

# Dynamische Systeme als Chance für den Schulunterricht

REINHARD WINKLER (TU WIEN)

Dynamische Systeme sind nicht nur Gegenstand aktueller mathematischer Forschung auf höchstem Niveau. Sie bieten auch ein reichhaltiges Angebot für den Schulunterricht. Eine wesentliche Unterscheidung ist die zwischen diskretem und kontinuierlichem Zeitparameter. Im diskreten Fall stößt man auf Iterationen einer Abbildung  $T : X \rightarrow X$  von einer Menge  $X$  auf sich selbst, im kontinuierlichen auf (autonome) Differentialgleichungen. Beide Themenkreise werden vor allem anhand von Beispielen vorgestellt, die sich großteils auch in den Schulunterricht einbauen lassen. Dabei können wichtige Grundideen vielfältiger Teilgebiete der Mathematik vermittelt werden. Ein Anhang enthält Beweise, deren Ausgliederung aus dem Haupttext einer technischen Überfrachtung entgegenwirken soll. Achtung, dieser Anhang fehlt in jener Fassung dieses Artikels (Winkler (2014 Kurzversion)), die in den Didaktikheften abgedruckt ist.

## 1. Einleitung

### 1.1. Dynamische Systeme als mathematisches Querschnittsthema

Dynamische Systeme sind in mehrfacher Hinsicht faszinierend (für eine ziemlich umfangreiche Darstellung sei auf Katok, Hasselblatt (1995) verwiesen, leichter zugänglich ist Peitgen et al. (1994) mit Schwerpunkt auf dem Thema *Chaos*). Aus der Sicht der reinen Mathematik bieten sie Verbindungen zu den meisten wichtigen Teilgebieten. Gleichzeitig sind sie von höchster Relevanz für die Anwendungen. Und schließlich eröffnen sie auch für den Schulunterricht sehr attraktive Zugänge. Letzteres steht im Mittelpunkt dieses Artikels. Andere didaktisch orientierte Artikel zu gewissen Aspekten des Themas sind Humenberger (2010) und Götz, Hofbauer (2013).

Ein wesentliches Instrument der Darstellung, welches sich bei dynamischen Systemen besonders anbietet, ist die Betonung von Querverbindungen; sowohl innerhalb der Mathematik, zur Beschreibung von Phänomenen aus anderen Wissenschaften wie auch zur Lösung technischer Probleme.

Als mathematisches Teilgebiet werden dynamische Systeme durch eine Klammer zusammengehalten, die nicht in einer speziellen Methodik oder einer bestimmten grundlegenden mathematischen Theorie besteht, auf der sie fußen. Das Schlagwort *dynamisch* bezieht sich nämlich zunächst auf einen außermathematischen Aspekt, und zwar auf die Änderung von Zuständen in der Zeit. Die genauere Natur dieser Zustände kann zunächst völlig offen bleiben. Diese Offenheit bedingt, dass je nach zu modellierendem Gegenstand ganz unterschiedliche mathematische Strukturen ins Spiel kommen. So gibt es kaum ein nennenswertes Teilgebiet der Mathematik, das nicht auch im Kontext dynamischer Systeme eine Rolle spielt. In diesem Sinn wollen wir dynamische Systeme eher als mathematisches Querschnittsthema denn als mathematische Teildisziplin auffassen. Bevor wir dies vertiefen, ist es zielführend, sich dem Thema unter dem Gesichtspunkt der Anwendungen zu nähern.

### 1.2. Dynamische Systeme als Mathematik von Zeit und Kausalität

Der Gegenstand der Mathematik selbst sind keine physischen Objekte, sondern idealisierte, oft abstrakte. Weil den Mathematiker nichts daran hindert, Idealisierungen und Abstraktionen nach Gutdünken vorzunehmen, gibt das der Mathematik eine enorme Freiheit. Doch bedeutet das keineswegs Beliebigkeit. Denn Mathematik soll vor allem die Möglichkeiten menschlichen Weltverständnisses ausloten. Daraus ergibt sich eine enge Anbindung an grundlegende (in einem, wenn auch nicht logischen, so doch entwicklungspsychologischen Sinne vielleicht sogar apriorische) Kategorien wie, um nur fünf besonders wichtige zu nennen, die Zahl (vgl. Dehaene (1999)) oder – nach Kant – der Raum, die Zeit und die Kausalität – und darüber hinaus, als Antipode der Kausalität, der Zufall. Zwanglos ordnen wir der Zahl die mathematischen Gebiete Zahlentheorie und Algebra zu, dem Raum die Geometrie, der Kausalität den Funktionsbegriff (als Zuordnung Ursache  $\mapsto$  Wirkung) und dem Zufall die Stochastik. Und wie verhält es sich mit der Zeit?

Um Missverständnisse zu vermeiden: Hier ist der Begriff *Zeit* nicht im Sinn der Relativitätstheorie gemeint, sondern zunächst in einem eher naiven oder – vielleicht genauer – in einem anthropologisch-psychologischen Sinn. Mathematisch formuliert: Wir erleben die Zeit als ein eindimensionales Kontinuum, das sich in befriedigender Weise als Zahlengerade  $\mathbb{R}$  modellieren lässt; genauso wie eine Koordinatenachse im Anschauungsraum. Insofern erhalten wir nichts Neues gegenüber elementaren geometrischen Begriffen. Doch kommt es uns vor allem auf die zeitliche Abfolge von Zuständen an, sofern diese in einer Beziehung von Ursache und Wirkung stehen. Es geht also um Kausalbeziehungen, die ihrerseits unveränderlichen Gesetzen folgen. Damit ist ein wesentliches Ziel unseres Strebens nach Erkenntnis benannt: Verständnis des Veränderlichen durch das Unveränderliche oder, anders formuliert, Strukturierung der Zeit durch das Wirken von Kausalität in Form von Naturgesetzen.

Bei allen Relativierungen durch die Erkenntnisse der modernen Physik wie Unschärferelation u.ä. wirkt in uns dennoch eine der Aufklärung verpflichtete Überzeugung, dass viele für uns höchst relevante Vorgänge im Rahmen rational fassbarer Kausalitäten verstanden werden können – je deterministischer, desto klarer erscheinen sie uns in der Regel. Dynamische Systeme sind die mathematischen Modelle solcher Vorgänge.

### 1.3. Überblick

Nach der Einleitung soll in Kapitel 2 die mathematische Modellierung dynamischer Systeme besprochen werden. Am einfachsten ist diese im Fall diskreter Zeit (Abschnitt 2.1), wo alles auf die Iteration von Transformationen  $T : X \rightarrow X$ , d.h. Funktionen (Abbildungen) von einer Menge  $X$  (Zustands- oder Phasenraum) auf sich selbst hinausläuft. Bei kontinuierlicher Zeit (2.2) sind schon anspruchsvollere Überlegungen, die typischer Weise zu Differentialgleichungen führen, erforderlich. Trotzdem gibt es eine abstraktere Sichtweise, die beide Fälle vereinheitlicht, nämlich die Untersuchung von sogenannten Aktionen von Gruppen und Halbgruppen, die – nicht für den Unterricht selbst, sondern als Hintergrundinformation für Lehrende – in 2.3 kurz vorgestellt werden.

Es folgen in Kapitel 3 mehrere charakteristische Beispiele bzw. Beispiellklassen von dynamischen Systemen mit diskreter Zeit. Die einzelnen Abschnitte behandeln zunächst Grundbegriffe wie Fix- und periodische Punkte (3.1), dann lineares  $T$  (3.2), die Fixpunkteigenschaft von konvergenten Orbits unter stetigem  $T$  (3.3), Beispiele dazu im Fall des Intervalls (3.4 und 3.5) oder des Kreises (3.6). Verzichtet man auf die Stetigkeit von  $T$ , stößt man fast zwangsläufig auf Transformationen von Folgen über endlichen Alphabeten (symbolische Dynamik, 3.7) und auf die (maßtheoretische) Ergodentheorie (3.8). Im Kapitel 4 begnügen wir uns mit einer kleinen Auswahl wichtiger Themen. Um im Haupttext wesentliche Ideen besser zu verdeutlichen und den Lesefluss möglichst nicht durch formal aufwendige Rechnungen und Beweisführungen zu unterbrechen, werden solche in einem Anhang (Kapitel 5) nachgetragen: zur Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und ihren Konsequenzen (5.1), zum Banachschen Fixpunktsatz (5.2), zur Isomorphie gewisser dynamischer Systeme (5.3), rund um den Mittelwertsatz (5.4), zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (5.5) und zur Vollständigkeit des Raums aller stetigen Funktionen (5.6).

## 2. Mathematische Modellbildung

### 2.1. Diskrete Zeit – der informatische Blick

Bei dynamischen Systemen mit diskreter Zeit wird ausgehend von einem Anfangszustand  $x_0 \in X$  eine Folge weiterer Zustände  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , durch die rekursive Vorschrift  $x_{n+1} = T(x_n)$  generiert. Diesem Modell kann die Vorstellung unterlegt werden, dass  $X$  die Menge aller möglichen Zustände eines Systems ist und  $T : X \rightarrow X$  eine Funktion, die jedem möglichen Zustand  $x$  in deterministischer Weise den Folgezustand  $T(x)$  im nächsten (diskreten) Zeitpunkt zuordnet.  $T(x)$  kann also als kausale Folge des Zustandes  $x$  gedeutet werden, die sich in einem einzigen Schritt, der die kleinste betrachtete Zeiteinheit in Anspruch nimmt, einstellt.

Zu jeder Funktion  $T : X \rightarrow X$  und zu jedem Anfangswert  $x_0 \in X$  erhalten wir die Folge  $(T^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ . Dabei bedeutet  $T^n$  die  $n$ -fache Hintereinanderausführung von  $T$ . Es ist unmittelbar klar (Induktion), dass diese Folge die eindeutige Lösung der Rekursion  $x_{n+1} = T(x_n)$  bei Vorgabe von  $x_0$  ist. Man beachte, dass die hier angesprochene Induktion nicht nur für die Mathematik fundamental ist (siehe z.B. Winkler (2008)), sondern auch für die Informatik.

Als **dynamisches System mit diskreter Zeit** definieren wir nun ein Paar  $(X, T)$ , wobei  $X$  eine Menge (oft mit zusätzlicher Struktur) ist und  $T : X \rightarrow X$  eine Abbildung von  $X$  auf sich selbst. Die Untersuchungen von  $(X, T)$  beschäftigen sich vorwiegend damit, mit Hilfe der Kenntnis von  $x_0$  und  $T$  möglichst weitreichende Aussagen über die Menge aller  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , (den **Orbit** von  $x_0$ ) bzw., genauer, über die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (die **Trajektorie** von  $x_0$ ) zu machen, insbesondere über ihr Verhalten für  $n \rightarrow \infty$ .

Man beachte, dass bei bijektivem  $T$ , also bei Existenz einer Umkehrabbildung  $T^{-1}$ , als Menge der Zeitpunkte statt  $\mathbb{N}$  auch  $\mathbb{Z}$  genommen werden kann. Das bedeutet, dass das dynamische System keinen Anfangszustand hat, sondern eine unendliche Vergangenheit.

## 2.2. Kontinuierliche Zeit – der physikalische Blick

Auf den ersten Blick ist die Situation bei dynamischen Systemen mit kontinuierlicher Zeit völlig anders, weil es ja keine kleinste Zeiteinheit gibt, für die Übergänge von einem Zustand zum nächsten durch eine einzige Funktion  $T$  beschrieben werden können. Es liegt daher nahe, für jede denkbare Zeitspanne  $t > 0, t \in \mathbb{R}$ , eine Transformation  $F_t : X \rightarrow X$  zu betrachten, welche modelliert, wie ein Zustand  $x$  nach  $t$  Zeiteinheiten in einen Zustand  $F_t(x)$  übergeht.

Will man wieder deterministische Abläufe beschreiben, so soll der Zustand nach  $s+t$  Zeiteinheiten nicht davon abhängen, ob bereits nach  $s$  Einheiten eine Zwischenbeobachtung gemacht wird oder nicht, als Formel:  $F_t(F_s(x)) = F_{s+t}(x)$ . Der Eigenschaft  $T^n \circ T^m = T^{n+m} = T^m \circ T^n$  (für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ ) im diskreten Fall entspricht also im kontinuierlichen Fall:

$$F_t \circ F_s = F_{s+t} = F_s \circ F_t \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Bevor wir in 2.3 den abstrakten algebraischen Kern und die entsprechenden Verallgemeinerungen kurz beleuchten, wollen wir einer für uns hier noch wichtigeren Sichtweise nachspüren. Sie ist der Vorstellung des Kontinuums  $[0, \infty[$  oder  $\mathbb{R}$ , welchem die Zeitpunkte  $t$  entnommen sind, inhärent.

Der Einfachheit halber wollen wir den Zustandsraum  $X = \mathbb{R}$  oder  $X \subseteq \mathbb{R}$  voraussetzen, was etwa dann sinnvoll ist, wenn als mögliche Zustände eindimensionale Messgrößen vorliegen. Für gegebenes  $x_0 \in X$  (Anfangszustand) schreiben wir  $x_t = F_t(x_0)$  für den resultierenden Zustand zum Zeitpunkt  $t$ . Wir fassen also  $x$  selbst als Funktion  $x : \mathbb{R} \rightarrow X, t \mapsto x(t) = x_t$ , mit  $x(t) = F_t(x_0)$  auf. Dem entspricht im diskreten Fall die Folge (= Funktion auf  $\mathbb{N}$ )  $(T^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow X, n \mapsto x_n = T^n(x_0)$ .

