanten Aussagen über diese Begriffe. Heuristische, anschauliche und intuitive Motivationen sollen also möglichst in klare Definitionen und Beweise münden, Ausnahmen brauchen gute Begründungen. Dabei kommt es nicht auf Formalisierung an, sondern auf Schlüssigkeit der Gedanken. Der Aufbau des vorliegenden Artikels versucht diese Schlüssigkeit zu gewährleisten, auch wenn das oft erst in den Beweisen (siehe Anhang der Langversion) deutlich wird. Fast allen Beweisen liegen sehr griffige, oft bildhafte Ideen zugrunde, die es lohnen, in adäquater Form in den Unterricht übersetzt zu werden. Wie genau in einer konkreten Klasse der Unterricht im Einzelnen zu gestalten ist, kann und soll durch einen Artikel wie den vorliegenden der Verantwortung der Lehrerin oder des Lehrers aber nicht entzogen werden.

Es folgen nun fünf thematischen Hauptteile (Kapitel 2 bis 6) und ein Resümee als Kapitel 7. Die Langversion Winkler (2018/19) enthält überdies noch einen Anhang mit Beweisen als letztes Kapitel.

2. Folgen

Das Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte. Im ersten (2.1) werden die Definitionen von Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz und Häufungspunkten von Folgen erarbeitet. Abschnitt 2.2 bringt typische Beispiele und die wichtigsten allgemeinen Beziehungen zwischen diesen Begriffen. Den Abschluss des

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 51, 2018/19, ??-?? S. 1–15
Version vom 19.10.2018

Kapitels bilden in 2.3 die Grenzwertsätze für Summe, Produkt etc. konvergenter Folgen mit Anwendung auf gebrochen rationale Folgen sowie das besonders wichtige Beispiel der geometrischen Folge.

2.1. Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert, Häufungspunkt

Wir wollen diese Begriffe präzise fassen. Das ist nicht völlig trivial. Auch historisch war es ein langer Prozess, bis sich gewisse Definitionen als adäquat herauskristallisierten. Das lag weniger an der Kompliziertheit der Begriffe, als an der sich erst nach und nach etablierenden Einsicht, dass es gewisse logische Strukturen sind, die taugliche und unverzichtbare Grundlagen für das mächtige Lehrgebäude der modernen Mathematik auszeichnen. Heutzutage stehen wir Zwerge auf den Schultern eines Riesen, nämlich des Kollektivs der größten Mathematiker vergangener Epochen, und genießen einen bequemen Blick auf eine übersichtliche Landschaft, auf den zu verzichten es keinen Grund gibt und den wir uns nun gönnen wollen.

Als Einstieg soll anhand von drei sehr einfachen, aber typischen Beispielen eine Intuition für die vier Begriffe geschaffen werden. Exemplarisch betrachten wir die drei Folgen[1] $\mathbf{a} = (a_n)_n$, $\mathbf{b} = (b_n)_n$ und $\mathbf{c} = (c_n)_n$ mit den Gliedern $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ und $c_n = n$. Von diesen Folgen sind sind **a** und **c** *monoton* (sogar streng monoton, **a** fallend und **c** wachsend), weil die Glieder immer kleiner bzw. immer größer werden, was für **b** nicht der Fall ist. Die Folgen **a** und **b** sind *beschränkt*, weil ihre Glieder (im Gegensatz zu den c_n) betragsmäßig nicht beliebig groß werden. *Konvergent* ist nur **a**, weil sich die a_n einem sogenannten Grenzwert α (im Beispiel $\alpha = 0$, man spricht von einer *Nullfolge*) beliebig annähern, während es für **b** und **c** kein solches α gibt. Die Folge **b** hat aber immerhin *Häufungspunkte* (und zwar zwei, nämlich 1 und -1), denen sich die Folge gleichfalls beliebig annähert – wenn auch nicht ausnahmslos für alle n, so doch jeweils unendlich oft. Nun zur Präzisierung dieser noch etwas ungenauen Beschreibungen.

Jeder der vier Begriffe ist mit einer Ungleichung verknüpft: (wachsende) Monotonie mit $a_n \leq a_{n+1}$, Beschränktheit mit $|a_n| \leq S$ (S steht für „Schranke"), Konvergenz gegen α und Häufungspunkt α mit $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ ist dabei als klein zu denken). Zwei Fragen tauchen auf: Welche Rollen spielen erstens die in diesen Formeln auftretenden Parameter n, S und ε, und worin genau besteht zweitens der Unterschied zwischen Grenzwert und Häufungspunkt, wenn dieselbe Ungleichung für beide zuständig ist? Die Antworten auf beide Fragen sind ähnlich und typisch für die gesamte Mathematik. Und zwar müssen die Parameter auf eine ganz bestimmte Weise spezifiziert werden, die mit Hilfe der beiden logischen *Quantoren*, dem *Allquantor* $\forall$ und dem *Existenzquantor* $\exists$, formalisiert werden kann. Das soll nun geschehen.

Beginnen wir mit dem einfachsten, offensichtlichen Fall, der (wachsenden) Monotonie: Auf die Frage, für welche n die Ungleichung $a_n \leq a_{n+1}$ gelten soll, lautet die Antwort schlicht *für alle* Indizes, als Formel: $\forall n: \ a_n \leq a_{n+1}$.

Auch für die Beschränktheit soll die entsprechende Ungleichung $|a_n| \leq S$ für alle n gelten. Was aber ist S? Offenbar können wir nicht ein beliebiges $S \in \mathbb{R}$ nehmen; das wäre zu viel verlangt. Uns genügt es, wenn irgendein S das leistet, wenn es also (irgend)ein geeignetes $S \in \mathbb{R}$ gibt, als Formel: $\exists S\, \forall n: \ |a_n| \leq S$. Um den Begriff zu exaktifizieren, sind also bereits zwei (unterschiedliche) Quantoren notwendig.[2]

[1] Zur Wiederholung: Eine Folge ist eine Abbildung (Synonym: Funktion) $n \mapsto a_n$ mit Definitionsbereich $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (oder einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{N}$, oft ist $D = \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$). Liegen die sogenannten *Glieder* a_n der Folge in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, so sprechen wir von einer reellen Folge. Wir wollen uns hier auf reelle Folgen beschränken. Sind die Glieder a_n der Folge $\mathbf{a}: D \to \mathbb{R}$ durch einen Funktionsterm gegeben und ist sonst nichts vermerkt, so nehmen wir als Definitionsbereich D die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die dieser Term definiert ist, z.B. $D = \mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$ für $a_n = \frac{1}{n}$. Wir schreiben auch $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in D}$ oder kürzer $\mathbf{a} = (a_n)_n$.

[2] Man kann sich fragen, ob eine geschicktere Definition von Beschränktheit möglich wäre, die mit nur einem Quantor auskommt. Das ist aber nicht der Fall. Denn Beschränktheit kann weder bestätigt noch widerlegt werden, solange man nur endlich viele Glieder der Folge kennt. Jede reine Allaussage (wie etwa Monotonie) kann aber durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt, jede reine Existenzaussage durch ein einziges positives Beispiel bewiesen werden. Mit mehr Aufwand ließe sich auch für die anschließende Definition des Grenzwertes zeigen, dass die Anzahl der logischen Quantoren (nämlich drei) nicht reduziert werden kann.

