Abstraktion in Mathematik und Mathematikunterricht

REINHARD WINKLER (TU WIEN)

Abstraktion ist ein wesentliches Element der Mathematik und hauptverantwortlich für deren Universalität und Wirkungsmacht. Entsprechend wird auch im Lehrplan der AHS-Oberstufe im Zusammenhang mit dem erkenntnistheoretischen Aspekt der Mathematik Abstraktion explizit erwähnt. Ungeachtet dessen gilt alles Abstrakte als schwer vermittelbar und wird, wie es scheint, im Unterricht oft gemieden. Mit diesem, auf einem Vortrag beim Lehrerfortbildungstag 2019 an der Universität Wien basierenden Text, möchte ich einen Beitrag leisten zur Überbrückung der schmerzlichen Kluft zwischen Bildungsanspruch und Unterrichtspraxis.

1. Einleitung

Als Einstieg wähle ich prominente Zitate, von denen jedes Wesentliches zum Gegenstand dieses Artikels beiträgt. Sie stammen von Immanuel Kant aus dem 18. Jahrhundert (1.1), vom Mathematiker Laurent Schwartz aus dem 20. Jh. (1.2) und aus dem aktuellen Lehrplan für die AHS-Oberstufe (1.3). Den Abschluss der Einleitung bildet ein kurzer Überblick über den gesamten Artikel (1.4).

1.1. Gedanken und Begriffe versus Anschauung nach Immanuel Kant (1724-1804)

Obwohl Immanuel Kant selbst nicht auch Mathematiker im engeren Sinn war (wie beispielsweise seine Philosophenkollegen Descartes, Pascal, Leibniz oder Russell sehr wohl), räumte er der Mathematik einen besonderen erkenntnistheoretischen Status ein. In der Vorrede zu seinen „Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft" (z.B. in Band IX von Kant (1977)) behauptet er sogar, „daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist." Auch wenn kein Zweifel bestehen kann an der Eigenständigkeit und Unverzichtbarkeit anderer Erkenntnisformen, insbesondere der auf Beobachtung und Experiment fußenden Empirie, so lohnt es doch, den Gründen der besonderen Rolle der Mathematik im großen Spektrum menschlicher Erkenntnis nachzuspüren.

Erhellend mag auch ein anderes Zitat von Kant sein, diesmal aus der „Kritik der Reinen Vernunft" (Bände III und IV in Kant (1977)), seinem erkenntnistheoretischen Hauptwerk: „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind."[1] Damit wird einem Ineinandergreifen von Gedanken und Begriffen einerseits mit Inhalten und Anschauung andererseits das Wort geredet. Kant hebt dies als Charakteristikum menschlicher Erkenntnis ganz generell hervor. Wie noch ausführlicher zu diskutieren sein wird, trifft das auf Mathematik ganz besonders zu. Etwas vereinfachend könnte man sagen: Der Gegenstand der Mathematik sind unsere in klare Begriffe (Kants „Gedanken") gefassten Anschauungen, ihre Methode ist das reine Denken, basierend auf logisch folgerichtigem Schließen. All das ist zwar keineswegs auf Abstraktion als Selbstzweck ausgerichtet, kommt aber nicht ohne ein beträchtliches Quantum davon aus. Keineswegs ist damit bereits alles über Erkenntnis gesagt. Auch Kant geht in der Kritik der reinen Vernunft noch weiter, indem er behauptet: „So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen, und endigt mit Ideen." Dem wollen wir nachgehen.