Bei den meisten real auftretenden Prozessen in der Natur erwarten wir, das Stetigkeitsprinzip *natura non facit saltus*<sup>1</sup> ausweitend, dass sich der Zustand  $x_{t+\varepsilon}$  bei kleinem  $\varepsilon$  nicht nur wenig von  $x_t$  unterscheidet, sondern dass diese Abweichung sogar annähernd proportional ist zu  $\varepsilon$  mit einem geeigneten Proportionalitätsfaktor, der selbst wieder vom Zustand  $x_t$  abhängt und für den wir daher  $f(x_t)$  schreiben. Wir haben also

$$x_{t+\varepsilon} = F_\varepsilon(x_t) \approx x_t + \varepsilon f(x_t)$$

bzw. umgeformt und genauer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_{t+\varepsilon} - x_t}{\varepsilon} = f(x_t).$$

Fassen wir  $x_t$  als Funktionswert einer Funktion (Trajektorie)  $x : t \mapsto x_t$  zum Zeitpunkt  $t$  auf, so wird diese Beziehung zur Differentialgleichung

$$x' = f(x), \quad \text{genauer: } x' = f \circ x, \quad \text{d.h.: } x'(t) = f(x(t)) \text{ für alle } t.$$

<sup>1</sup> Die Natur macht keine Sprünge.

Dynamische Systeme mit kontinuierlicher Zeit (auch hier kann durch Erweiterung auf reelle  $t \leq 0$  auch eine Vergangenheit mit einbezogen werden) sind also im Wesentlichen Differentialgleichungen der oben angegebenen Form. Man spricht auch von **autonomen Differentialgleichungen**; im Gegensatz zu solchen, wo  $f = f(x, t)$  auch noch vom Zeitpunkt  $t$  abhängt. Dies entspräche einer Veränderung der zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeit im Laufe der Zeit, abweichend vom eingangs dargestellten Paradigma.

Klarerweise kann der Zustandsraum  $X$  auch höherdimensional sein, z.B.  $X = \mathbb{R}^n$  oder eine Teilmenge davon. Wesentlich ist vor allem die lineare Struktur oder genauer: dass darin sinnvoll Differentialrechnung betrieben werden kann. In Kapitel 4 werden wir Beispiele und auch allgemeine Theorie dazu behandeln.

### 2.3. Aktionen von Gruppen und Halbgruppen als gemeinsamer Rahmen

Dieser kurze Abschnitt ist nicht für den unmittelbaren Gebrauch im Schulunterricht gedacht, sondern als Hintergrundwissen für Lehrende. Wir werden im Weiteren nicht darauf zurückgreifen. Es geht um eine gemeinsame Verallgemeinerung der beiden behandelten Typen dynamischer Systeme (diskrete und kontinuierliche Zeit), nämlich um die Aktion von Gruppen und Halbgruppen.

Eine **Halbgruppe** ist bekanntlich eine Menge  $H$  zusammen mit einer binären Operation  $\cdot$  auf  $H$ , d.h. mit einer Abbildung  $\cdot : H \times H \rightarrow H$ ,  $(h_1, h_2) \mapsto h_1 \cdot h_2$  (wir schreiben statt  $h_1 \cdot h_2$  oft einfach  $h_1 h_2$ ), welche das **Assoziativgesetz** erfüllt:  $(h_1 h_2) h_3 = h_1 (h_2 h_3)$  für alle  $h_1, h_2, h_3 \in H$ . Gibt es ein **neutrales Element**  $e \in H$  (d.h.  $he = eh = h$  für alle  $h \in H$ ) spricht man auch von einem **Monoid**. Unter einer **Halbgruppenaktion** von  $H$  auf einer Menge  $X$  versteht man eine Abbildung  $\alpha : H \times X \rightarrow X$ , Schreibweise  $\alpha : (h, x) \mapsto \alpha(h, x) = hx$ , mit  $h_1(h_2 x) = (h_1 h_2)x$  für alle  $x \in X$ . Ist  $e \in H$  neutrales Element und  $ex = x$  für alle  $x \in X$ , so heißt  $\alpha$  sogar eine **Monoid-** oder, wenn  $H$  sogar eine **Gruppe** ist (d.h. überdies zu jedem  $h \in H$  ein **Inverses**  $h^{-1}$  enthält, welches durch  $hh^{-1} = h^{-1}h = e$  gekennzeichnet ist), eine **Gruppenaktion** von  $H$  auf  $X$ .

Man macht sich sofort klar, dass Rekursionen  $x_{n+1} = T(x_n)$  (d.h. Iterationen von  $T$ ) auf der Menge  $X$  im Sinn von Abschnitt 2.1 als Halbgruppen- und sogar Monoidaktionen  $\alpha$  der additiven Halbgruppe  $\mathbb{N}$  mit  $\alpha(n+1, x) = T(\alpha(n, x)) = T^{n+1}(x)$  aufgefasst werden können. Analog entsprechen dynamische Systeme mit kontinuierlicher Zeit Aktionen des additiven Monoids  $[0, \infty[$  der nichtnegativen reellen Zahlen mit  $\alpha(t_1 + t_2, x) = \alpha(t_2, \alpha(t_1, x))$ . Damit allein sind freilich keinerlei Bedingungen hinsichtlich Stetigkeit oder gar Differenzierbarkeit gestellt. Aktionen von Halbgruppen bieten aber eine Möglichkeit, dynamische Systeme sowohl mit diskretem wie auch mit kontinuierlichem Zeitparameter unter einem einheitlichen Begriff zu subsumieren.

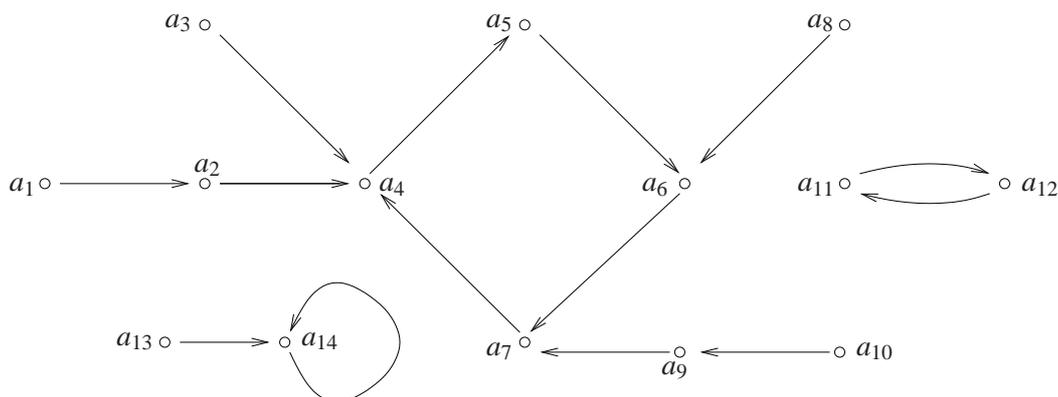
## 3. Beispiele dynamischer Systeme mit diskreter Zeit

### 3.1. Periodische Punkte, Fixpunkte

Die Möglichkeiten für Trajektorien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n := T^n(x)$ , eines festen Punktes  $x = x_0$  unter einer Transformation  $T : X \rightarrow X$  überblickt man, wenigstens sofern  $X$  keine weitere Struktur trägt, schnell: Angenommen, ein Punkt tritt in der Trajektorie mehrmals auf, d.h.  $x_{n_1} = x_{n_2}$  für gewisse  $n_1 < n_2 \in \mathbb{N}$ , so gibt es auch ein kleinstes derartiges  $n_1$  und dazu ein kleinstes  $n_2 > n_1$ . Das bedeutet, dass  $x_0, x_1, \dots, x_{n_1}, \dots, x_{n_2-1}$  alle verschieden sind, dann jedoch wegen  $x_{n_1+1} = T(x_{n_1}) = T(x_{n_2}) = x_{n_2+1}$  und, induktiv,  $x_{n_1+k} = x_{n_2+k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , eine Periode der Länge  $p = n_2 - n_1$  auftritt, die wir in Zyklenschreibweise notieren als  $(x_{n_1} x_{n_1+1} \dots x_{n_1+p-1})$ . Die vorangehenden Punkte  $x_0, \dots, x_{n_1-1}$  bilden die sogenannte **Vorperiode**. Ist  $n_1 = 0$ , so heißt  $x$  ein **periodischer Punkt**, im Fall  $T(x) = x$ , also  $p = 1$ , **Fixpunkt**. Gibt es gar kein  $n_1$  der beschriebenen Art (was natürlich nur bei unendlichem  $X$  möglich ist), nennen wir  $x$  einen **aperiodischen Punkt**. Die Bestimmung von Fixpunkten und Perioden ist bei allen dynamischen Systemen mit diskreter Zeit von vordringlichem Interesse. Trägt der Zustandsraum  $X$ , auf dem die Transformation  $T : X \rightarrow X$  wirkt, keine zusätzliche Struktur, gibt es über die Trajektorie eines einzelnen Punktes darüber hinaus auch wenig Interessantes zu sagen.

Ist  $X$  endlich, so lassen sich die wesentlichen Aspekte des dynamischen Systems sehr übersichtlich aus

gerichteten Graphen mit der Knotenmenge  $X$  ablesen, wo eine gerichtete Kante (Pfeil)  $a \rightarrow b$  immer dann vorliegt, wenn  $T(a) = b$ . Perioden werden dabei als Kreise sichtbar. Hier ein Beispiel mit  $|X| = 14$ .



Klarerweise ändern sich die dynamischen Eigenschaften eines Systems nicht, wenn wir lediglich die Elemente aus  $X$  durch entsprechende aus einer Menge  $Y$  ersetzen. Man nennt daher allgemein zwei dynamische Systeme  $(X, T_X)$  und  $(Y, T_Y)$  **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  (einen sogenannten **Isomorphismus**) gibt mit  $\phi(T_X(x)) = T_Y(\phi(x))$  für alle  $x \in X$ , d.h. mit  $\phi \circ T_X = T_Y \circ \phi$ ; verlangt man von  $f$  nur Surjektivität, heißt  $(Y, T_Y)$  ein **Faktor** von  $(X, T_X)$ .

Tragen  $X$  und  $Y$  zusätzliche Struktur, so fordert man von  $\phi$  außerdem meist die entsprechende Strukturverträglichkeit. Isomorphe Systeme können vom dynamischen Standpunkt aus als gleich gelten. Wir wollen das an einfachen, aber typischen Beispielen konkretisieren.

### 3.2. Jordansche Normalform linearer Transformationen

Wir betrachten nun ein Beispiel, das wir im Weiteren nicht brauchen und das für den Schulunterricht in dieser Form zu fortgeschritten ist, das aber zeigt, wie neben den später vorherrschenden analytischen Aspekten bei dynamischen Systemen genauso gut algebraische und geometrische ins Zentrum der Aufmerksamkeit treten können.

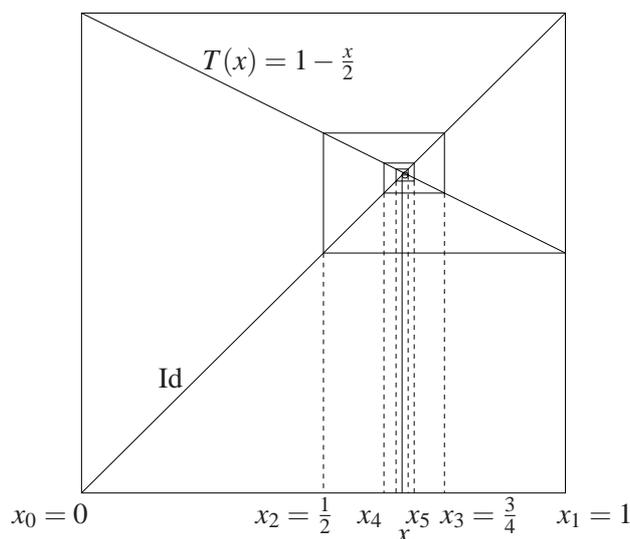
Seien dazu  $X$  und  $Y$  Vektorräume über dem Körper  $\mathbb{C}$  und  $T_X : X \rightarrow X$ ,  $T_Y : Y \rightarrow Y$  lineare Transformationen. Dann soll ein Isomorphismus  $\phi : X \rightarrow Y$  zwischen den dynamischen Systemen  $(X, T_X)$  und  $(Y, T_Y)$  auch ein solcher zwischen den Vektorräumen  $X$  und  $Y$  sein. Insbesondere müssen  $X$  und  $Y$  dieselbe Dimension haben. Ist in so einer Situation zum Beispiel  $x \in X$  ein Eigenvektor zu einem Eigenwert  $\lambda$  von  $T_X$ , so folgt  $T_Y(\phi(x)) = \phi(T_X(x)) = \phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$ . Also ist  $y := \phi(x) \in Y$  ein Eigenvektor von  $T_Y$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Rekapituliert man die Jordansche Normalform quadratischer Matrizen aus der Linearen Algebra, so erkennt man: Die Klassifikation quadratischer komplexer Matrizen im Sinne Jordanscher Normalformen entspricht der Klassifikation linearer dynamischer Systeme auf den entsprechenden endlichdimensionalen Vektorräumen.