Für den Grenzwert wird die Aufgabe etwas komplizierter. Wenn wir sie lösen (es wird nur wenige Zeilen brauchen) werden wir aber den entscheidenden Schritt ins Zentrum der Analysis geschafft haben: In der Ungleichung $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ist α fest vorgegeben und verlangt deshalb keinen Quantor. Der Folgenindex n ist wieder mit einem „für alle" zu versehen, allerdings mit Einschränkungen. Denn für $a_n = \frac{1}{n}$ und $\varepsilon = \frac{1}{10}$ beispielsweise stört es uns nicht, dass die Ungleichung erst ab dem Folgenindex $n = 11$ gilt und für noch kleinere $\varepsilon > 0$ erst entsprechend später. Entscheidend ist, dass die Ungleichung *für alle n ab einem geeigneten* n_0 gilt. (Man sagt auch *für fast alle n*, wenn man *für alle bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen* meint.) Als Formel: $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$, was ausführlicher $\exists n_0\ \forall n :\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$ bedeutet. Unbestimmt (man sagt in diesem Zusammenhang *nicht durch Quantoren gebunden*) ist in dieser Formel aber noch das ε. Entscheidend für den Grenzwertbegriff ist, dass die Formel *für alle* $\varepsilon > 0$ gelten soll, also $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 :\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$. Verbal: Zu jedem positiven reellen ε gibt es einen Index n_0, ab dem alle Folgenglieder sich vom Grenzwert um weniger als ε unterscheiden. Nennt man die Abweichung der Folgenglieder vom Grenzwert „Fehler", so kann man auch formulieren: *Jede beliebige vorgegebene Fehlerschranke wird garantiert eingehalten, sofern nur der Folgenindex hinreichend groß ist*. Auf das hier auftretende Wortpaar *beliebig – hinreichend* werden wir uns noch des öfteren beziehen. Damit ist der entscheidende Schritt bereits geschafft, und es hat gar nicht wehgetan!

Darüber hinaus steht noch die Unterscheidung zwischen Grenzwert und Häufungspunkt auf unserem Programm. Zur Illustration ziehen wir nochmals die Folgen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ mit den Gliedern $a_n = \frac{1}{n}$ bzw. $b_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ heran. Der entscheidende Unterschied zwischen den Ungleichungen $|a_n - 0| < \varepsilon$ bzw. $|b_n - 1| < \varepsilon$ und $|b_n - (-1)| < \varepsilon$ besteht darin, dass (sofern $\varepsilon < 2$) nur für erstere ein n_0 existiert, so dass die Ungleichung wirklich *für alle* $n \geq n_0$ gilt. Für die zweite und dritte treten nur immer wieder solche n (d.h. unendlich viele) auf, also zu jedem n_0 ein $n \geq n_0$, das die Ungleichung erfüllt. Formal wird das durch unterschiedliche Setzung der Quantoren sichtbar: $\exists n_0\ \forall n \geq n_0$ für den Grenzwert und $\forall n_0\ \exists n \geq n_0$ für den Häufungspunkt. Ein Häufungspunkt α einer Folge mit den Gliedern a_n ist also durch die Formel $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0 :\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$ charakterisiert. Formal lauten die Definitionen demnach:

Definition 2.1 *Sei* $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge.*

1. *Die Folge* $\mathbf{a}$ *heißt* monoton wachsend, *wenn*

$$\forall n :\ a_n \leq a_{n+1}$$

gilt. Ersetzt man in dieser Formel das Symbol $\leq$ *durch* $<$, *so heißt die Folge* streng monoton wachsend, *analog* monoton fallend *bei* $\geq$ *und* streng monoton fallend *bei* $>$. *Eine Folge heißt* monoton, *wenn sie eine dieser vier Eigenschaften hat.*

2. *Die Folge* $\mathbf{a} = (a_n)_n$ *heißt* beschränkt,[3] *wenn gilt:*

$$\exists S\ \forall n :\ |a_n| \leq S$$

3. *Eine Folge* $\mathbf{a} = (a_n)_n$ *heißt* konvergent, *wenn sie einen* Grenzwert *oder auch* Limes $\alpha \in \mathbb{R}$ *hat (man sagt auch: sie* konvergiert gegen α, *symbolisch* $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ *oder* $a_n \to \alpha$ *für* $n \to \infty$*), was definitionsgemäß*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \forall n \geq n_0 :\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

bedeutet. Konvergiert die Folge nicht, so heißt sie divergent.

4. *Die Zahl* $\alpha \in \mathbb{R}$ *heißt* Häufungspunkt *der Folge* $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0 :\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

[3] Gelegentlich verwenden wir auch die Begriffe *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*, die durch die Formeln $\exists S\ \forall n :\ a_n \leq S$ bzw. $\exists S\ \forall n :\ a_n \geq S$ beschrieben werden.

2.2. Beziehungen zwischen diesen Begriffen und weitere Beispiele

Die wichtigsten Beziehungen zwischen den Begriffen aus Abschnitt 2.1 sind im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 1 *(***Eigenschaften von Folgen***)*

1. *Jeder Grenzwert einer Folge ist Häufungspunkt dieser Folge.*
2. *Eine Folge mit mehr als einem Häufungspunkt ist divergent.*
3. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*
4. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
5. *Jede Folge, die monoton und beschränkt ist, konvergiert.*
6. *Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungspunkt. (Satz von Bolzano Weierstraß 1)*
7. *Zu jedem Häufungspunkt einer Folge gibt es eine Teilfolge, die gegen diesen Häufungspunkt konvergiert. (Satz von Bolzano Weierstraß 2)*

Man mache sich klar, dass von den a priori 16 kombinatorischen Möglichkeiten für eine Folge, jede der vier Eigenschaften (monoton, beschränkt, konvergent und Existenz mindestens eines Häufungspunktes) zu haben oder auch nicht, zehn durch Satz 1 ausgeschlossen werden. Die verbleibenden sechs Möglichkeiten können tatsächlich realisiert werden, wie die Beispiele aus Satz 2 belegen:

Satz 2 (Typische Beispiele von Folgen) *Für eine reelle Folge $(a_n)_n$ sind, wie die jeweils angegebenen Beispiele zeigen, die folgende Kombinationen von Eigenschaften möglich:*

1. monoton, beschränkt, konvergent, Häufungspunkt: $a_n = \frac{1}{n}$
2. nicht monoton, beschränkt, konvergent, Häufungspunkt: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$
3. nicht monoton, beschränkt, divergent, Häufungspunkt(e): $a_n = (-1)^n$.
4. monoton, unbeschränkt, divergent, kein Häufungspunkt: $a_n = n$
5. nicht monoton, unbeschränkt, divergent, ein Häufungspunkt: $a_n = n + (-1)^n n$.
6. nicht monoton, unbeschränkt, divergent, kein Häufungspunkt: $a_n = (-1)^n n$

2.3. Arbeit mit dem Grenzwertbegriff für Folgen

Zur expliziten Berechnung von Folgengrenzwerten ist es von besonderem Interesse, dass gliedweise Summe, Differenz, Produkt und Quotient (bei Nenner $\neq 0$) konvergenter Folgen wieder konvergieren, und zwar gegen Summe, Differenz, Produkt bzw. Quotient der einzelnen Grenzwerte. (In anderer Terminologie könnte man auch sagen: Die vier Grundrechnungsarten sind stetig.) Der intuitive Hintergrund ist klar: Wenn sich für $n \to \infty$ die Zahlen a_n einem Wert α und die b_n einem Wert β beliebig annähern, dann auch die Summen $a_n + b_n$ dem Wert $\alpha + \beta$, analog für Differenz, Produkt und Quotienten. Also:

Satz 3 (Grenzwertsätze) *Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$. Dann sind auch die Folgen $(c_n)_n$ mit den jeweils angegebenen Gliedern c_n konvergent gegen den jeweils angegebenen Grenzwert γ, im letzten Fall unter der angegebenen Zusatzbedingung.*