### 3.3. Konvergente Orbits unter stetigen Transformationen

Häufig geht es bei dynamischen Systemen  $(X, T)$  vor allem um das langfristige Verhalten, d.h. mathematisch gesprochen um die Konvergenz von Trajektorien, was eine topologische Struktur auf  $X$  voraussetzt. Besonders interessant sind dann stetige  $T$ . Wir beginnen mit dem einfachen Beispiel

$$X = [0, 1], \quad T : x \mapsto 1 - \frac{x}{2}.$$

Für den Anfangswert  $x_0 = 0$  lauten die nächsten Werte  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = \frac{3}{4}$ ,  $x_4 = \frac{5}{8}, \dots$ . Die Situation wird veranschaulicht durch folgende, auch **Spinnwebdiagramm** genannte Darstellung. Besonders sei auf die Diagonale (Graph der Identität  $\text{Id}$ ) hingewiesen, auf der allfällige Fixpunkte erkennbar sind.



Allem Anschein nach konvergiert die Trajektorie gegen einen Wert, der dem Schnittpunkt der Diagonale (= der Graph der Funktion Id) mit dem Funktionsgraphen von  $T$  entspricht, das ist die Lösung der Gleichung  $x = 1 - \frac{x}{2}$ , also  $x = \frac{2}{3}$ . Wie die Abbildung suggeriert, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$ . Ein strenger Beweis ergibt sich aus den folgenden einfachen, aber wichtigen Ideen. Einerseits ist wegen der Stetigkeit von  $T$  jeder Grenzwert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  einer Iterationsfolge  $x_{n+1} = T(x_n)$  unter  $T$  notgedrungen ein Fixpunkt von  $T$ :

$$T(x) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Also kommen als Grenzwerte tatsächlich nur  $x$ -Koordinaten (=  $y$ -Koordinaten) der Schnittpunkte der Diagonale mit dem Funktionsgraphen von  $T$  in Frage. Damit ist aber noch nicht garantiert, dass die Iterationsfolge überhaupt konvergiert. Will man das für das vorliegende Beispiel beweisen, wird man fast notgedrungen zu einer Argumentation geführt, die auch in weitaus allgemeinerem Zusammenhang von Interesse ist.

Und zwar kommt es lediglich darauf an, dass die Transformation  $T$  zwei beliebige Punkte  $x, x' \in X$  zusammenzieht, genauer:  $|T(x) - T(x')| \leq \lambda |x - x'|$  mit einem Faktor  $\lambda < 1$  (im Beispiel kann  $\lambda = \frac{1}{2}$  gesetzt werden), in welchem Falle man  $T$  eine **Kontraktion** nennt. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Glieder wird dann mindestens in derselben Weise kleiner wie die Glieder einer konvergenten geometrischen Reihe, was innerhalb  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  die Konvergenz der Iterationsfolge impliziert. Dieselben Überlegungen greifen allgemeiner in jedem vollständigen metrischen Raum. So erhält man den sogenannten **Fixpunktsatz von Banach**<sup>2</sup> in seiner vollen Allgemeinheit:

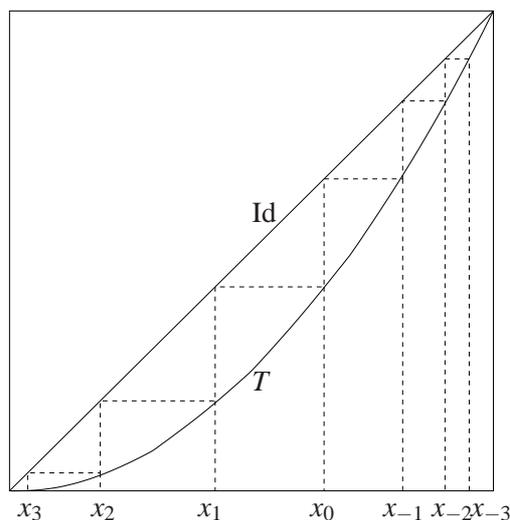
*Jede Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum hat genau einen Fixpunkt. Jede Trajektorie konvergiert gegen diesen Fixpunkt. Die Konvergenzgeschwindigkeit kann mit Hilfe einer geometrischen Reihe abgeschätzt werden.* (Präzisierung und Beweis siehe Anhang 5.2)

Man mache sich klar, dass damit auf einen Schlag viele rekursive Folgen als konvergent identifiziert sind, insbesondere alle der Form  $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$  mit  $|\alpha| < 1$ . Dabei können sowohl  $\beta$  als auch der Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}$  beliebig angenommen werden. Grenzwert ist die (eindeutige) Lösung der Gleichung  $x = \alpha x + \beta$ , also  $x = \frac{\beta}{1-\alpha}$ .

### 3.4. Beispiele isomorpher stetiger Intervallabbildungen

Nochmals betrachten wir das Einheitsintervall  $X = [0, 1]$ , diesmal aber mit der Transformation  $T : x \mapsto x^2$ . Für einen Startpunkt  $x_0 < 1$  erhält man die extrem rasch gegen 0 konvergente Folge der Punkte  $x_n = T^n(x_0) = x_0^{2^n}$ . Da  $T$  auf  $X$  bijektiv ist, lässt sich das System auch in die Vergangenheit verfolgen mit entsprechenden Punkten  $x_{-n}$ .

<sup>2</sup> Stefan Banach (1892-1945)



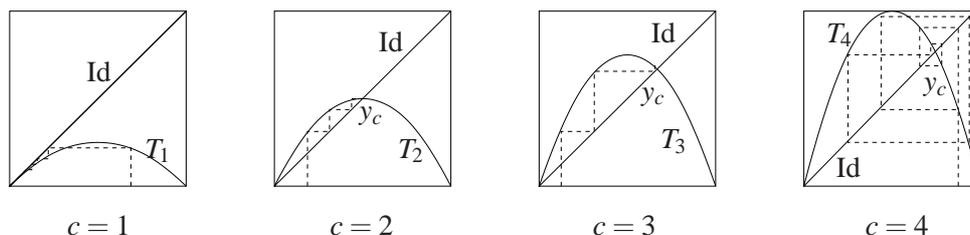
Hätten wir statt der Transformation  $T = T_2 : x \mapsto x^2$  beispielsweise  $T_3 : x \mapsto x^3$  genommen, hätte sich qualitativ nicht viel geändert, denn  $([0, 1], T_2)$  und  $([0, 1], T_3)$  erweisen sich als isomorph. Das gleiche ist der Fall, sofern  $I = [a, b]$  irgendein abgeschlossenes Intervall ist und  $T : I \rightarrow I$  eine stetige und streng monoton wachsende Transformation mit  $T(a) = a < b = T(b)$  und  $T(x) < x$  (dual für  $T(x) > x$ ) für alle  $x$  mit  $a < x < b$ . Also: Je zwei Systeme  $(X, T_X)$  und  $(Y, T_Y)$  mit diesen Eigenschaften sind isomorph. An dieser Stelle begnügen wir uns mit dem Verweis auf die anschauliche Plausibilität dieser Behauptung. Eine Beweisskizze findet sich im Anhang 5.3.

Ähnliche Aussagen lassen sich machen, wenn  $T : I \rightarrow I$  weiterhin als stetig und monoton wachsend vorausgesetzt wird, man allerdings Fixpunkte im Inneren von  $I$  zulässt, bei denen die Situationen  $T(x) > x$  und  $T(x) < x$  abwechseln können. Es ist eine wertvolle Übung, sich das im Einzelnen durch den Kopf gehen zu lassen.

Nur geringfügig komplizierter ist die Situation bei monoton fallendem  $T : I \rightarrow I$ , denn dann sind die obigen Überlegungen auf die monoton wachsende Iterierte  $T^{(2)} := T \circ T$ ,  $T^{(2)}(x) = T(T(x))$  anwendbar. Fixpunkte von  $T^{(2)}$  bleiben unter  $T$  selbst entweder ebenfalls fix, oder sie sind Elemente einer Periode von  $T$  der Länge 2. Viel komplizierter kann die Situation jedoch werden, wenn man auf die Monotonie verzichtet, was nun geschehen soll.

### 3.5. Chaos entsteht

Weiterhin betrachten wir stetige Transformationen eines Intervalls, und zwar speziell  $X = [0, 1]$  und  $T = T_c : X \rightarrow X, x \mapsto cx(1-x)$  mit  $0 \leq c \leq 4$ . Der Funktionsgraph ist eine nach unten offene Parabel mit Nullstellen bei 0 und 1 und Maximum  $m_c = \frac{c}{4}$  bei  $x = \frac{1}{2}$ . (Also gilt  $T_c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tatsächlich genau für  $c \in [0, 4]$ .) Fixpunkte sind 0 und, sofern  $c > 1$ , auch  $y_c = 1 - \frac{1}{c}$ . Später wird auch die Ableitung  $T'_c(x) = c(1-2x)$  eine Rolle spielen. Es empfiehlt sich, für  $c$  verschiedene Fälle zu unterscheiden, die mit wachsendem  $c$  immer komplizierter werden. Entsprechend müssen die folgenden Erörterungen zunehmend fragmentarisch bleiben.



1.Fall:  $0 \leq c \leq 1$ . Die Situation ist weitgehend trivial, weil  $T(x) < x$  für alle  $x > 0$  gilt und somit, abgesehen vom Fixpunkt 0, jede Trajektorie streng monoton fallend und beschränkt ist, also konvergiert. Als Grenzwert kommt nur der einzige Fixpunkt 0 in Frage.

2.Fall:  $1 < c \leq 2$ . Wir konstatieren zunächst  $y_c = 1 - \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2}$  und  $m_c = \frac{c}{4} \leq \frac{1}{2}$ . Die Einschränkung von  $T$  auf das Intervall  $I = [0, y_c]$  fällt unter die in Abschnitt 3.4 behandelte Situation mit  $T(x) > x$ . Folglich konvergieren alle Trajektorien, die im Inneren von  $I$  beginnen, monoton wachsend gegen  $y_c$ . Aus symmetrischen Gründen konvergieren Trajektorien mit  $y_c < x_0 \leq \frac{1}{2}$  monoton fallend gegen  $y_c$ . Für  $x_0 > \frac{1}{2}$  schließlich liegt  $x_1 = T(x_0) \leq \frac{1}{2}$  in  $[0, \frac{1}{2}]$ , und wir landen in einer der bereits behandelten Situationen mit Startwert  $x_1$  statt  $x_0$ . Also konvergieren für  $0 < x_0 < 1$  alle Trajektorien gegen  $y_c$ .

3.Fall:  $2 < c \leq 1 + \sqrt{3} = 2.73 \dots$ . Nun gilt  $\frac{1}{2} < y_c \leq \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0.63 \dots$  und  $\frac{1}{2} < m_c \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4} = 0.68 \dots$ . Außerdem spielt jene Zahl  $z_c$  eine Rolle, für die  $T'(z_c) = c(1 - 2z_c) = -1$  gilt, nämlich  $z_c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2c}$ . Es gilt  $\frac{1}{2} < y_c < m_c \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4} = 0.68 \dots \leq z_c$ . Im Intervall  $[\frac{1}{2}, z_c]$  fällt  $T'$  strikt von 0 auf  $-1$ . Damit überlegt man sich (genau genommen mit Hilfe des Mittelwertsatzes, siehe 5.4), dass  $T$  in jedem echten Teilintervall  $[\frac{1}{2} + \varepsilon, z_c - \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , die Voraussetzungen im Banachschen Fixpunktsatz erfüllt. Somit konvergieren alle Orbits mit  $\frac{1}{2} < x_0 < z_c$  gegen den eindeutigen Fixpunkt  $y_c$ . Ähnlich wie im 2.Fall zeigt es sich, dass Trajektorien auch für andere Startwerte  $x_0 > 0$  irgendwann in das Intervall  $I_0 = ]\frac{1}{2}, z_c[$  münden, folglich gegen  $y_c$  konvergieren. Das kann man sich zum Beispiel klar machen, indem man iterativ die Urbilder  $I_{n+1} = T^{-1}(I_n)$  untersucht und feststellt, dass diese eine aufsteigende Mengenfolge  $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$  bilden, deren Vereinigung das gesamte offene Intervall  $]0, 1[$  ausfüllt. Also münden abgesehen von den Randfällen  $x_0 = 0, 1$  alle Trajektorien schließlich in  $I_0$  und konvergieren somit gegen  $y_c = 1 - \frac{1}{c}$ .

4.Fall:  $1 + \sqrt{3} < c \leq 3$ . Die Komplikation gegenüber dem 3.Fall ergibt sich daraus, dass nun  $z_c < m_c$  gilt. Zwar kann  $T$  nun auf das Intervall  $I = [\frac{1}{2}, m_c]$  eingeschränkt werden (man rechne  $T(m_c) > \frac{1}{2}$  nach, woraus aus Monotoniegründen  $T(I) \subseteq I$  folgt), es handelt sich aber nicht mehr um eine Kontraktion. Dennoch kann man sich überlegen, dass alle in  $I$  startenden Trajektorien alternierend gegen  $y_c$  konvergieren, und dass überdies alle Trajektorien mit  $0 < x_0 < 1$  schließlich in diesen Bereich münden. Entscheidend ist, dass an den Randpunkten von  $I$  als Startwert  $x_0$  das gewünschte Verhalten eintritt. Man hat die Folge  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $x_1 = T(x_0) = m_c$ ,  $x_2 = T(x_1) > \frac{1}{2}$  etc. zu betrachten, welche wegen der fallenden Monotonie von  $T$  auf  $I$  die Ungleichungskette  $x_0 < x_2 < \dots < x_3 < x_1$  erfüllt. Zu zeigen bleibt, dass die Limiten  $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$  und  $x'' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1}$  im Fixpunkt  $y_c$  zusammenfallen, d.h. keine Periode der Länge 2 bilden. Dies folgt, sobald geklärt ist, dass die Iterierte  $T^{(2)} = T \circ T$  in  $I$  keinen Fixpunkt außer  $y_c$  hat. Zu diesem Zwecke kann man beispielsweise mittels Kurvendiskussion sicherstellen, dass  $y_c$  die einzige Nullstelle der Funktion  $f(x) = T^{(2)}(x) - x$  in  $I$  ist. Der Aufwand ist beträchtlich, und wir verzichten deshalb hier darauf. Jedenfalls konvergieren auch in diesem Fall noch alle Trajektorien mit  $0 < x_0 < 1$  gegen  $y_c$ .

5.Fall:  $3 < c \leq 4$ . Wir wollen uns überlegen, dass  $T$  in diesem Fall eine echte Periode  $(x_p, y_p)$  ( $x_p \neq y_p$ ) der Länge 2 hat. Es genügt dazu, einen Fixpunkt  $x_p$  der Iterierten  $T^{(2)}$ ,  $T^{(2)}(x) = T(T(x))$ , oder, äquivalent, eine Nullstelle  $x_p$  von  $f(x) := x - T^{(2)}(x)$  zu finden, die strikt zwischen den einzigen Fixpunkten 0 und  $y_c = 1 - \frac{1}{c}$  von  $T$  liegt. Wegen der Stetigkeit von  $f$  und wegen des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen ist dafür wiederum hinreichend, zwei Punkte  $x', x'' \in ]0, y_c[$  zu finden, wo  $f$  unterschiedliches Vorzeichen annimmt. Dazu berechnen wir mit der Kettenregel  $f'(x) = 1 - T'(x)T'(T(x))$ , setzen die beiden Nullstellen  $x = 0$  und  $x_0 = y_c = 1 - \frac{1}{c}$  von  $f$  (Fixpunkte von  $T$ ) ein und erhalten für diese Werte  $f'(x) = 1 - T'(x)^2 = 1 - c^2(1 - 2x)^2$ , also  $f'(0) = 1 - c^2 < 0$  sowie nach kurzer Rechnung  $f'(y_c) = 1 - (c - 2)^2 < 0$ . Hieraus folgt (Mittelwertsatz, siehe 5.4, und stetige Differenzierbarkeit von  $f$ ) für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  einerseits  $f(\varepsilon) < 0$ , andererseits  $f(y_c - \varepsilon) > 0$ . Damit sind die beiden gesuchten Punkte, nämlich  $x' := \varepsilon$  und  $x'' := y_c - \varepsilon$ , gefunden und die Existenz einer Periode der Länge 2 bewiesen.

Klarerweise ist die Analyse des 5.Falles damit noch lange nicht vollständig. Es zeigt sich, dass bei Annäherung  $c \rightarrow 4$  Perioden beliebig großer Länge auftreten und die Situation immer unüberschaubarer wird. Wir haben es mit klassischen Beispielen dynamischer Systeme mit chaotischem Verhalten zu tun. Mehr dazu findet sich in Raith (2009).

### 3.6. Transformationen des Kreises

Durch minimale Modifikation eines Intervalls, nämlich durch Aneinanderkleben (Identifikation) der Endpunkte, erhält man als Raum  $X$  einen Kreis. Wir betrachten die Transformation  $T_\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , welche  $X$  um den Anteil  $\alpha$  einer vollen Umdrehung, das heißt um einen Winkel vom Bogenmaß  $2\pi\alpha$  dreht, vereinbarungsgemäß gegen den Uhrzeigersinn.

Das dadurch resultierende dynamische System kennt (außer für  $\alpha = 0$ ) keine konvergenten Trajektorien. Bei festem  $\alpha$  (und gegebenem Anfangspunkt  $x_0$ , der in diesem Fall jedoch keinen wesentlichen Einfluss auf die interessanten Phänomene hat) entspricht die Iteration von  $T_\alpha$  dem fortgesetzten Abtragen immer desselben Winkels auf dem Kreis  $X$ . Zwei qualitativ verschiedene Fälle sind denkbar. Entweder der Ausgangspunkt  $x_0$  wird nach endlich vielen Schritten wieder erreicht, so dass eine Periode entsteht. Das bedeutet, dass ein Vielfaches  $q\alpha$  von  $\alpha$  ( $q = 1, 2, \dots$ ) ein Vielfaches einer vollen Umdrehung liefert, also  $q\alpha = p \in \mathbb{Z}$ . Das ist genau dann der Fall, wenn  $\alpha = \frac{p}{q}$  rational ist. Ist hingegen  $\alpha$  irrational, so tritt keine Periodizität auf.

Der irrationale Fall ist der interessantere. Man kann nämlich nicht nur zeigen, dass dann jede Trajektorie dicht liegt in  $X$ , d.h. jedes noch so kleine Kreissegment positiver Länge unendlich oft besucht. Diese Besuche treten sogar in einer Weise gleichmäßig auf, dass man von einer **gleichverteilten Folge** spricht: Jedes Kreissegment wird mit einer asymptotischen Häufigkeit besucht, die proportional zu seiner Länge ist. Der beeindruckendste Zugang zu diesen Phänomenen wurde in der bahnbrechenden und wunderschön zu lesenden Arbeit Weyl (1916)<sup>3</sup> erschlossen. Die faszinierende Rolle von Kettenbrüchen in diesem Zusammenhang und die daraus resultierenden zahlentheoretischen Bezüge können an dieser Stelle nur schlagwortartig erwähnt werden.

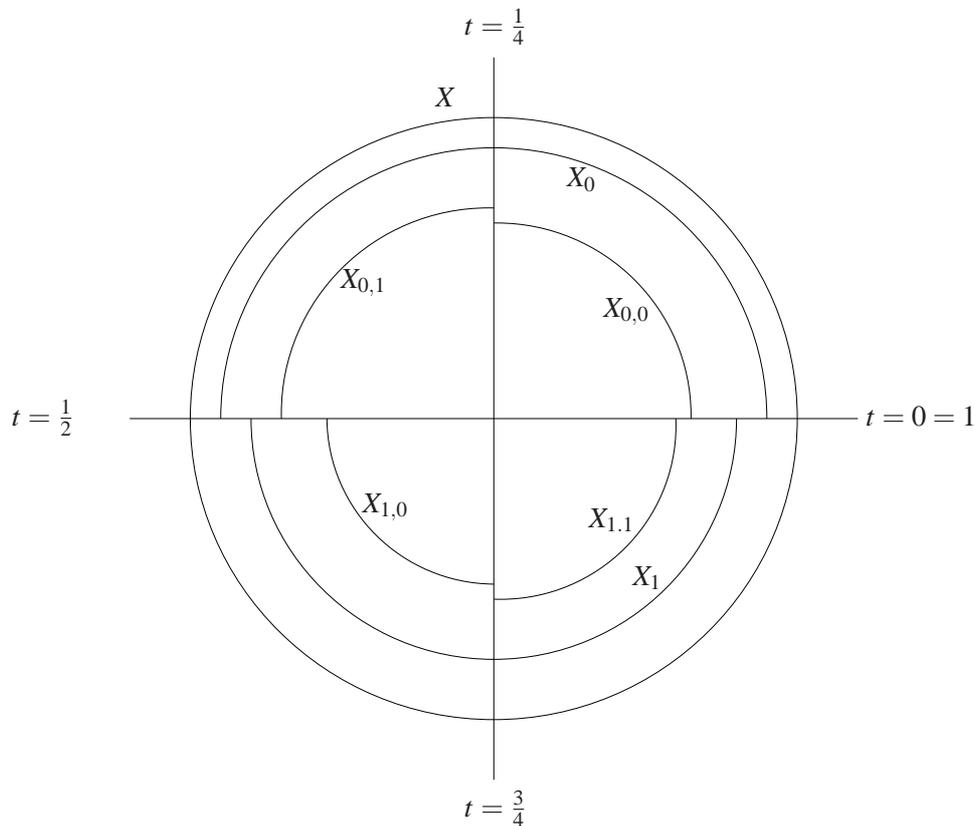
Eine interessante Transformation  $T$  des Kreises ganz anderen Typs entsteht, wenn man nicht um einen konstanten Winkel dreht, sondern diesen z.B. verdoppelt, genauer: Denken wir uns die Punkte des Kreises markiert mit den reellen Zahlen aus  $[0, 1)$ , so geht der Punkt  $t$  über in den Punkt  $T(t) = 2t$ , eventuell modulo 1 reduziert, d.h. wir ersetzen im Fall  $2t \geq 1$  diese Zahl durch  $2t - 1$ . (Interpretiert man den Kreis als komplexen Einheitskreis, so lässt sich diese Transformation auch als  $T : z \mapsto z^2$  auffassen.) Für dieses  $T$  treten plötzlich alle Möglichkeiten periodischer und nichtperiodischer Punkte auf. Für ein besseres Verständnis der Situation lohnt es, eine gänzlich andere Sichtweise einzunehmen, die uns zur Binärdarstellung reeller Zahlen führt.

### 3.7. Symbolische Dynamik

Wir unterteilen den Kreis  $X$  in zwei gleiche Halbkreise, die wir mit  $X_0$  und  $X_1$  bezeichnen (um die Schnittpunkte wollen wir uns vorerst nicht kümmern). Jede dieser Hälften zerlegen wir wieder in Teile (Viertelkreise) mit  $X_0 = X_{0,0} \cup X_{0,1}$  und  $X_1 = X_{1,0} \cup X_{1,1}$  usw. Jedem Punkt  $x \in X$ , der in dieser Prozedur nicht als Schnittpunkt auftritt, ordnen wir jene eindeutig bestimmte Binärfolge  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ ,  $a_i \in \{0, 1\}$ , zu, so dass  $x \in X_{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Man beachte: Schneiden wir den Kreis  $X$  beim Punkt  $t = 0$  auf und interpretieren wir ihn nun als Einheitsintervall, so entspricht diese Vorgangsweise genau der Darstellung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 im Binärsystem durch unendliche 0-1-Folgen.

Nur kurz zu den Schnittpunkten: Diese entsprechen genau den dyadischen Zahlen, d.h. jenen von der Gestalt  $t = \frac{p}{2^k}$  mit natürlichen Zahlen  $p$  und  $k$ . So einem  $t$  können zwei verschiedene Binärdarstellungen zugeordnet werden, z.B. für  $t = \frac{1}{4}$  nicht nur  $0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots$ , sondern auch  $0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots$  (analog zu  $1, 000 \dots = 0, 999 \dots$  im dekadischen System). Da es nur abzählbar viele, im Vergleich zu allen  $t$  im Einheitsintervall also vergleichsweise verschwindend wenige dyadische Zahlen gibt, erlauben wir uns, diese weiterhin stiefmütterlich zu behandeln.

<sup>3</sup> Hermann Weyl (1885-1955)



Folgen wir der Trajektorie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n = T^n(x)$ , eines Punktes  $x_0 \in X$  mit zugeordneter Binärfolge  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  unter der Transformation  $T : t \mapsto 2t$  aus 3.6, so beobachten wir: Für  $x_n \in I_0$  ist  $a_n = 0$ , für  $x_n \in I_1$  ist  $a_n = 1$ . Die Binärfolge von  $x$  beschreibt also gerade seine Trajektorie unter  $T$ . Ersetzt man  $x$  durch  $T(x)$ , entspricht das in der Trajektorie der Streichung von  $a_0$ , so dass die Folge  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  übergeht in die Folge  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ . Diese Transformation von Folgen nennt man auch die **Shift**-Abbildung. Man bezeichnet sie meist mit  $\sigma$ . Aus dem dynamischen System  $(X, T)$  haben wir also ein System  $(Y, \sigma)$  erhalten, wobei  $Y$  die Menge aller Binärfolgen bezeichnet. In  $Y$  treten Binärfolgen mit allen möglichen  $\sigma$ -Perioden auf, welchen gleichartige Perioden auch im ursprünglichen System  $(X, T)$  entsprechen.

Wegen der erwähnten Eindeutigkeitsprobleme der Binärdarstellung für dyadische  $t \in X$  sind die beiden Systeme  $(X, T)$  und  $(Y, \sigma)$  nicht isomorph im strengen Sinn. Trotzdem enthalten sie weitgehend dieselbe Information. Die Symbole 0 und 1 erlauben eine Codierung des dynamischen Verhaltens von  $(X, T)$  in dem beschriebenen Sinn, weshalb man von **symbolischer Dynamik** spricht.

Wie können wir die Verwandtschaft der Systeme  $(X, T)$  und  $(Y, \sigma)$  präziser fassen und neue Einsichten daraus gewinnen? Dazu ist wieder ein neuer Gesichtspunkt hilfreich.

### 3.8. Maßtheoretische Ergodentheorie

Wir betrachten weiterhin die beiden Systeme  $(X, T)$  und  $(Y, \sigma)$ , wobei  $X$  jetzt der zum halboffenen Einheitsintervall  $[0, 1[$  aufgeschnittene Kreis mit der Transformation  $T : x \mapsto 2x \bmod 1$  sei,  $Y$  die Menge aller Binärfolgen  $y = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $a_n \in \{0, 1\}$ , und  $\sigma$  der Shift auf  $Y$ .