1. $c_n = a_n \pm b_n$, $\gamma = \alpha \pm \beta$ *(Summen- bzw. Differenzsatz)*
2. $c_n = a_n b_n$, $\gamma = \alpha\beta$ *(Produktsatz). Ist $\beta = 0$, so genügt schon Beschränktheit (statt Konvergenz) der a_n, um die Konvergenz $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ zu garantieren.*
3. $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, *sofern $\beta \neq 0$ (Quotientensatz)*

Die gewonnenen Sätze lassen sich in altbewährter Weise verwenden, um den Grenzwert gebrochen rationaler Folgen zu bestimmen:

Satz 4 (gebrochen rationale Folgen) *Folgen mit Gliedern der Form $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ mit Polynomen $p(n) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i n^i$ und $q(n) = \sum_{j=0}^{l} \beta_j n^j$ vom Grad k bzw. l (also mit $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_k, \beta_l \neq 0$) konvergieren für $k \leq l$ und divergieren für $k > l$. Im Fall $k = l$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$, im Fall $k < l$ ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Besonders wichtig sind auch die sogenannten *geometrischen* Folgen:

Satz 5 (geometrische Folge) *Sei $q \in \mathbb{R}$, dann ist die Folge mit den Gliedern $a_n = q^n$ konvergent gegen 0 für $|q| < 1$, konvergent gegen 1 für $q = 1$ und sonst divergent.*

In Abschnitt 4.4 werden wir auch noch rekursiv definierte Folgen behandeln, die durch ein Anfangsglied a_0 und die Forderung $a_{n+1} = T(a_n)$ für alle n mit einer gegebenen Transformation $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $T : D \to D$ mit $a_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$) gegeben sind.

3. Reihen (unendliche Summen)

Im Schulunterricht wird man die Theorie der unendlichen Reihen nicht allzu weit treiben und sich mit den grundlegenden Definitionen (3.1) sowie einigen wichtigen Beispielen (3.2) begnügen.

3.1. Der Wert einer unendlichen Reihe

Wenn man zum Beispiel für Summanden $a_n = \frac{1}{2^n}$ suggestiv $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$ schreibt, so dürfte kein Zweifel bestehen, was damit gemeint ist, nämlich dass sich die sogenannten Partialsummen $s_0 = 1$, $s_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$ etc. dem Wert 2 annähern. Allgemein und etwas genauer definiert man:

Definition 3.1 *Ist eine Folge mit den Gliedern (Summanden) a_n, $n \in \mathbb{N}$ (sinngemäß für $n \in \mathbb{N}^+$ etc.), gegeben, dann sind die zugehörigen* Partialsummen *s_n rekursiv durch $s_0 := a_0$ und $s_{n+1} := s_n + a_{n+1}$ definiert. Die a_n heißen* Glieder *der* (unendlichen) Reihe, *für die man symbolisch auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ schreibt. Konvergiert die Folge der Partialsummen s_n (im Sinne des dritten Teils von Definition 2.1) gegen ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so schreibt man auch*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \alpha,$$

und nennt α den Wert der Reihe *und die Reihe* konvergent, *andernfalls* divergent.

In Hinblick auf den Grenzwertbegriff ist beim Übergang von Folgen zu Reihen also überhaupt nichts Neues hinzugekommen. Es wurde lediglich aus der Folge der Summanden a_n (den Gliedern der Reihe) die Folge der Partialsummen s_n gebildet und auf diese der bereits vorhandene Grenzwertbegriff angewendet. Der Unterschied zwischen Folgen und Reihen ist also weniger begrifflicher als psychologischer Natur, weil in der Theorie der Reihen vor allem solche Aussagen von Interesse sind, die unmittelbare Schlüsse von der Folge der a_n auf das Konvergenzverhalten der s_n ermöglichen.

3.2. Einfache Sachverhalte und Beispiele

Satz 6 (Zwei einfache Eigenschaften von Reihen) *Für jede Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit Partialsummen s_n gilt:*

1. *Ist $a_n \geq 0$ für alle n, so konvergiert die Reihe genau dann, wenn die s_n beschränkt sind.*
2. *Konvergiert die Reihe, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

An die zweite Aussage von Satz 6 schließt sich die Frage an, ob es auch divergente Reihen gibt, deren Glieder eine Nullfolge bilden. Ein Beispiel dieser Art erhält man tatsächlich, wenn man die Glieder $a_0 \geq a_1 \geq a_n \geq \ldots$ so definiert, dass $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = a_4 = a_5 = \frac{1}{3}$ und allgemein, n aufeinanderfolgende Glieder den Wert $\frac{1}{n}$ haben. Offensichtlich wachsen die Partialsummen dieser Reihe unbeschränkt, folglich ist die Reihe divergent trotz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ein ehrgeizigeres Beispiel ist die harmonische Reihe:

Satz 7 (harmonische Reihe) *Die Reihe mit den Gliedern $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, divergiert.*

Das bei Weitem wichtigste Beispiel einer konvergenten Reihe ist die geometrische Reihe:

Satz 8 (geometrische Reihe) *Die Reihe mit den Gliedern $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$ und divergiert für $|q| \geq 1$. Die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^n$ haben für $q = 1$ den Wert $s_n = n+1$, in allen anderen Fällen gilt $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

Darüber hinaus gibt es nicht viel obligatorischen Schulstoff über Reihen. Immerhin erwähnenswert ist das Phänomen, das im Riemannschen Umordnungssatz beschrieben ist: Bei manchen Reihen (nämlich den nicht absolut konvergenten) können Umordnungen der Glieder Einfluss auf das Konvergenzverhalten haben (siehe Beispiel im Anhang der Langversion). Von allgemeinem Interesse könnten auch Reihendarstellungen wie $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots)$ für die Kreiszahl π und $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für die Exponentialfunktion sein (siehe auch Winkler (2011/12)).

4. Funktionen und Stetigkeit

Ähnlich wie das Kapitel 2 über Folgen gliedern wir auch jenes über Funktionen und Stetigkeit: Der Abschnitt 4.1 bringt die grundlegenden Definitionen, 4.2 die wichtigsten allgemeinen Sachverhalte, 4.3 Beispiele („fast alle“ in der Schule auftretenden Funktionen sind stetig). Überdies werden im kurzen Abschnitt 4.4 auch noch rekursive Folgen unter dem Gesichtspunkt der Stetigkeit angesprochen.

4.1. Die grundlegenden Definitionen

Wir wollen die begrifflichen Präzisierungen, die uns zum Grenzwert von Folgen geführt haben, zu einer ebenso präzisen Definition des Grenzwertes $\lim_{x \to x_0} f(x)$ einer Funktion f für $x \to x_0$ modifizieren. In engster Verbindung damit steht der Begriff der Stetigkeit, der in der Mathematik einen ähnlichen Rang hat wie jener des Grenzwertes und mit diesem sehr eng verknüpft ist.