Die Zuordnung, welche jedes  $x \in X$  in seine Binärdarstellung  $y \in Y$  verwandelt, ist, wie bereits festgestellt, keine Abbildung im strengen Sinn, weil zu jedem dyadischen  $x$  zwei verschiedene Darstellungen gehören. Der bereits angesprochene Gesichtspunkt, dass die dyadischen  $x$  innerhalb  $X$  einen so kleinen Anteil haben, dass wir von ihnen absehen können, lässt sich unter Zuhilfenahme der Maßtheorie sehr elegant zu einer rigorosen Theorie ausbauen, indem man Mengen vom Maß 0 mit der leeren Menge identifiziert. Hier ist nicht der Platz, dies genauer auszuführen, daher nur ein paar Impressionen, die dennoch einen guten Eindruck von der Stärke der Ergodentheorie bieten.

Die wesentliche Beobachtung besteht darin, dass die beiden Systeme  $(X, T)$  und  $(Y, \sigma)$  maßtheoretisch

zusammenpassen. Zum Beispiel lässt sich die Menge  $X_0$  aus 3.7 jetzt als das Intervall  $[0, \frac{1}{2}[$  der Länge  $\lambda(X_0) = \frac{1}{2}$  auffassen. In  $Y$  entspricht ihr die Menge  $Y_0$  aller Binärfolgen, die mit 0 beginnen. Interpretieren wir die Folgen  $y \in Y$  als Zufallsfolgen, wie sie durch iterierten Münzwurf zustandekommen, so erhält  $Y_0$  die Wahrscheinlichkeit  $\mu(Y_0) = \frac{1}{2} = \lambda(X_0)$ . Es ist einsichtig, dass sich Entsprechendes auch für andere Teilmengen von  $X$  und  $Y$  sagen lässt, sogar für alle messbaren. Deshalb sind beide Systeme in einem maßtheoretischen Sinn isomorph. Hinzu kommt, dass die beiden Transformationen  $T$  und  $\sigma$  maßerhaltend sind, was definitionsgemäß bedeutet, dass das Maß invariant unter Urbildern ist, d.h.  $\lambda(T^{-1}(M)) = \lambda(M)$  für alle messbaren  $M \subseteq X$ , entsprechend für  $Y, \sigma$  und  $\mu$ .

Die Bedeutung dieser Konzepte wird nicht zuletzt durch den **Birkhoffschen Ergodensatz**<sup>4</sup> (siehe z.B. Walters (1982)) untermauert. Er impliziert u.a. grob gesprochen, dass in maßerhaltenden Systemen, die sich nicht in voneinander unabhängige Teilsysteme zerlegen lassen (sogenannte **ergodische Systeme**), Trajektorien sich insofern wie Zufallsfolgen verhalten, als ein **starkes Gesetz der großen Zahlen** gilt (siehe auch Winkler (2013)): Arithmetische Mittel von Funktionswerten entlang von Trajektorien konvergieren mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen den Erwartungswert.

## 4. Beispiele dynamischer Systeme mit kontinuierlicher Zeit

### 4.1. Integration und die Fallgesetze des Galilei

Ein erstes, einfaches Beispiel für die in 2.2 allgemein beschriebene Situation bei kontinuierlicher Zeit ergibt sich, wenn wir einen aus einer gewissen (nicht zu großen) Höhe frei auf den Erdboden fallenden Körper untersuchen und uns für die Fallhöhe  $s(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  interessieren. Wie erstmals Galileo Galilei (1564-1641, wir gehen im Folgenden über den damaligen allgemeinen Wissensstand jedoch in mancherlei Hinsicht hinaus) wollen wir im Gedankenexperiment vom Luftwiderstand absehen. Dann ist der Körper ausschließlich der Erdbeschleunigung  $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$  ausgesetzt, die wir bei geringen Fallhöhen, wo sich der Abstand zum Schwerpunkt der Erde relativ wenig ändert, als konstant annehmen dürfen.

Weil die Beschleunigung als Ableitung der (senkrecht nach unten gerichteten) Geschwindigkeit  $v = v(t)$  nach der Zeit  $t$  definiert ist, haben wir  $v'(t) = g$ . Einfache Integrationsregeln zeigen, dass genau die Funktionen der Gestalt  $v(t) = gt + c$  mit einer Konstanten  $c$  diese Eigenschaft haben (hier fließt der Mittelwertsatz ein, siehe auch 5.4), wobei hier  $c = v(0)$  zu setzen ist. Die Geschwindigkeit  $v$  wiederum ist die Ableitung des Weges  $s = s(t)$  nach  $t$ , also  $s'(t) = v(t) = gt + v(0)$ , was analog zu

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 + v(0)t + s(0)$$

führt.

Kennen wir den Anfangszustand (Ort  $s(0)$  und Geschwindigkeit  $v(0)$ ) des Körpers zu Beginn, so bestimmt die Konstanz des wirksamen Naturgesetzes (Erdbeschleunigung) die weitere Entwicklung des dynamischen Systems also vollständig. Es liegt deshalb nahe, den zweidimensionalen Zustandsraum  $X = \mathbb{R}^2$  für Ort und Geschwindigkeit heranzuziehen. Dann lässt sich mit der Notation aus Abschnitt 2.2  $F_t(s(0), v(0)) = (s(t), v(t))$  oder, allgemeiner,  $F_t(s(t_0), v(t_0)) = (s(t_0 + t), v(t_0 + t))$  schreiben. Bei eindimensionaler Modellierung wäre die ein dynamisches System kennzeichnende Autonomie verlorengegangen, weil ja  $s(t)$  nicht allein von  $s(0)$ , sondern auch von  $v(0)$  abhängt. Sind diese beiden Anfangswerte gegeben, ist die weitere Entwicklung des Systems aber festgelegt. Diesen Aspekt werden wir noch im Kontext von Differentialgleichungen vertiefen. Zunächst sind aber Bemerkungen über die beiden vereinfachenden Modellannahmen, nämlich die Vernachlässigung des Luftwiderstandes und die Konstanz von  $g$ , am Platz.

<sup>4</sup> George David Birkhoff (1884-1944)

## 4.2. Modellverfeinerungen

Bekanntlich ist der Luftwiderstand in Wahrheit keineswegs vernachlässigbar, sondern steigt mit der Geschwindigkeit, genauer: proportional zu  $v^2$ . Dem können wir in unserem mathematischen Modell Rechnung tragen. Als Zustandsraum nehmen wir weiterhin den zweidimensionalen Raum  $X = \mathbb{R}^2$  für alle möglichen Werte von  $(s(t), v(t))$ . Statt der konstanten Beschleunigung  $g$  jedoch arbeiten wir nun mit einer von  $v$  abhängigen, nämlich mit  $a(v) = g - \alpha v^2$ , wobei der Koeffizient  $\alpha$  empirisch zu bestimmen ist. Das führt uns zur Differentialgleichung  $v' = g - \alpha v^2$ . Wie die (ganz analog zu beweisende) höherdimensionale Variante des Satzes in 4.4 zeigt, hat diese Differentialgleichung für jedes vorgegebene  $(s(0), v(0))$  (wenigstens lokal) eine eindeutige Lösung  $v$ , mit der sich dann wie vorher bei vorgegebenem  $s(0)$  aus  $s'(t) = v(t)$  auch  $s(t)$  eindeutig als Stammfunktion berechnen lässt. In der Notation von früher gilt wieder  $F_t(s(t_0), v(t_0)) = (s(t_0 + t), v(t_0 + t))$ . Anstatt die Rechnungen für die Lösung der resultierenden Differentialgleichung durchzuführen, stellen wir eine qualitative Überlegung an. Klarer Weise wird die Fallgeschwindigkeit  $v(t)$  mit  $t$  wachsen, allerdings immer weniger schnell. Im Extremfall bliebe  $v$  konstant, was mit dem Wert  $v = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$  sogar eine Lösung der Differentialgleichung wäre. Asymptotisch erreicht der fallende Körper also eine konstante Geschwindigkeit, wo sich Erdbeschleunigung und Abbremsung durch den Luftwiderstand genau die Waage halten.<sup>5</sup>

Welchen Wert hat diese konstante Geschwindigkeit? Das hängt vermittelt  $\alpha$  in höchstem Maß vom fallenden Körper ab. Grob gesprochen gilt: Je schwerer der Körper und je kleiner seine Querschnittsfläche, desto kleiner ist  $\alpha$  und desto größer die asymptotische Fallgeschwindigkeit.

Doch man kann unserem Modell gegenüber noch kritischer sein: Der Koeffizient  $\alpha$  hängt nicht nur vom Körper ab, sondern auch von der Luftdichte. Bei einer Fallhöhe, wie sie z.B. beim Fallschirmspringen auftritt, ist diese keineswegs konstant<sup>6</sup>. Eine Verfeinerung des mathematischen Modells in diese Richtung führt nach Einsetzen von  $s'(t)$  für  $v(t)$  und  $s''(t)$  für  $a(t)$  zur noch komplizierteren Differentialgleichung  $s''(t) = g - \alpha(s(t))s'(t)^2$ . Weil bei sehr großen Fallhöhen auch  $g$  nicht konstant ist, wäre nach Newtons Gravitationsgesetz auch noch die Konstante  $g$  durch die Funktion  $g(t) = \frac{\gamma}{(r+s(0)-s(t))^2}$  zu ersetzen, wobei  $r$  der Erdradius und  $\gamma$  eine bestimmte, zur Erdmasse proportionale Konstante ist.

Die Lösung so einer Differentialgleichung sprengt den Schulunterricht bei Weitem. Immerhin aber zeigen unsere Überlegungen recht konkret, wie Verbesserungen von Modellen typischer Weise zu Verkomplizierungen der involvierten Mathematik führen. Außerdem kann ein qualitatives Verständnis vermittelt werden, warum die Physik voll von Differentialgleichungen ist. Auf das historisch vielleicht markanteste Beispiel dieser Art soll noch kurz eingegangen werden.

## 4.3. Von Galilei und Kepler zu Newton

Bekanntlich beschrieb Johannes Kepler (1571-1630), wie die Planeten in Ellipsenbahnen um die Sonne kreisen, wobei seine berühmten drei Gesetze außerdem Aussagen über die Geschwindigkeit machen. Isaac Newtons (1643-1727) überragende Bedeutung in der Naturwissenschaft schließlich beruht vor allem darauf, dass er eine umfassende mathematisch-physikalische Theorie entwickelte, in deren Rahmen sowohl Galileis Fallgesetze als auch Keplers Beschreibung der Planetenbewegungen als Folgerungen desselben Grundprinzips erklärbar werden. (Historisch dürfte Newton übrigens den umgekehrten Weg gegangen sein und aus den bekannten Planetenbewegungen auf das Gravitationsgesetz geschlossen haben.)

Man kann nämlich die Bewegung eines Planeten auffassen als freien Fall im Schwerfeld der Sonne. Bei der mathematischen Modellierung muss man zusätzlich zu den bisherigen Überlegungen statt der eindimensionalen Fallhöhe als Zustandsraum wenigstens eine Ebene annehmen, innerhalb derer der Planet sich bewegt, also wenigstens zwei Ortskoordinaten  $x$  und  $y$  plus deren Ableitungen  $x'$  und  $y'$  für den

<sup>5</sup> Ein mit dieser Geschwindigkeit stürzender Fallschirmspringer hat subjektiv nicht mehr das Gefühl des freien Falles, sondern empfindet die bremsende Wirkung des Luftwiderstandes genauso stark wie ruhende Personen die Gravitation.

<sup>6</sup> Eine relativ einfache physikalische Überlegung zeigt, dass die Luftdichte  $d(h)$  in der Höhe  $h$  eine Differentialgleichung der Bauart  $d' = -\beta d$  mit einem konstanten  $\beta > 0$  erfüllt, daher mit der Höhe exponentiell abnimmt.

Geschwindigkeitsvektor. Für das zugehörige dynamische System gilt dann

$$F_t(x(t_0), y(t_0), x'(t_0), y'(t_0)) = (x(t_0 + t), y(t_0 + t), x'(t_0 + t), y'(t_0 + t)).$$

Durch entsprechend verfeinerte mathematische Modellierung erhält man die zugehörigen Differentialgleichungen, deren Lösungen die von Kepler beschriebenen Ellipsenbahnen sind.

Auch ohne die zugehörigen Rechnungen (es sei auf die schöne Darstellung in Arnold (1989) verwiesen) fassen die hier nur qualitativ skizzierten Überlegungen doch eine der wichtigsten Episoden aus der frühen Geschichte modernen mathematisch-naturwissenschaftlichen Denkens zusammen. In einem Punkt lohnt es aber, die Mathematik selbst nochmals genauer ins Auge zu fassen. Das soll nun geschehen.

#### 4.4. Banachscher Fixpunktsatz und Differentialgleichungen

Wir haben gesehen: Die zu dynamischen Systemen gehörenden Differentialgleichungen haben typischer Weise die Bauart  $x'(t) = f(x(t))$  mit einer vorgegebenen Funktion  $f$ , oft unter Vorgabe einer Anfangsbedingung der Form  $x(0) = x_0$ . Die Werte von  $x$  und  $f$  sind Vektoren in  $\mathbb{R}^d$ . Der einfacheren Notation halber und ohne schwerwiegende Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir jetzt  $d = 1$  annehmen.

Schon in 4.2 wurde erwähnt, dass so eine Differentialgleichung eine eindeutige Lösung besitzt. Allgemein ist das aber, wenig überraschend, nicht ohne geeignete Voraussetzungen der Fall. Von welcher Art diese sein können, wollen wir uns nun überlegen.