Mit der Schreibweise $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ soll anschaulich gemeint sein: Nähert sich x dem Wert x_0 an, so auch $f(x)$ dem Wert α, d.h.: Die Differenz $|f(x) - \alpha|$ wird *beliebig* klein, sofern nur *x hinreichend* nahe bei x_0 ist. Im Vergleich mit dem Folgengrenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n$ ist lediglich die Bedingung $n \geq n_0$, also „n hinreichend groß“ durch „$|x - x_0|$ hinreichend klein“ zu ersetzen. Die reelle Zahl x_0 übernimmt also die Rolle von ∞. Als Messgröße, die das „hinreichend klein“ kontrolliert, ist statt einer natürlichen Zahl n_0 als Folgenindex nun eine sehr kleine, aber positive reelle Zahl zu setzen, zu deren Bezeichnung sich der griechische Buchstabe δ eingebürgert hat. Soll $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ gelten, hat also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu existieren, so dass für alle $x \neq x_0$ aus dem Definitionsbereich von f mit $|x - x_0| < \delta$ die gewünschte Ungleichung $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ gilt. (Dass man $x_0 = x$ nicht einbezieht, entspricht der Tatsache, dass es ja auch bei Folgen kein a_∞ gibt.) Diese Definition ist allerdings nur dann sinnvoll, wenn der Definitionsbereich D von f Punkte $x \neq x_0$ enthält, die beliebig nahe bei x_0 liegen. Ist das der Fall, so heißt x_0 ein *Häufungspunkt* von D, andernfalls ein *isolierter Punkt*. Von einer stetigen Funktion verlangt man, dass der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ auch mit $f(x_0)$ übereinstimmt. Ist $x_0 \in D$ ein isolierter Punkt von D, dann ist es sinnvoll, f als in x_0 stetig anzusehen. Die genaue Definition lautet also:

Definition 4.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich einer reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann heißt $\alpha \in \mathbb{R}$* Grenzwert *oder* Limes *der Funktion f für $x \to x_0$, wenn es für alle reellen $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl δ gibt derart, dass für alle $x \neq x_0$ mit $x \in D$ aus $|x - x_0| < \delta$ stets $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ folgt. Als Formel:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, x \neq x_0 :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon,$$

Kurzschreibweise: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ *oder* $f(x) \to \alpha$ *für* $x \to x_0$. *Ist überdies $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ für $x_0 \in D$, so heißt f* stetig *in x_0. Ebenso heißt f stetig in x_0 für alle $x_0 \in D$, die nicht Häufungspunkt von D sind. Die Funktion f heißt stetig auf D, wenn f stetig in x ist für alle $x \in D$.*

Stetigkeit von f in x_0 lässt sich also auch charakterisieren durch die Formel:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Oft sind auch die einseitigen Varianten dieser Begriffe nützlich. Dazu betrachtet man die Einschränkungen $f_{x_0^-}$ und $f_{x_0^+}$ von f auf die Definitionsbereiche $D_{x_0^-} := D\cap\ ]-\infty,x_0[$ links bzw. $D_{x_0^+} := D\cap\ ]x_0,\infty[$ rechts von x_0. Die Grenzwerte $f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0} f_{x_0^-}(x)$ und $f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0} f_{x_0^+}(x)$ (sofern sie existieren) heißen die *einseitigen Grenzwerte* von f in x_0, jener von $f(x_0^-)$ der *links-*, jener von $f(x_0^+)$ der *rechtsseitige*. Stimmen diese Werte mit $f(x_0)$ überein, so heißt f *links-* bzw. *rechtsseitig* stetig in x_0.

4.2. Eigenschaften stetiger Funktionen

Die Verwandtschaft zwischen Grenzwert von Funktionen mit dem von Folgen drückt sich in folgendem sehr nützlichen Kriterium aus:

Satz 9 (Folgenstetigkeit): *Die reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \in D$ aus $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ die Konvergenz $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ folgt.*

Stetigkeit lässt sich also auch durch die einprägsame Formel $f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ charakterisieren. Dieses Kriterium erleichtert viele Beweise, insbesondere jene von zwei wichtigen Sätze über stetige Funktionen, die auch im Schulunterricht keinesfalls fehlen dürfen: der Zwischenwertsatz und der Satz vom Maximum:[4]

Satz 10 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$. Dann gilt:*

1. *(**Zwischenwertsatz**) Die Funktion f nimmt auf $[a,b]$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*
2. *(**Satz vom Maximum**) Die Funktion f nimmt auf $[a,b]$ sowohl Minimum als auch Maximum an, d.h. es gibt $x_1,x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a,b]$.*[5]

Dass auf die Stetigkeitsvoraussetzung nicht ersatzlos verzichtet werden kann, zeigt für den Zwischenwertsatz das Beispiel der Signumfunktion sgn auf $[a,b] = [-1,1]$. Sie ist durch $\mathrm{sgn}(x) := -1$ für $x < 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ und $\mathrm{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$ definiert. Für den Satz vom Maximum kann man als Gegenbeispiel etwa die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) := 0$ und $f(x) := 1-x$ oder, noch extremer, $f(x) := \frac{1}{x}$ für $x > 0$ nehmen. Die letzten Beispiele dienen, wenn man die Stelle $x = 0$ aus dem Definitionsbereich herausnimmt, auch zur Illustration der Voraussetzung, dass der Definitionsbereich von f abgeschlossen (genauer: sogar kompakt) sein muss. Natürlich gilt der Satz vom Maximum auch nicht für unbeschränkte Definitionsbereiche (z.B. $f(x) := x$ betrachten).

4.3. Viele Beispiele stetiger Funktionen

Die einfachsten Beispiele stetiger Funktionen sind die konstanten, wo an jeder Stelle x_0 zu beliebigem $\varepsilon > 0$ irgendein $\delta > 0$ genommen werden kann, und die identische Funktion $f(x) := x$ (hier setzt man am einfachsten $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$). Wie Satz 11 zeigen wird, überträgt sich die Stetigkeit von diesen speziellen Beispielen auf alle daraus mittels Addition, Subtraktion und Multiplikation aufgebauten Funktionen, also auf alle Polynomfunktionen. Nimmt man auch noch die Division hinzu, so erhält man sämtliche gebrochen rationalen Funktionen, die ebenfalls nach Satz 11 auf ihrem gesamten Definitionsbereich (allfällige Pole, d.h. Nullstellen des Nenners, sind bei gebrochen rationalen Funktionen natürlich auszunehmen) stetig sind. Von vielleicht noch größerer Bedeutung für die Mathematik insgesamt ist die Stetigkeit der Verkettung stetiger Funktionen. Zusammenfassend gilt:

Satz 11 (Verknüpfung von Funktionen und Stetigkeit) *Seien $f,g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in D$ derart, dass die Grenzwerte $\alpha := \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\beta := \lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren. Außerdem möge für die Funktion $h : D_h \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq D_h$ der Grenzwert $\gamma := \lim_{y\to\alpha} h(y)$ existieren. Dann gilt:*

[4] Beide Sätze sind aus Sicht der Topologie von besonderem Interesse. Sie besagen nämlich für den Spezialfall reeller Funktionen, dass die Eigenschaften Zusammenhang bzw. Kompaktheit unter stetigen Abbildungen bewahrt bleiben. Beides gilt allgemein auf beliebigen topologischen Räumen.

[5] Statt des abgeschlossenen Intervalls $[a,b]$ kann auch ein beliebiger kompakter Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ von f vorausgesetzt werden.

1. *Auch die Grenzwerte* $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)$, $\lim_{x\to x_0}(f-g)(x)$, $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)$ *und, sofern* $g(x_0)\neq 0$, $\lim_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x)$ *(definiert wenigstens in einer Umgebung von* x_0*) existieren und stimmen mit* $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ *bzw.* $\frac{\alpha}{\beta}$ *überein.*
2. *Sind* f *und* g *stetig in* x_0*, dann auch die Summe* $f+g$*, die Differenz* $f-g$*, das Produkt* $f\cdot g$ *und, sofern* $g(x_0)\neq 0$*, der Quotient* $\frac{f}{g}$.
3. *Sind* f *und* g *stetig auf ganz* D*, dann auch die Summe* $f+g$*, die Differenz* $f-g$*, das Produkt* $f\cdot g$ *und, sofern* $g(x)\neq 0$ *für alle* $x\in D$*, der Quotient* $\frac{f}{g}$.
4. *Auch der Grenzwert* $\lim_{x\to x_0}(h\circ f)(x)$ *existiert und hat den Wert* γ*. Ist* f *stetig in* x_0 *und* h *in* $\alpha=f(x_0)\in D_h$*, so auch* $h\circ f$ *in* x_0*. Ist* f *stetig auf ganz* D *und* h *auf ganz* D_h*, so auch* $h\circ f: D\to\mathbb{R}$ *auf ganz* D.

Stetig sind außerdem Exponential-, Logarithmus-, Potenz-, trigonometrische und viele andere „elementare“ Funktionen. Der Beweis dafür muss allerdings auf die Definition dieser Funktionen zurückgreifen (siehe etwa Winkler (2011/12)), was hier zu weit führte. Das und Satz 11 zeigen, dass man, um überhaupt unstetige Funktionen zu erhalten, andersartige Konstruktionen bemühen muss, typischerweise mittels Fallunterscheidung.

Das einfachste Beispiel ist die sogenannte *Signumfunktion* $\mathrm{sgn}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die wir schon als Gegenbeispiel zum Zwischenwertsatz (erste Aussage in Satz 10) kennen gelernt haben. Ein viel extremeres Beispiel, das nicht nur an einer Stelle, sondern überall unstetig ist, ist die berühmte *Dirichletsche Sprungfunktion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die an allen rationalen $x\in\mathbb{Q}$ den Wert $f(x)=1$ und an allen irrationalen Stellen $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ den Wert $f(x)=0$ annimmt. Man überzeugt sich leicht (siehe letztes Kapitel der Langversion Winkler (2018/19)), dass diese Funktion tatsächlich an jedem Punkt $x_0\in\mathbb{R}$ unstetig ist. Die Dirichletsche Sprungfunktion dient oft als Gegenbeispiel. Bei der Integration werden auch wir sie als solches verwenden.

4.4. Rekursive Folgen und Stetigkeit

Zum Abschluss des Themenbereichs Stetigkeit kommen wir noch auf rekursive Folgen zu sprechen, d.h. auf solche Folgen $\mathbf{a}=(a_n)_n$, die $a_{n+1}=T(a_n)$ für alle n erfüllen. Dabei wollen wir $T:D\to D$ als eine stetige Funktion voraussetzen, die eine Menge $D\subseteq\mathbb{R}$ auf sich selbst abbildet. Konvergiert so eine Folge gegen ein $x_0\in D$, also $x_0=\lim_{n\to\infty}a_n$, so folgt (Folgenstetigkeit!)

$$T(x_0)=T(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}T(a_n)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=x_0.$$

Der Grenzwert muss also ein Fixpunkt von T, d.h. Lösung der Gleichung $T(x)=x$ in der Unbekannten x sein. Ist T durch einen Formelausdruck gegeben, so fällt die Lösung dieser Gleichung oft relativ leicht. Ist der Grenzwert einer rekursiv gegebenen Folge gesucht, so ermöglicht diese Vorgangsweise die Beschränkung der Untersuchungen auf wenige Kandidaten für den gesuchten Grenzwert. Um bei gegebenem Anfangswert a_0 die Konvergenz der a_n gegen einen bestimmten Wert nachzuweisen, sind dann aber meist noch andere Überlegungen erforderlich. Ausführlicher ist das beispielsweise in Winkler (2013/14) behandelt.

5. Differentialrechnung

Ähnlich den bisherigen Kapiteln beginnen wir mit den grundlegenden Begriffen in Abschnitt 5.1, lassen in 5.2 die wichtigsten theoretischen Ergebnisse folgen und schließen mit praktischen Aspekten (nämlich den Differentiationsregeln) in Abschnitt 5.3.

5.1. Differentialquotient und Ableitung

Ähnlich wie sich der Wert einer unendlichen Reihe als Grenzwert einer Folge (nämlich der Folge der Partialsummen) deuten lässt, kann der Begriff der Ableitung einer Funktion f in einem Punkt x_0 auf den

Grenzwert einer anderen Funktion für $x \to x_0$ zurückgeführt werden. Und zwar handelt es sich um die sogenannte *Differenzenquotienten-* oder auch *Sekantensteigungsfunktion* $s_{f,x_0} : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, die durch

$$s_{f,x_0}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definiert ist. Die Bezeichnung ergibt sich aus der Interpretation des Wertes $s_{f,x_0}(x)$ als Steigung jener Sekante (= schneidenden Gerade), die durch die beiden auf dem Funktionsgraphen von f liegenden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ geht. Man beachte, dass s_{f,x_0} tatsächlich genau für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ definiert ist. Die als Differentialquotient definierte *Ableitung* von f an der Stelle x_0 stimmt, sofern sie existiert, mit der stetigen Fortsetzung von s_{f,x_0} an der Stelle x_0 überein:

Definition 5.1 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass der* Differentialquotient *von f in x_0 genannte Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} s_{f,x_0}(x)$$

existiert. Dann heißt dieser Wert die Ableitung *von f an der Stelle x_0, und f heißt an der Stelle x_0* differenzierbar. *Ist f an allen Stellen $x \in D$ differenzierbar, dann heißt die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, die* Ableitung von f, *und f heißt eine* Stammfunktion *von f'.*

Differenzierbarkeit von f in x_0 bedeutet, dass f in einer Umgebung von x_0 „sehr gut“ durch eine lineare Funktion approximiert werden kann, nämlich durch die Funktion $l(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dabei heißt „sehr gut“, dass nicht nur $\lim_{x \to x_0}(f(x) - l(x)) = 0$ gilt (das wäre bei stetigem f mit jeder linearen Funktion, die $l(x_0) = f(x_0)$ erfüllt, der Fall), sondern sogar stärker $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} = 0$. Dieser Gesichtspunkt der linearen Approximierbarkeit lässt sich weitreichend verallgemeinern, insbesondere auf Funktionen in mehreren Variablen, und kann deshalb als paradigmatisch für die Differentialrechnung schlechthin angesehen werden. Die geometrische Interpretation bedeutet in unserem eindimensionalen Fall, dass l die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist. Erwartungsgemäß hat der Differentialquotient einer linearen Funktion f der Gestalt $f(x) := kx + d$ für alle x_0 den Wert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(kx + d) - (kx_0 + d)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k(x - x_0)}{x - x_0} = k.$$

Ähnlich wie bei der Stetigkeit einseitige Grenzwerte, so können nun auch *einseitige*, d.h. *links-* und *rechtsseitige Ableitungen* $f'(x_0^-)$ und $f'(x_0^+)$ von Interesse sein. Sie sind durch $f'(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} s_{f,x_0}(x)$ und $f'(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} s_{f,x_0}(x)$ als einseitige Grenzwerte des Differenzenquotienten definiert. Häufig setzt man in der Definition von $f'(x_0)$ voraus, dass x_0 *innerer Punkt* von D ist, was bedeutet, dass es ein $\delta > 0$ gibt derart, dass das gesamte Intervall $U :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (so ein U heißt *Umgebung* von x_0) in D enthalten ist. In diesem Fall wäre zum Beispiel eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in den Randpunkten höchstens einseitig differenzierbar.