Es wird sich herausstellen, dass wir erlauben können, dass die Funktion  $f$  nicht nur von  $x(t)$ , sondern auch direkt von  $t$  abhängt, dass die Differentialgleichung also nicht unbedingt autonom sein muss. Also gehen wir von einer Differentialgleichung mit Nebenbedingung aus, nämlich:

$$x'(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x_0$$

Wenn wir die Gleichung nach  $t$  integrieren (wir wählen für die neu auftretende Integrationsvariable auf der rechten Seite den Buchstaben  $\tau$ ) und für eine beliebige stetige Funktion  $x$  die Schreibweise  $\Phi_x(t) := x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$ , verwenden, so liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (siehe auch 5.5) für eine Lösung  $x$  dieser Differentialgleichung die Beziehung  $x = \Phi_x$ . Gesucht ist also ein Fixpunkt jener Abbildung (jenes **Integral-Operators**)  $\Phi : x \mapsto \Phi_x$ , welche einer stetigen Funktion  $x$  die ebenfalls stetige Funktion  $\Phi_x$  zuordnet.

Im Zusammenhang mit Fixpunkten erinnern wir uns des Abschnitts 3.3. Von dort wissen wir, dass ein eindeutiger Fixpunkt sicher dann existiert, wenn  $T = \Phi$  eine Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum  $X$  ist. Welches  $X$  dürfen wir nehmen? Offenbar dürfte  $X$  ein geeigneter Raum stetiger Funktionen sein. Wenn wir uns auf die Menge  $C(I)$  jener stetigen  $x$ , die auf einem festen abgeschlossenen Intervall  $I$  definiert sind, beschränken können, ist die Supremumsmetrik  $d(x_1, x_2) := \sup_{t \in I} |x_1(t) - x_2(t)|$  nicht nur wohldefiniert, sondern auch vollständig (siehe Anhang 5.6). Folglich geht es darum,  $I$  so zu wählen, dass  $\Phi : C(I) \rightarrow C(I)$  eine Kontraktion ist. Es muss also ein  $\lambda < 1$  geben derart, dass stets  $d(\Phi_{x_1}, \Phi_{x_2}) \leq \lambda d(x_1, x_2)$  gilt. Macht man diese Ungleichungen explizit, so sieht man, dass die sogenannte Lipschitzstetigkeit von  $f$  in der ersten Komponente das Gewünschte leistet. D.h. es muss eine reelle Konstante  $\lambda_0$  derart geben, dass stets  $|f(x_1, \tau) - f(x_2, \tau)| \leq \lambda_0 |x_1 - x_2|$ . Wählt man das Intervall  $I = [0, \varepsilon]$  mit genügend kleinem  $\varepsilon > 0$ , nämlich  $\varepsilon < \lambda_0^{-1}$ , so zeigt die Abschätzung

$$d(\Phi_{x_1}, \Phi_{x_2}) \leq \int_0^\varepsilon |f(x_1(\tau), \tau) - f(x_2(\tau), \tau)| d\tau \leq \varepsilon \lambda_0 d(x_1, x_2),$$

dass  $\Phi$  eine Kontraktion mit  $\lambda := \varepsilon \lambda_0 < 1$  ist. Also gibt es auf  $I = [0, \varepsilon]$  eine eindeutige Lösung  $x$  unserer Differentialgleichung.

Damit haben wir den wichtigen **Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf**<sup>7</sup> bewiesen:

<sup>7</sup> Charles Émile Picard (1856-1941), Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946)

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und in der ersten Komponente sogar Lipschitz-stetig. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  derart, dass die Differentialgleichung  $x'(t) = f(x(t), t)$  mit der Nebenbedingung  $x(0) = x_0$  eine auf  $[0, \varepsilon]$  eindeutige Lösung besitzt.

Dieser Satz ist einer der grundlegendsten für das klassische, deterministisch geprägte Weltbild der mathematischen Physik. Denn er besagt (etwas plakativ gesprochen), dass der gegenwärtige Zustand der Welt gemeinsam mit den Naturgesetzen im Sinne der Newtonschen Physik auch zukünftige Zustände der Welt festlegt. Natürlich ist diese Aussage angesichts der Erkenntnisse der Physik des 20. Jahrhunderts nicht mehr uneingeschränkt haltbar. Immerhin fanden sich aber derart weitreichende Bestätigungen für eine deterministische Weltansicht, dass ein großer mathematischer Denker wie Pierre-Simon Laplace (1749-1827) davon überzeugt war. Man spricht in diesem Zusammenhang heute noch vom *Laplaceschen Dämon* als von einem hypothetischen allwissenden Wesen, das die Zukunft der Welt für alle Zeiten zu berechnen imstande wäre.

#### 4.5. Zur Erinnerung noch einmal die Exponentialfunktion

Wir wollen die Macht des Satzes von Picard-Lindelöf aus 4.4 noch an der archetypischen Differentialgleichung schlechthin erproben, an jener für die Exponentialfunktion  $x(t) = \exp(t) = e^t$ :

$$x'(t) = x(t), \quad x(0) = 1$$

Die im Satz auftretende Funktion  $f$  hat hier die sehr einfache Gestalt  $f(x, t) = x$  und ist in der ersten Komponente Lipschitz-stetig mit  $\lambda_0 = 1$ . Also gibt es eine eindeutige Lösung. Aus dem im Hintergrund wirksamen Fixpunktsatz von Banach wissen wir, dass diese Lösung durch Iteration der Kontraktion  $\Phi: x \mapsto \Phi_x$  mit  $\Phi_x(t) = 1 + \int_0^t x(\tau) d\tau$  (zunächst wenigstens für kleines  $t$ ) zu gewinnen ist. Man kann mit einer beliebigen stetigen Funktion  $x_0$  beginnen, rekursiv  $x_{n+1} := \Phi_{x_n}$  setzen und erhält die gesuchte Lösung  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Der Einfachheit halber beginnen wir mit der konstanten Funktion  $x_0 = 1$ . Mit Induktion zeigt man  $x_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!}$ , also

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \exp(t)$$

(man vergleiche mit meinem früheren Artikel Winkler (2012)). Man beachte, dass diese Darstellung nicht nur für  $t$  aus einem kleinen Intervall bei 0 gilt, wie im Satz von Picard-Lindelöf garantiert, sondern auf ganz  $\mathbb{R}$ .

### 5. Anhang: Nachzutragende Beweise und Hintergründe aus der reellen Analysis

Die in diesem Anhang zusammengestellten Beweise füllen nicht nur die bisherigen Beweislücken des vorliegenden Artikels. Sie bilden auch eine ziemlich repräsentative Zusammenstellung wichtiger Fundamente der reellen Analysis.

#### 5.1. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und ihre Konsequenzen

Wie schon in Winkler (2009) betont, ist die entscheidende Eigenschaft, welche das System  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen für die Bedürfnisse der Analysis dem System  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen überlegen macht, die Vollständigkeit. Der vorliegende Abschnitt kann auch als Ergänzung zu diesem Artikel Winkler (2009) gelesen werden. Hin und wieder werde ich darauf verweisen.

Zahlreiche äquivalente Formulierungen der Vollständigkeit spielen in der Analysis eine wichtige Rolle. Hier soll mit einer begonnen werden, die der Konstruktion von  $\mathbb{R}$  mittels Dedekindscher Schnitte sehr gut angepasst ist, und die ich auch in Winkler (2009) als Ausgangspunkt genommen habe:

**Supremumseigenschaft:** Jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum  $s = \sup T$ , d.h. explizit: Es gibt ein kleinstes  $s \in \mathbb{R}$  mit  $t \leq s$  für alle  $t \in T$ .

Zunächst folgt aus der Supremumseigenschaft sehr schnell die dazu duale **Infimumseigenschaft**: Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}$  besitzt ein Infimum (eine größte untere Schranke). Denn die Menge  $U$  der unteren Schranken von  $T$  ist nichtleer und nach oben beschränkt (durch jedes  $t \in T$ ), besitzt also ein Supremum  $s = \sup U$ , welches sich nach kurzer Überlegung, die dem Leser überlassen werden darf, als Infimum von  $T$  erweist.

Als weitere Konsequenz der Supremumseigenschaft von  $\mathbb{R}$  ist der **Satz von Bolzano-Weierstraß**<sup>8</sup> zu nennen: Jede unendliche und beschränkte Teilmenge oder Folge in  $\mathbb{R}$  besitzt einen Häufungspunkt bzw., noch etwas stärker, aus jeder beschränkten reellen Folge lässt sich eine konvergente Teilfolge auswählen. Von diesen sehr ähnlichen Aussagen begnügen wir uns mit dem Beweis der letzten. Wir gehen also von einer beschränkten Folge reeller Zahlen  $x_n \in I = [a, b]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , aus. Gilt  $x_n = a$  für unendlich viele  $n = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ , so konvergiert die Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ , und wir sind fertig. Andernfalls liegt  $a$  in der somit nichtleeren und außerdem beschränkten Menge  $T$  all jener  $t \in I$ , für die es nur endlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \leq t$  gilt. Das Supremum  $s$  von  $T$  muss Häufungspunkt der  $x_n$  sein. Eine gegen  $s$  konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gibt es, weil man die Indizes  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$  so wählen kann, dass  $|s - x_{n_k}| < \frac{1}{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

Mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß zeigt man auch den **Satz vom Maximum**: Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt und nimmt sowohl Maximum als auch Minimum an. Zunächst beweisen wir indirekt, dass jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt ist. Denn andernfalls gäbe es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in [a, b]$  mit  $|f(x_n)| \geq n$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es Indizes  $n_0 < n_1 < \dots$ , so dass ein Grenzwert  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$  existiert. Die  $f(x_{n_k})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sind unbeschränkt, während sie aus Stetigkeitsgründen gegen  $f(x) \in \mathbb{R}$  konvergieren müssten, Widerspruch. Also ist  $f$  beschränkt, besitzt daher (Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ ) ein Supremum  $s$  und analog ein Infimum. Wir wollen ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = s$  finden. Damit gäbe es ein Maximum, analog ein Minimum. Wir wählen die  $x_n$  ( $n \geq 1$ ) diesmal so, dass  $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$ . Wieder liefert der Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  in  $x$  folgt  $f(x) = s$ .

Direkt aus der Supremumseigenschaft lässt sich die **Vollständigkeit als metrischer Raum** beweisen: Bilden die  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Cauchyfolge<sup>9</sup> in  $\mathbb{R}$ , so gibt es einen Grenzwert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ . Zur Erinnerung: **Cauchyfolge** bedeutet, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass für alle  $n_1, n_2 \geq n(\varepsilon)$  die Ungleichung  $d(x_{n_1}, x_{n_2}) := |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$  gilt. Bei der Definition des **Grenzwerts**  $x$  hingegen wird gefordert, dass  $|x - x_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n(\varepsilon)$ . Unmittelbar sieht man ein, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist, sogar in einem beliebigen metrischen Raum. Die Umkehrung gilt jedoch nicht immer, sondern definitionsgemäß genau in **vollständigen metrischen Räumen**.  $\mathbb{R}$  hat diese Eigenschaft: Denn mit Hilfe der Supremumseigenschaft findet man den Grenzwert einer vorgegebenen Cauchyfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als Supremum  $s$  der (nichtleeren und nach oben beschränkten) Menge  $T$ , bestehend aus allen  $t \in \mathbb{R}$  mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $x_{n'} > t$  für alle  $n' \geq n$ . (Die Überprüfung der Details darf dem Leser überlassen werden.)

In ähnlicher Weise ergibt sich das Prinzip von der **Konvergenz durch Monotonie**: Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert. Denn das Supremum (für monoton wachsend) bzw. das Infimum (für monoton fallend) der Menge der Folgenglieder ist der gesuchte Grenzwert.

Bekanntlich lassen sich die Sätze von Bolzano-Weierstraß und vom Maximum auch als Aussagen über Kompaktheit lesen. Zur Erinnerung: Der **Satz von Heine-Borel**<sup>10</sup> besagt, dass unter den Teilmengen von  $\mathbb{R}$  oder auch von  $\mathbb{R}^n$  genau jene kompakt sind, die sowohl abgeschlossen als auch beschränkt sind. Hier begnügen wir uns damit, aus der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  herzuleiten: Abgeschlossene Intervalle  $[a, b]$  sind kompakt ( $\mathbb{R}$  mithin lokalkompakt, d.h. jedes  $r \in \mathbb{R}$  besitzt eine kompakte Umgebung, z.B.  $[r-1, r+1]$ ). Nach Definition der Kompaktheit ist zu zeigen: Sind die  $O_i$ ,  $i \in I$ , irgendwelche offenen Mengen in  $\mathbb{R}$  mit  $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ , dann gibt es eine endliche Indexmenge  $E \subseteq I$  mit  $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in E} O_i$ . Wir betrachten die Menge  $T$  all jener  $t \in [a, b]$ , für die es ein endliches  $E(t) \subseteq I$  gibt mit  $[a, t] \subseteq \bigcup_{i \in E(t)} O_i$ . Wegen  $a \in T$  ist  $T$

<sup>8</sup> Bernard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstraß (1815-1897)

<sup>9</sup> Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

<sup>10</sup> Eduard Heine (1821-1881), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956)

nicht leer, wegen  $t \leq b$  für alle  $t \in T$  auch beschränkt. Also existiert (Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ )  $s := \sup T \leq b$ . Wir wählen ein  $i(s) \in I$  mit  $s \in O_{i(s)}$ . Weil  $O_{i(s)}$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[ \subseteq O_{i(s)}$ . Laut Konstruktion gibt es ein  $t_0 \in T$  mit  $t_0 > s - \varepsilon$ . Die endlich vielen  $O_i$ ,  $i \in E := E(t_0) \cup \{i(s)\}$  bilden eine Überdeckung von  $[a, s + \frac{\varepsilon}{2}]$ . Wäre  $s < b$  stünde dies im Widerspruch zur Konstruktion von  $s$ , also ist  $s = b$  und  $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in E} O_i$ .