5.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Als Veranschaulichung des Unterschieds zwischen stetig und differenzierbar bietet sich die auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, an der Stelle $x_0 = 0$ an. An dieser Stelle existieren zwar die einseitigen Ableitungen $f'(0^-) = -1$ und $f'(0^+) = 1$. Diese beiden Werte sind aber verschieden, weshalb kein gemeinsamer Grenzwert $f'(0)$ existiert, f also nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$ ist. Anschaulich spiegelt sich das in dem „Eck“ des Graphen der Betragsfunktion an der Stelle x_0 wider. Stetige Funktionen müssen also nicht differenzierbar sein. Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig und nirgends differenzierbar sind. Ihre Konstruktion erfordert allerdings beträchtlichen Aufwand, der den Rahmen des Schulunterrichts sprengen würde. In Übereinstimmung mit der Anschauung, dass ein Funktionsgraph dort, wo eine Tangente existiert, keine Sprünge haben kann, gilt aber umgekehrt:

Satz 12 (differenzierbar impliziert stetig): *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch stetig.*

Eine der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung im Schulunterricht sind Extremwertaufgaben. Die Definition eines Extremums bzw. einer Extremstelle braucht den Begriff der Ableitung nicht und sollte deshalb auch allgemein gefasst werden:

Definition 5.2 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0, dann heißt $x_0 \in D$* (globale) Extremstelle *und $f(x_0)$* (globales) Extremum *von f in x_0, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ oder $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ gilt. Im ersten Fall spricht man von einem* (globalen) Maximum*, im zweiten Fall von einem* (globalen) Minimum*. Man spricht von einem* lokalen *Extremum $f(x_0)$ bzw. einer* lokalen *Extremstelle $x_0 \in D$ von f (Maximum oder Minimum), wenn es ein $\delta > 0$ gibt derart, dass die Einschränkung von f auf die Menge $D \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (Umgebung von x_0) in x_0 ein Extremum hat.*

Klarerweise ist jedes globale Extremum auch ein lokales, während die Umkehrung nicht gilt. Die prominente Rolle der Ableitung bei der Bestimmung (lokaler und somit auch globaler) Extrema ergibt sich aus folgendem Satz.

Satz 13 (Extremum und Ableitung) *Hat $f : D \to \mathbb{R}$ im inneren Punkt x_0 von D ein Extremum und ist f in x_0 differenzierbar, so folgt $f'(x_0) = 0$.*

So wirkungsvoll dieser Satz auch ist, so dürfen nicht die Voraussetzungen „innerer Punkt“ und „differenzierbar“ übersehen werden. Außerdem ist, selbst wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, die Bedingung $f'(x_0) = 0$ notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen einer Extremstelle in x_0. Man kann untersuchen, ob die zweiten (und eventuell höheren) Ableitungen > 0 oder < 0 sind. Häufig ist aber die Anwendung des Satzes vom Maximum (zweite Aussage in Satz 10) effizienter. Weil das Thema „Extremwertaufgaben“ einen eigenen Artikel rechtfertigen würde, begnügen wir uns hier mit der kurzen Erläuterung einer typischen Situation: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gibt es z.B. nur zwei Stellen $x_0, x_1 \in D$ mit $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$, so kommen als Extrema nur die vier Werte $f(a), f(b), f(x_0)$ und $f(x_1)$ in Frage. Diese Funktionswerte auszuwerten, um sie zu vergleichen, kommt man ohnedies nicht umhin. Der größte von ihnen ist das Maximum, der kleinste das Minimum von f auf $[a,b]$. Es besteht also keine Notwendigkeit, $f''(x_0)$ und $f''(x_1)$ auszurechnen.

Eine für die Theorie generell und insbesondere für die Berechnung von Integralen wichtige Folgerung aus den bisherigen Ergebnissen ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Anschaulich besagt er, dass es für eine auf einem Intervall $[a,b]$ differenzierbare Funktion f eine Tangente in einem geeigneten Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit $a < x_0 < b$ gibt, die zur Verbindung der beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ parallel ist.

Satz 14 *(***Mittelwertsatz***) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$) stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ oder, äquivalent, $f(b) = f(a) + f'(x_0)(b-a)$.*

5.3. Differentiationsregeln

Ein wesentlicher Grund für die Macht der Differentialrechnung liegt darin, dass es einen „vollständigen Werkzeugkasten“ an einfachen Regeln gibt, der die Berechnung der Ableitung von allen Funktionen ermöglicht, die in „regulärer“ Weise aus „elementaren Funktionen“ aufgebaut sind. Dieser Werkzeugkasten enthält zunächst die Ableitungsregeln für Polynome und „elementare“ Funktionen wie $\exp' = \exp$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$. (Für eine ausführlichere Diskussion solcher Funktionen sei auf Winkler (2011/12) verwiesen.) Vor allem aber gibt es Ableitungsregeln, die klären, wie sich Differentiation mit den vier Grundrechnungsarten, der Verkettung und der Umkehrung von Funktionen verträgt. In weitgehender Analogie zu den entsprechenden Gesetzen sowohl für die Konvergenz von Folgen als auch für die Stetigkeit von Funktionen gilt nämlich:

Satz 15 (Differentiationsregeln) *Seien die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Außerdem sei die Funktion $h : D_h \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq D_h$ differenzierbar in $f(x_0)$. Dann sind auch die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (sofern $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$) und $h \circ f$ in x_0 differenzierbar. Überdies gilt:*

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ *(*Summenregel*)*

2. $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ *(*Produktregel)

3. $(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0))f'(x_0)$ *(*Kettenregel*)*

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ *(*Quotientenregel*)*

5. *Ist f in einer Umgebung von x_0 stetig und umkehrbar, außerdem $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{(-1)}$ in $f(x_0)$ differenzierbar mit $\left(f^{(-1)}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. (*Ableitungsregel für Umkehrfunktionen*)*

Insbesondere sind Summe, Differenz, Produkt, Verkettung und Quotient (wo immer definiert) differenzierbarer Funktionen ebenfalls differenzierbar, außerdem die Umkehrfunktion einer umkehrbaren differenzierbaren Funktion mit Ableitung $\neq 0$.

Ganz ähnlich wie bei Stetigkeit lässt sich also auch für Differenzierbarkeit und Ableitung sagen: Alle Funktionen, die sich aus elementaren differenzierbaren Funktionen mittels Grundrechnungsarten und Verkettung aufbauen lassen, sind selbst differenzierbar. Darüber hinaus lassen sich ihre Ableitungen mit Hilfe der Regeln aus Satz 15 berechnen.

6. Integralrechnung

Wir beginnen in Abschnitt 6.1 mit der Definition des Riemann-Integrals mittels Ober- und Untersummen und arbeiten in 6.2 den Grenzwertcharakter dieses Begriffs heraus. Als Schlusspunkt wird in 6.3 die Brücke zwischen Differential- und Integralrechnung geschlagen.

6.1. Definition des Integrals mittels Ober- und Untersummen

Bekanntlich lässt sich das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ einer reellen Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $[a,b] \subseteq D$ auf dem Intervall $[a,b]$, $a \leq b$, für $f \geq 0$ als die Fläche der Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ interpretieren. Nimmt f auch negative Werte an, so sind Flächenstücke in diesen Bereichen mit negativem Vorzeichen zu versehen. Wir wollen im Folgenden voraussetzen, dass f beschränkt ist.