Wir wenden uns nun dem **topologischen Zusammenhang** von  $\mathbb{R}$  zu, welcher ebenfalls als Folgerung aus der Vollständigkeit (der Supremumseigenschaft) von  $\mathbb{R}$  verstanden werden kann. Nach Definition müssen wir von einer Zerlegung von  $\mathbb{R}$  in zwei nichtleere, disjunkte offene Teilmengen  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  ausgehen und zeigen, dass sie nicht beide offen sein können. Seien dazu (wegen nichtleer)  $a \in A$  und  $b \in B$ , o.B.d.A.  $a < b$ . Die Menge  $S := A \cap [a, b]$  ist wegen  $a \in S$  nicht leer und nach oben beschränkt, z.B. durch  $b$ . Also gibt es das Supremum  $s := \sup S$ . In jeder Umgebung  $U$  von  $s$  müssen sowohl Punkte aus  $A$  als auch Punkte aus  $B$  liegen. Folglich ist  $s$  ein Randpunkt sowohl von  $A$  als auch von  $B$ . Wegen  $A \cup B = \mathbb{R}$  muss  $s$  in einer dieser beiden Mengen liegen. Diese kann also tatsächlich nicht offen sein. Der gleiche Beweis zeigt, dass nicht nur ganz  $\mathbb{R}$ , sondern auch jedes Intervall (beschränkt oder unbeschränkt) zusammenhängend ist. Umgekehrt können nicht konvexe Mengen aus ziemlich offensichtlichen Gründen auch nicht zusammenhängend sein. (Zur Erinnerung: *Konvex* bedeutet in  $\mathbb{R}$ , dass mit je zwei Punkten  $a < b$  auch das gesamte Intervall  $[a, b]$  zur Menge gehört.) Zusammenfassend gilt also: Unter den Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind die konvexen genau die zusammenhängenden.

Die für die reelle Analysis wichtigste Konsequenz dieser Charakterisierung der zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  ist der **Zwischenwertsatz für stetige Funktionen**: Eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an. Abstrakt sieht man dies schnell, wenn man verwendet, dass das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge stets wieder zusammenhängend ist. Hier bevorzugen wir einen davon unabhängigen Beweis, der sich direkt auf die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  stützt: Sei o.B.d.A.  $f(a) < y_0 < f(b)$ . Wir wollen zeigen, dass  $f$  in  $[a, b]$  den Wert  $y_0$  annimmt und betrachten dazu die Menge  $T$  aller  $t \in [a, b]$  mit  $f(x) \leq y_0$  für alle  $x \in [a, t]$ . Wegen  $a \in T$  ist  $T$  nicht leer, außerdem durch  $b$  beschränkt. Also gibt es (Vollständigkeit) das Supremum  $s := \sup T$ . Die Stetigkeit von  $f$  in  $s$  zeigt bei Annäherung von links  $f(s) \leq y_0$ , bei Annäherung von rechts  $f(s) \geq y_0$ , also  $f(s) = y_0$ .

## 5.2. Banachscher Fixpunktsatz (Kontraktionsprinzip)

Der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes ist ein Musterbeispiel starker Mathematik: Es handelt sich um einen Satz mit weitreichenden Anwendungen, in dessen Beweis mehrere substantielle Ideen ins Spiel kommen, und gleichzeitig ist alles höchst überschaubar und einprägsam. Obwohl es sich nicht um verpflichtenden Schulstoff handelt, spricht also vieles dafür, diesen Satz wenigstens in einer einfachen Variante in den Unterricht einzubauen. Nun zum Beweis.

Seien  $T : X \rightarrow X$  eine Kontraktion auf einem vollständigen metrischen Raum  $(X, d)$  mit der Kontraktionskonstanten  $\lambda < 1$  und  $x_0 \in X$  ein beliebiger Startpunkt für eine Iterationsfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_{n+1} = T(x_n)$ . Mit der Abkürzung  $c := d(x_0, T(x_0))$  gilt dann für die Abstände aufeinanderfolgender Glieder  $d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(T(x_0))) \leq \lambda d(x_0, T(x_0)) = \lambda c$ , analog  $d(x_2, x_3) \leq \lambda^2 c$  und, induktiv,  $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n c$ . Für den Abstand zweier beliebiger Folgenglieder mit  $n_1 < n_2 = n_1 + k$  folgt daraus unter Verwendung von Dreiecksungleichung und Formel für die endliche geometrische Reihe

$$d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \sum_{i=1}^k d(x_{n_1+i-1}, x_{n_1+i}) \leq \sum_{i=1}^k c \lambda^{n_1+i-1} \leq c \lambda^{n_1} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i = c \lambda^{n_1} \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} \leq \frac{c \lambda^{n_1}}{1 - \lambda}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (T^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, wegen der Vollständigkeit von  $(X, d)$  also auch gegen ein  $x \in X$  konvergiert. Nach 3.3 (jede Kontraktion ist offensichtlich stetig mit  $\varepsilon(\delta) = \delta$ , siehe auch Stetigkeitsdefinition in 5.6) muss  $x$  ein Fixpunkt von  $T$  sein. Gäbe es zwei verschiedene Fixpunkte  $x, x'$ , dann wäre  $d(x, x') > 0$ , folglich  $d(x, x') = d(T(x), T(x')) \leq \lambda d(x, x') < d(x, x')$ , Widerspruch. Damit ist die Hauptaussage des Fixpunktsatzes bewiesen.

Aus der obigen Rechnung erkennt man überdies, dass die Konvergenz exponentiell erfolgt, weil in jedem Schritt ein Faktor  $\lambda$  hinzukommt. Außerdem kann man den Abstand eines beliebigen Punktes  $x_0$  vom

Fixpunkt ablesen. Setzt man nämlich  $n_1 = 0$ , so liefert der Grenzübergang  $n_2 \rightarrow \infty$  (man beachte, dass die Metrik  $d$  stetig und deshalb mit  $\lim$  vertauschbar ist) die Abschätzung  $d(x_0, x) \leq \frac{d(x_0, T(x_0))}{1-\lambda}$ .

### 5.3. Isomorphie der Systeme aus 3.4

Es soll nun ein Beweis dafür skizziert werden, dass Systeme  $(X, T_X)$  und  $(Y, T_Y)$  wie in Abschnitt 3.4 isomorph sind. Dazu müssen wir einen Isomorphismus finden, also eine Abbildung  $\phi : X \rightarrow Y$  mit  $\phi \circ T_X = T_Y \circ \phi$ . Wir dürfen dabei nur die vorausgesetzten Eigenschaften von  $T_X$  und  $T_Y$  bzw. ihrer Funktionsgraphen verwenden: Beide schneiden die Diagonale nur in den Endpunkten der Intervalle  $X$  bzw.  $Y$ , liegen sonst strikt unterhalb der Diagonale, sind stetig und streng monoton wachsend.

Aus Gründen notationeller Annehmlichkeit ersetzen wir *unterhalb* durch *oberhalb*. Das hat nämlich zur Folge, dass Trajektorien monoton wachsend statt fallend sind und somit die Zuordnung  $n \mapsto x_n$  die Ordnungsstruktur erhält und nicht auf den Kopf stellt.

Wir zeichnen irgendwelche Startpunkte  $x_0, y_0 \in ]0, 1[$  im Inneren aus und betrachten wie bisher  $x_n = T_X^n(x_0)$  und analog  $y_n = T_Y^n(y_0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Klarerweise gilt

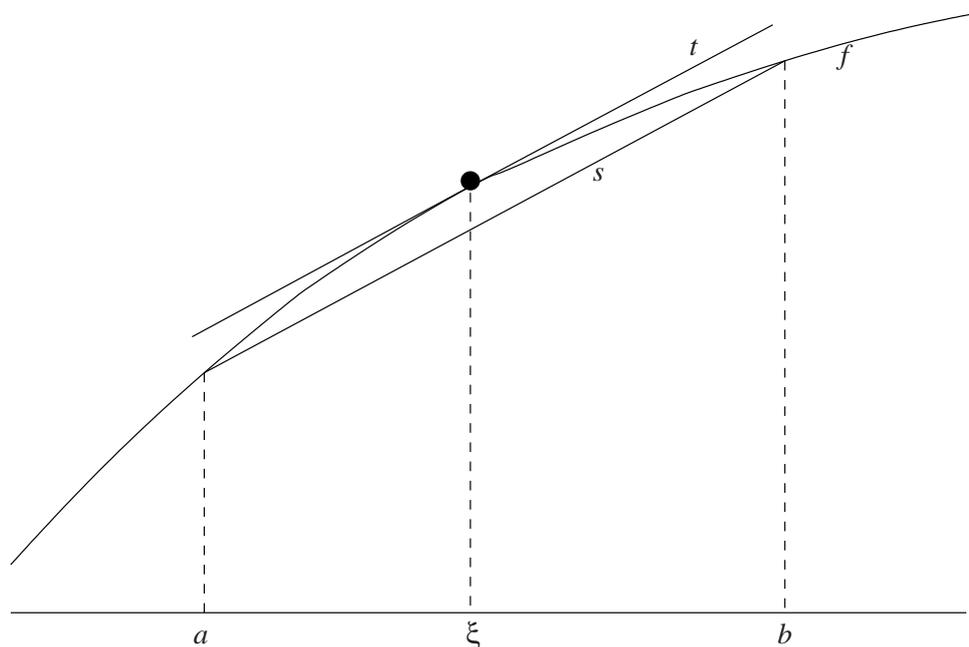
$$\dots x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \quad \text{und} \quad \dots y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \dots$$

Wir fixieren irgendeine ordnungserhaltende Bijektion  $\phi_0 : [x_0, x_1[ \rightarrow [y_0, y_1[$  (z.B. die affine Abbildung  $\phi_0(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ ). Analog gibt es ein bijektives und ordnungserhaltendes  $\psi : [0, 1[ \rightarrow [x_0, x_1[$ , welches wir verwenden, um die (mit dem Bisherigen konsistenten) Schreibweisen  $x_{t_0} := \psi(t_0)$  und  $y_{t_0} := \phi_0(x_{t_0})$  für  $0 \leq t_0 < 1$  einzuführen. Für ein beliebiges  $t \in \mathbb{R}$  können wir in eindeutiger Weise  $t = n + t_0$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq t_0 < 1$  schreiben. Damit definieren wir schließlich  $x_t := T_X^n(x_{t_0})$  und  $y_t := T_Y^n(y_{t_0})$ . Für die Randpunkte der Intervalle  $X$  und  $Y$  schreiben wir  $x_{-\infty}, x_{\infty}$  bzw.  $y_{-\infty}, y_{\infty}$ .

Nun dürfen wir es dem Leser überlassen, sich im Einzelnen davon zu überzeugen, dass auf diese Weise ordnungserhaltende Bijektionen  $t \mapsto x_t$  und  $t \mapsto y_t$  zwischen  $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $X$  bzw.  $Y$  definiert sind derart, dass  $x_t \mapsto y_t$  der gesuchte (in beide Richtungen stetige) Isomorphismus zwischen  $(X, T_X)$  und  $(Y, T_Y)$  ist.

### 5.4. Der Mittelwertsatz – Hintergründe und Implikationen

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS) taucht in einführenden Analysis-Vorlesungen ubiquitär auf, oft in eher technisch anmutendem Kontext. Sein Inhalt ist anschaulich vollkommen einleuchtend. Salopp gesprochen sagt er: Trägt man zwei Punkte auf einem differenzierbaren Funktionsgraphen ein, so findet sich zwischen den beiden ein weiterer Punkt, an den die Tangente parallel ist zur Verbindungslinie (Sekante) der ersten beiden Punkte.



Hat es überhaupt einen Sinn, einen so einleuchtenden Sachverhalt im Unterricht zu problematisieren und mit einem formalen Beweis zu beladen? Möglicherweise nicht! Doch sollte den Unterrichtenden bewusst sein, dass der MWS in gewissem Sinne ein neuralgischer Punkt der reellen Analysis ist. Denn einerseits fließen in seinem Beweis vermittels anderer wichtiger Sätze charakteristische Eigenschaften von  $\mathbb{R}$  ein, und andererseits findet der MWS eine natürliche Ausdehnung auf höhere Ableitungen in Gestalt des Satzes von Taylor, den man geradezu als den Hauptsatz der Differentialrechnung ansehen kann. Der Mittelwertsatz lautet:

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b \in \mathbb{R}$ , stetig und auf dem offenen Intervall  $]a, b[$  differenzierbar, so gibt es eine Zwischenstelle  $\xi$ , d.h.  $a < \xi < b$ , mit  $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  (gleiche Steigung von Tangente und Sekante).