Zur Präzisierung des Integralbegriffs betrachtet man Zerlegungen $Z = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq b = x_n\}$ von $[a,b]$ in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.[6] Jedes der Teilintegrale $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$ sollte einen Wert haben, der zwischen $c_i(x_i - x_{i-1})$ und $C_i(x_i - x_{i-1})$ liegt mit $c_i = \inf\{f(x) :\ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ und $C_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$.[7] Entsprechend sollte $\int_a^b f(x)\,dx$ zwischen *Untersumme* $U(f,Z)$ und *Obersumme* $O(f,Z)$ bezüglich der Zerlegung Z liegen:

$$U(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})c_i \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq O(f,Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})C_i$$

Man hofft, dass für hinreichend feine Zerlegungen Unter- und Obersumme einander beliebig nahe kommen und definiert daher:

Definition 6.1 *Die beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt* (Riemann-)integrierbar *und $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt das* bestimmte Integral *von f (dem sogenannten* Integranden*) auf $[a,b]$ (dem sogenannten* Integrationsbereich*), symbolisch $\alpha = \int_a^b f(x)\,dx$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$ gibt mit*

$$\alpha - \varepsilon < U(f,Z) \leq \alpha \leq O(f,Z) < \alpha + \varepsilon.$$

Ist beispielsweise $f(x) = x$ und $[a,b] = [0,1]$, so ergibt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ als Wert α das Flächenmaß des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, also $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. Man kann das unschwer nachrechnen (siehe letztes Kapitel der Langversion Winkler (2018/19)).

[6] Manchmal ist es praktisch, auch die Möglichkeit $x_{i-1} = x_i$ zu erfassen. Deshalb wäre es genauer, Z nicht als Menge der x_i, sondern als Vektor zu betrachten. Das schafft jedoch terminologische und notationelle Komplikationen, weshalb wir der einfachen Lesbarkeit halber darauf verzichten und Z schlicht als Menge der Unterteilungspunkte definieren.

[7] Das Symbol $\inf$ steht für *Infimum*, das ist die größte untere Schranke, $\sup$ für *Supremum*, die kleinste obere Schranke.

A priori wäre es denkbar, dass verschiedene Zerlegungen zu verschiedenen Werten des Integrals führen könnten. Dem ist aber nicht so:

Satz 16 (Untersumme stets kleiner als Obersumme) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und seien Z_1 und Z_2 beliebige Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gilt:*

1. *Ist $Z_1 \subseteq Z_2$ (in diesem Fall heißt Z_2 eine* Verfeinerung *von Z_1), so gilt*

$$U(f,Z_1) \leq U(f,Z_2) \leq O(f,Z_2) \leq O(f,Z_1).$$

2. *In jedem Fall gilt $U(f,Z_1) \leq O(f,Z_2)$.*

Also sind alle Untersummen durch jede Obersumme nach oben und alle Obersummen durch jede Untersumme nach unten beschränkt. Im Falle einer Riemann-integrierbaren Funktion, wo Unter- und Obersummen einander beliebig nahe kommen können, bedeutet das: Das Integral stimmt sowohl mit dem Supremum sämtlicher Untersummen als auch mit dem Infimum sämtlicher Obersummen, genommen jeweils über alle Zerlegungen Z von $[a,b]$, überein.

Das klassische Beispiel einer *nicht* Riemann-integrierbaren Funktion ist die Dirichletsche Sprungfunktion f, die wir schon in Abschnitt 4.3 kennengelernt haben. Für jede Zerlegung Z gibt es zwischen zwei Unterteilungspunkten $x_{i-1} < x_i$ sowohl rationale als auch irrationale Stellen mit Werten 1 bzw. 0. Deshalb erhält man als Untersumme immer den Wert $U(f,Z) = 0$, als Obersumme zum Beispiel auf dem Integrationsintervall $[0,1]$ jedoch $O(f,Z) = 1$, unabhängig von Z. Somit ist die Dirichletsche Sprungfunktion auf $[0,1]$ (analog auf jedem anderen Intervall $[a,b]$ mit $a < b$) nicht Riemann-integrierbar.

6.2. Das Integral als Grenzwert

Schreibt man Definition 6.1 quantorenlogisch um, so erhält man die Formel

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists Z : \; \alpha - \varepsilon < U(f,Z) \leq \alpha \leq O(f,Z) < \alpha + \varepsilon$$

mit nur zwei Quantoren. Will man analog zu Folgengrenzwert etc. auch das Integral als Grenzwert deuten mit einem dritten Quantor, nämlich einem zusätzlichem Allquantor, so bietet sich an,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists Z \; \forall Z' \supseteq Z : \; \alpha - \varepsilon < U(f,Z') \leq \alpha \leq O(f,Z') < \alpha + \varepsilon$$

zu fordern. Nach den Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts sind tatsächlich beide Formeln äquivalent. Noch interessanter aber ist es, den Begriff der *Feinheit* $\|Z\|$ einer Zerlegung Z einzubeziehen. $\|Z\|$ ist für eine Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$ als das Maximum der Längen der Teilintervalle definiert, also $\|Z\| := \max\{x_i - x_{i-1} : \; i = 1, \ldots, n\}$. Dann gilt nämlich:

Satz 17 (Integral als Grenzwert) *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$ für alle Zerlegungen Z von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$, als Formel:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall Z : \; \|Z\| < \delta \; \Rightarrow \; O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$$

Da das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sicher zwischen $U(f,Z)$ und $O(f,Z)$ liegt, lässt sich also formulieren: Für *beliebig* vorgegebenes $\varepsilon > 0$ kann bei *hinreichend* kleinem $\delta > 0$ eine Approximationsgüte ε garantiert werden – ganz analog zum Grenzwert von Folgen, Reihen, Funktionen und Ableitung.

Auch die Schreibweise

$$\lim_{\|Z\| \to 0} U(f,Z) = \lim_{\|Z\| \to 0} O(f,Z) = \int_a^b f(x)\,dx$$

bietet sich an. Wir werden im abschließenden Resümee (Kapitel 7) nochmals auf die Analogie zwischen den nunmehr fünf Ausprägungen des Grenzwertbegriffs zurückkommen. Zuvor folgt aber noch die krönenden Verschmelzung von Differential- und Integral- zur Infinitesimalrechnung.

6.3. Die Brücke zwischen Differential- und Integralrechnung

Über die Definition des Integrals hinaus wollen wir wissen, ob das weiter oben erwähnte sehr einfache Beispiel $f(x) = x$ ein glücklicher Sonderfall ist, oder ob die Riemann-integrierbaren Funktionen eine große Klasse bilden. Der wichtigste Satz hierzu lautet:

Satz 18 (Stetige Funktionen sind integrierbar) *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Stetigkeit ist für Riemann-Integrierbarkeit also hinreichend, notwendig ist sie nicht. Denn z.B. hat eine Abänderung des Funktionswertes an einer einzigen oder an endlich vielen Stellen keinen Einfluss auf Integrierbarkeit und Wert des Integrals. Auch stückweise stetige Funktionen, also solche mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen, sind integrierbar. Das gilt sogar für gewisse Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen. Zum Beispiel ist jede monotone Funktion Riemann-integrierbar.[8]

Wir kommen nun zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, einem Höhepunkt nicht nur der Analysis, sondern der gesamten Mathematik. Er stellt die Verbindung zwischen Differential- und Integralrechnung her. Indem er Differentiation und Integration als (in einem bestimmten Sinn) zueinander inverse Operationen ausweist, liefert er darüber hinaus auch die wichtigste Methode zur exakten Berechnung von Integralen.

Satz 19 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so definiert $F(x_0) := \int_a^{x_0} f(x)\,dx$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $F' = f$.*

Die Berechnung von Integralen mittels Stammfunktionen beruht neben dem Hauptsatz 19 auch auf folgendem Satz, in dessen Beweis der Mittelwertsatz 14 die entscheidende Rolle spielt.

Satz 20 (Stammfunktionen und additive Konstante) *Sind F_1 und F_2 irgendwelche Stammfunktionen der stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann gibt es eine konstante Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1(x) = F_2(x) + c$ für alle $x \in [a,b]$. Die Beziehung $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ gilt für jede beliebige Stammfunktion F von f.*

Für die Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ einer stetigen Funktion f genügt es nach Satz 20, *irgendeine* Stammfunktion F von f zu finden. Deshalb verwendet man das Integralsymbol $\int$ ohne Integrationsgrenzen zur Bezeichnung von Stammfunktionen. Will man ihre Mehrdeutigkeit hervorheben, so schreibt man statt $\int f(x)\,dx$ auch $\int f(x)\,dx + c$ und meint damit die Menge aller Stammfunktionen. Der Formelausdruck $\int f(x)\,dx$ bezeichnet also eine Funktion oder eine Menge von Funktionen, genannt das *unbestimmte Integral* von f. Im Gegensatz dazu bezeichnet das *bestimmte* Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nach Definition 6.1 eine reelle Zahl. Zur Berechnung eines bestimmten Integrals ermittelt man in der Praxis also zunächst ein unbestimmtes Integral, d.h. de facto eine beliebige Stammfunktion F und bildet die Differenz $F(b) - F(a)$ der Funktionswerte an den Integrationsgrenzen.

Zur rechnerischen Ermittlung von Stammfunktionen bietet es sich an, nach Umkehrungen der Differentiationsregeln aus Satz 15 zu suchen. Leider gelingt das nur in gewissen Fällen, wie bei Polynom- und Potenzfunktionen, exp, sin, cos und vereinzelten weiteren Beispielen. Schon die Umkehrung von Produktregel und Kettenregel liefern in Gestalt von partieller Integration und Substitutionsregel Methoden, die nur in manchen Fällen zum Ziel führen. Für manche Funktionen wie $\frac{\sin x}{x}$ und $e^{-\frac{x^2}{2}}$ (Normalverteilung!) kann man sogar zeigen, dass Stammfunktionen wegen des Hauptsatzes 19 zwar existieren, aber nicht elementar dargestellt werden können. Deshalb hat man auch andere, insbesondere numerische Methoden zur Integration entwickelt. Es ist eine Ermessensfrage, wie viel Zeit man im Unterricht für Integrationsmethoden investieren möchte. Im Gegensatz zu den universell wirksamen Ableitungesregeln aus Satz 15 wird jede Liste von Integrationsregeln aber notgedrungen immer nur Stückwerk bleiben.

[8] Das allgemeine Kriterium hierzu, dessen Beweis allerdings den Rahmen des Schulunterrichts deutlich sprengt, besagt, dass eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn sie beschränkt ist und die Menge U der Unstetigkeitsstellen eine sogenannte *Lebesgue-Nullmenge*, was explizit bedeutet: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folge von Intervallen I_n, $n \in \mathbb{N}$, deren Vereinigung V die Menge U enthält und deren Längen λ_n Glieder einer konvergenten Reihe mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < \varepsilon$ sind. Integrierbarkeit hat also tatsächlich viel mit Stetigkeit zu tun.

7. Resümee

Der Begriff des Grenzwertes zieht sich mit geringfügigen Variationen wie ein Rückgrat durch die gesamte Analysis. Immer wieder geht es dabei um die Approximation eines gesuchten Wertes (bei uns: einer reellen Zahl) durch Näherungen, die in gewissem Sinn leichter (z.B. mit endlichen Mitteln) fassbar sind. Begrifflich ist der gesuchte Wert trotzdem exakt definiert, wenn die Einhaltung einer *beliebig* klein vorgegebenen positiven Fehlerschranke (traditionell meist mit ε bezeichnet) garantiert werden kann unter der Bedingung, dass bei der Bestimmung der Näherung ein jeweils angemessener Parameter *hinreichend* gut gewählt wird. Im Falle des Folgengrenzwertes und beim Wert einer unendlichen Reihe ist dieser Parameter der Folgenindex n, der hinreichend groß gesetzt werden muss. Im Falle des Grenzwertes einer Funktion und ihrer Stetigkeit sowie bei ihrer Ableitung an einer Stelle x_0 muss ein (positiver) Abstand $|x-x_0|$ hinreichend klein gewählt werden. Im Fall des Integrals muss einer Zerlegung Z hinreichend fein sein. Die gemeinsame logische Struktur besteht also in der Abfolge dreier logischer Quantoren, verbal: Für alle $\varepsilon > 0$ (Allquantor) gibt es einen gewissen Parameterwert (Existenzquantor), so dass für diesen und alle besseren Wahlen des Parameters (Allquantor) die Fehlerschranke ε eingehalten wird. Auf die drei Quantoren folgt daher eine Implikation der Struktur: „Wenn der Parameter gut genug ist, dann ist der Fehler $< \varepsilon$“. In Formeln für Folge, Reihe, Funktion, Ableitung und Integral:

$$\begin{array}{rlrrr}
\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha: & \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 & \forall n: & n\geq n_0 \Rightarrow & |a_n-\alpha|<\varepsilon \\
\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha: & \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 & \forall n: & n\geq n_0 \Rightarrow & \left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_n-\alpha\right|<\varepsilon \\
\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha: & \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 & \forall x\neq x_0: & |x-x_0|<\delta \Rightarrow & |f(x)-\alpha|<\varepsilon \\
f'(x_0) = \alpha: & \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 & \forall x\neq x_0: & |x-x_0|<\delta \Rightarrow & \left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\alpha\right|<\varepsilon \\
\int_a^b f(x)\,dx = \alpha: & \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 & \forall Z: & \|Z\|<\delta \Rightarrow & O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon
\end{array}$$

Ein sinnvoller Mathematikunterricht wird diese Analogien nutzen und so mehreren Anliegen gleichzeitig gerecht werden:

- Ein zwar notwendiger, für sich alleine aber unbefriedigender, weil nebuloser „intuitiver Grenzwertbegriff“ wird durch klare Begriffsbildungen ergänzt.
- Durch die Identifikation des begrifflichen Kerns insbesondere mit symbolischer Unterstützung durch logische Quantoren werden fünf Stoffkapitel zum Grenzwertbegriff (Folgen, Reihen, Funktionen und Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung) vereinheitlicht und somit besser überschaubar.
- Mit klaren Begriffen entsteht automatisch auch ein klarer Blick dafür, welche über die Definitionen hinausgehenden Inhalte relevant sind.
- Der Zusammenhang zwischen all diesen Inhalten fördert das Bewusstsein für die Mathematik als sinnvollem Ganzen, das weit mehr ist als ein unübersichtliches Chaos von Einzelheiten.
- Es bieten sich unzählige, in diesem Artikel aus Platzgründen gar nicht im Einzelnen hervorgehobene Gelegenheiten, jene vielfältigen Aspekte der Mathematik anzusprechen, die es laut Lehrplan in der AHS-Oberstufe (siehe Lehrplan (2016)) zu vermitteln gilt.

Literatur

Lehrplan: *AHS-Lehrpläne Oberstufe neu: Mathematik.* Am 10.9.2018 verfügbar unter: `https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf`

Reinhard Winkler. *Wir zählen bis drei – und sogar darüber hinaus.* DH[9] 40 (2007/08), 129-141.

Reinhard Winkler. *Die reellen Zahlen sind anders.* DH[9] 41 (2008/09), 140-153.

Reinhard Winkler. *Im Anfang war die Exponentialfunktion.* DH[9] 44 (2011/12), 98-109.

Reinhard Winkler. *Dynamische Systeme als Chance für den Schulunterricht*. Druckversion: DH[9] 46 (2013/14), 108-122. Langversion nur online verfügbar.

Reinhard Winkler. *Der Grenzwert – Zentralbegriff der Analysis* Druckversion: DH[9] 51 (2018/19). Langversion nur online verfügbar.

[9] Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) – ehemals Didaktikhefte der ÖMG, online verfügbar unter `https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html`, meine eigenen Artikel auch unter `http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/`.