Durch Subtraktion der linearen Funktion  $l(x) := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$  erhält man eine Funktion  $g(x) := f(x) - l(x)$  mit waagrechter Sekante durch  $a$  und  $b$ , welche ebenfalls die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt. Gilt der Satz für  $g$ , so gibt es ein  $\xi$  mit  $a < \xi < b$  und  $g'(\xi) = 0$ , und es folgt daraus auch  $f'(\xi) = g'(\xi) + l'(\xi) = l'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , die zu beweisende Aussage für  $f$ . Die noch offene Behauptung für  $g$  folgt aber aus zwei noch elementarerem Sätzen: Als stetige Funktion nimmt  $g$  auf der kompakten Menge  $[a, b]$  sowohl Minimum als auch Maximum an (Satz vom Maximum, siehe 5.1). Ist  $g$  nicht konstant, muss wenigstens eines der beiden echt zwischen  $a$  und  $b$  liegen, also ein Extremum  $\xi$  im Inneren vorliegen, und an einem solchen gilt  $g'(\xi) = 0$  (siehe weiter unten). Ist  $g$  dagegen konstant, leistet sogar ein beliebiges  $\xi \in ]a, b[$  das Gewünschte.

Nun noch zum Beweis, dass eine differenzierbare Funktion  $f$  an einer lokalen Extremstelle  $\xi$  im Inneren stets  $f'(\xi) = 0$  erfüllt: Sei, indirekt,  $f'(\xi) \neq 0$ , o.B.d.A.  $f'(\xi) > 0$ . Wegen  $f'(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon}$  folgt, dass alle Werte  $\frac{f(\xi+\varepsilon)-f(\xi)}{\varepsilon}$  mit hinreichend kleinem  $|\varepsilon|$  positiv sind. Folglich ist  $f(\xi + \varepsilon) > f(\xi)$  und  $f(\xi - \varepsilon) < f(\xi)$  für kleine  $\varepsilon > 0$ , also ist  $\xi$  keine Extremstelle. An lokalen Extremstellen im Inneren kommt daher nur  $f'(\xi) = 0$  in Frage. Analog zeigt man lokale Monotonieeigenschaften von  $f$  in  $\xi$ , sofern  $f'(\xi) > 0$  (wachsend) oder  $f'(\xi) < 0$  (fallend).

Der MWS fußt nicht nur sehr unmittelbar auf für  $\mathbb{R}$  fundamentalen Sachverhalten (Vollständigkeit, Bolzano-Weierstraß, Satz vom Extremum), er hat auch sehr wichtige Folgerungen, von denen wir einige verwendet haben und die auch im Schulunterricht eine wesentliche Rolle spielen.

Zum Beispiel zeigt der MWS, dass für eine differenzierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Ableitung Abschätzungen der Form  $m \leq f'(x) \leq M$  für alle  $x \in ]a, b[$  erfüllt, auch die Funktionswerte selbst  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$  erfüllen (wir haben das z.B. in 3.5 verwendet). Denn nach dem MWS gibt es ein  $\xi \in ]a, b[$  mit  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ , woraus die Behauptung unmittelbar ersichtlich ist. Über das **Monotonieverhalten** differenzierbarer Funktionen folgern wir daraus: Ist die Ableitung von  $f$  auf ganz  $]a, b[$  positiv, so ist  $f$  nicht nur lokal an jedem dieser Punkte (siehe oben), sondern global auf ganz  $[a, b]$  streng monoton wachsend. Denn man kann statt  $a, b$  auch beliebige Werte  $a', b'$  mit  $a \leq a' < b' \leq b$  wählen. Entsprechend folgt aus  $f' < 0$  fallende Monotonie von  $f$ . Bei Abschwächung der Voraussetzung zu  $f' \geq 0$  oder  $f' \leq 0$  kann in derselben Weise ebenfalls auf Monotonie geschlossen werden, allerdings nicht im strengen Sinn. Insbesondere ist jede Funktion  $f$  mit  $f'(x) = 0$  für alle  $x$  als sowohl wachsende wie auch fallende Funktion notgedrungen konstant.

Besonders häufig und meist unbewusst wird das zur Rechtfertigung der **Eindeutigkeit von Stammfunktionen** verwendet (z.B. in 4.1 und 4.4): Zwei differenzierbare Funktionen  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  (an allfälligen Randpunkten von  $I$  genügt Stetigkeit), deren Ableitungen übereinstimmen, unterscheiden sich lediglich um eine additive Konstante. Denn die Differenzfunktion  $f := f_2 - f_1$  hat konstante Ableitung  $f' = 0$ , muss also selbst konstant sein, etwa mit Wert  $c \in \mathbb{R}$ . Also ist  $f_2(x) = f_1(x) + c$  für alle  $x$  auf  $I$ .

Man beachte, dass die Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (siehe auch 5.5), d.h. mittels Auffinden einer Stammfunktion (wir haben in 4.4 davon Gebrauch gemacht), erst durch die Eindeutigkeit von Stammfunktionen ihre Rechtfertigung erhält. Doch wollen wir uns den Hauptsatz auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt näher ansehen.

## 5.5. Bemerkungen zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir wollen den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** in der folgenden Formulierung besprechen:

*Ist die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so existiert für alle  $x \in [a, b]$  das Riemann-Integral  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ . Die auf diese Weise definierte Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Stammfunktion von  $f$ , d.h.  $F' = f$  (wobei die Ableitung an den Randpunkten als einseitige zu verstehen ist).*

Der Nachweis von  $F' = f$  wird sich als relativ leicht erweisen, sobald die Existenz der involvierten Riemann-Integrale auf den Teilintervallen  $[a, x] \subseteq [a, b]$  gesichert ist. Definitionsgemäß müssen dazu Zerlegungen gefunden werden, für die Riemannsches Ober- und Untersumme beliebig nahe beisammen liegen. Das kann wiederum gewährleistet werden, wenn  $f$  innerhalb der Teilintervalle weniger variiert als ein beliebig vorgegebenes  $\varepsilon > 0$ . Es hat den Anschein, dass dies gerade mit dem  $\delta = \delta(\varepsilon)$  aus der Stetigkeitsdefinition als maximaler Länge der Teilintervalle garantiert werden kann. Doch Achtung! Dieses  $\delta$  hängt auch von der Stelle  $t \in [a, x]$  ab, um welche wir das Teilintervall legen. Trotzdem zeigt sich, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, das für alle  $t$  gleichermaßen funktioniert. Es gilt nämlich der für unseren Zweck entscheidende **Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit auf Kompakta**:

*Auf abgeschlossenen (kompakten) Intervallen  $[a, b]$  ist jede stetige Funktion sogar gleichmäßig stetig, d.h.: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein (universelles!)  $\delta > 0$  derart, dass für alle(!)  $x, y \in [a, b]$  mit  $|x - y| < \delta$  stets  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  gilt.*

Für den Beweis kann man indirekt vorgehen. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$  derart, dass für alle  $n = 1, 2, \dots$  Punktpaare  $x_n, y_n \in [a, b]$  existieren mit  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  aber  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (siehe 5.4) hätten die  $x_n$  einen Häufungspunkt  $\xi \in [a, b]$ . Nach Konstruktion lassen sich in beliebig kleinen Umgebungen von  $\xi$  Punktpaare  $x_n, y_n$  wie oben finden, so dass zumindest eine der Beziehungen  $|f(\xi) - f(x_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$  oder  $|f(\xi) - f(y_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$  gilt. Das widerspricht aber der Stetigkeit von  $f$  in  $\xi$ .

Das Bisherige zusammenfassend ist somit die erste Aussage im Hauptsatz bewiesen. Für die Beziehung  $F' = f$  genügt es nun zu zeigen, dass sich die Differenzenquotienten  $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$  beliebig nahe an  $f(x)$  annähern, sofern nur  $|h|$  hinreichend klein ist. Weil  $f$  stetig ist, kann bei beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  und geeignetem  $\delta > 0$  für  $|h| < \delta$  (und  $x+h \in [a, b]$ ) jedenfalls  $f(x) - \varepsilon < f(x+h) < f(x) + \varepsilon$  garantiert werden. Für die Differenz  $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$  folgt daraus bei  $h > 0$  (ähnlich bei  $h < 0$ )  $h(f(x) - \varepsilon) \leq F(x+h) - F(x) \leq h(f(x) + \varepsilon)$  und nach Division durch  $h$  die gewünschte Beziehung  $f(x) - \varepsilon \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x) + \varepsilon$ .

## 5.6. Der vollständige metrische Raum der stetigen Funktionen

In der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf Differentialgleichungen in 4.4 war es wesentlich, dass stetige Funktionen einen vollständigen metrischen Raum bilden. Dies ist in recht allgemeinem Kontext der Fall. Für unsere Zwecke genügt es, für ein Intervall  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  den metrischen Raum  $(C(I), d)$  aller stetigen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Metrik  $d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$  zu betrachten. Man beachte, dass  $d$  deshalb wohldefiniert ist, weil  $\mathbb{R}$  vollständig ist und die auf  $I$  stetige Funktion  $|f - g|$  beschränkt ist. (Wegen des Satzes vom Maximum wird das Supremum sogar als Maximum angenommen.) Eine Folge von  $f_n \in C(I)$  konvergiert in diesem Raum genau dann bezüglich  $d$  gegen ein  $f$ , wenn sie gegen dieses  $f$  sogar **gleichmäßig konvergiert**. Explizit bedeutet dies, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein (universelles!)  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass für alle  $n \geq n_0$  und für alle (!)  $x \in I$  gilt  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Wir wollen zeigen, dass zu jeder Cauchyfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C(I)$  so ein  $f$  existiert, welches sogar in  $C(I)$  liegt.

Eine Cauchyfolge zu sein, bedeutet nun explizit: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n_1, n_2 \geq n_0$  und für alle  $x \in I$  gilt  $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \varepsilon$ . Klarerweise bedeutet dies, dass für jedes einzelne  $x \in I$  die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  bildet, also wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  gegen einen Wert konvergiert, den wir mit  $f(x)$  bezeichnen. Der interessante Teil im Beweis besteht nun im Nachweis, dass  $f \in C(I)$ , d.h. dass  $f$  stetig ist. (Im Wesentlichen beweisen wir also den wichtigen Satz,

dass der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig ist.) Um diesen zu führen, geben wir uns ein beliebiges  $x_0 \in I$  und ein  $\varepsilon > 0$  vor. Gemäß Stetigkeitsdefinition müssen wir ein  $\delta > 0$  finden derart, dass für alle  $x \in I$  mit  $|x - x_0| < \delta$  auch  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  garantiert werden kann. Zunächst wählen wir gemäß Voraussetzung  $n_0$  so, dass  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  für alle  $n \geq n_0$  und alle  $x \in I$  gilt. Die Funktion  $f_{n_0}$  ist stetig, also gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass alle  $x \in I$  mit  $|x - x_0| < \delta$  auch  $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$  erfüllen. Solche  $x$  erfüllen dann (Dreiecksungleichung)

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist  $f$  stetig in  $x_0$ , und weil dieses  $x_0$  beliebig aus  $I$  gewählt war, auf ganz  $I$ .

## Literatur

- Vladimir I. Arnold. *Huygens and Barrows, Newton and Hooke. Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals*. Translated from the Russian by Eric J.F.Primrose. Birkhäuser. Basel – Boston – Berlin (1990).
- Stanislas Dehaene. *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Aus dem Amerikanischen von Anita Ehlers. Birkhäuser. Basel – Boston – Berlin (1999). Originaltitel: *The Number Sense – How the Mind Creates Mathematics*.
- Stefan Götz und Franz Hofbauer. *Die Exponentialfunktion als dynamisches System*. IMN<sup>11</sup> 223 (August 2013), 21-35.
- Hans Humenberger. *Iterationen, Grenzwerte und Spinnwebdiagramme – oder warum ist 2 doch nicht 4?* IMN<sup>11</sup> 213 (April 2010), 19-34.
- Anatole Katok und Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press (1995).
- Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe. *Chaos: Bausteine der Ordnung*. Deutsche Erstausgabe: Springer (1994). Berlin, Heidelberg und J.G.Cotta'sche Buchhandlung Nachfolger GmbH, Stuttgart. Als Taschenbuch: Rowohlt (1998). Reinbek bei Hamburg. Übersetzung des Englischen Originals (*Fractals for the Classroom*, Springer (1992), New York) von Anna M. Rodenhausen.
- Peter Raith. *Chaos und Fraktale*. DH<sup>12</sup> 41 (2009), 85-99.
- Peter Walters. *An introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics 79. Springer (1982). New York, Inc. Taschenbuch 2000.
- Hermann Weyl. *Über die Gleichverteilung der Zahlen mod Eins*. Mathematische Annalen 77 (1916), 313-352.
- Reinhard Winkler. *Wir zählen bis drei – und sogar darüber hinaus*. DH<sup>12</sup> 40 (2008), 129-141.
- Reinhard Winkler. *Die reellen Zahlen sind anders*. DH<sup>12</sup> 41 (2009), 140-153.
- Reinhard Winkler. *Im Anfang war die Exponentialfunktion*. DH<sup>12</sup> 44 (2012), 98-109.
- Reinhard Winkler. *Stochastik – ein Fest der Unabhängigkeit*. DH<sup>12</sup> 45 (2013), 122-136.
- Reinhard Winkler. *Dynamische Systeme als Chance für den Schulunterricht* Kurzversion. DH<sup>12</sup> 46 (2014).

<sup>11</sup> Internationale Mathematische Nachrichten (ÖMG), online unter [www.oemg.ac.at/IMN/](http://www.oemg.ac.at/IMN/)

<sup>12</sup> Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) – ehemals Didaktikhefte der ÖMG, online unter [www.oemg.ac.at/DK/](http://www.oemg.ac.at/DK/)