[1] Der etwas größere Kontext lautet: „Wollen wir die Receptivität unseres Gemüths, Vorstellungen zu empfangen, so fern es auf irgend eine Weise afficirt wird, Sinnlichkeit nennen: so ist dagegen das Vermögen, Vorstellungen selbst hervorzubringen, oder die Spontaneität des Erkenntnisses der Verstand. Unsre Natur bringt es so mit sich, daß die Anschauung niemals anders als sinnlich sein kann, d. i. nur die Art enthält, wie wir von Gegenständen afficirt werden. Dagegen ist das Vermögen, den Gegenstand sinnlicher Anschauung zu denken, der Verstand. Keine dieser Eigenschaften ist der andern vorzuziehen. Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben und ohne Verstand keiner gedacht werden. Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind. Daher ist es eben so nothwendig, seine Begriffe sinnlich zu machen (d. i. ihnen den Gegenstand in der Anschauung beizufügen), als seine Anschauungen sich verständlich zu machen (d. i. sie unter Begriffe zu bringen). Beide Vermögen oder Fähigkeiten können auch ihre Functionen nicht vertauschen. Der Verstand vermag nichts anzuschauen und die Sinne nichts zu denken. Nur daraus, daß sie sich vereinigen, kann Erkenntniß entspringen. Deswegen darf man aber doch nicht ihren Antheil vermischen, sondern man hat große Ursache, jedes von dem andern sorgfältig abzusondern und zu unterscheiden. Daher unterscheiden wir die Wissenschaft der Regeln der Sinnlichkeit überhaupt, d. i. Ästhetik, von der Wissenschaft der Verstandesregeln überhaupt, d. i. der Logik."

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 52, 2019/20 S. 1–14
Version vom 18.9.2019

1.2. Abstraktion nach Laurent Schwartz (1915-2002)

Laurent Schwartz' großer Beitrag zur Mathematik ist die Theorie der Distributionen, eine Erweiterung der klassischen Theorie reeller Funktionen, die nicht differenzierbare Funktionen in einem verallgemeinerten Sinn doch differenzierbar macht. Schwartz nahm die vertraute Rechenregel der partiellen Integration zum Ausgangspunkt, um abstrakte Räume zu konstruieren, die sowohl für konventionelle Funktionen als auch für deren Verallgemeinerungen Platz bieten. Vor allem für die Theorie der Differentialgleichungen erweist sich dieser erweiterte Rahmen als sehr fruchtbar. Unter diesem Gesichtspunkt erhält Schwartz' Ausspruch aus seinen Lebenserinnerungen (Schwartz (1997)) besondere Überzeugungskraft: „Das Konkrete ist das Abstrakte, an das man sich schließlich gewöhnt hat.“[2]

Damit ist einerseits ausgesprochen, dass der Prozess der Aneignung mathematischer Abstraktionen ein mühsamer ist, der seine Zeit braucht. Andererseits geht daraus aber auch hervor, dass die Grenze zwischen Abstraktem und Konkretem in der Mathematik keine objektive, strikte ist, sondern eine subjektive. Denn schon die scheinbar einfachsten mathematischen Objekte wie natürliche Zahlen, Punkte, Geraden u.ä. erweisen sich bei genauer Betrachtung als Ergebnisse von Abstraktionsprozessen – zumal von solchen, die sehr früh in der Kindheit vollzogen werden und daher selten bewusst sind. Gelingt es, das sichtbar zu machen, erhöht das auch die Chancen, die Scheu vor Abstraktionen abzubauen. Besonders wichtig ist das bei solchen Abstraktionen, die wegen ihres besonderen Erkenntniswerts im Rahmen des Schulunterrichts sehr wohl bewusst vollzogen werden sollten.

1.3. Abstraktion im Lehrplan (aktuell)

Der allgemeine Teil des Lehrplans für die Oberstufe der AHS formuliert auf vorbildliche Weise sechs Aspekte der Mathematik (die zur Vergegenwärtigung zu empfehlen ich keine Gelegenheit auslasse), denen es im Schulunterricht gerecht zu werden gilt: den schöpferisch-kreativen, den sprachlichen, den erkenntnistheoretischen, den pragmatisch-anwendungsorientierten, den autonomen und den kulturell-historischen. Hier ist für uns der erkenntnistheoretische Aspekt von besonderem Interesse. Im Lehrplan (Lehrplan (2019)) heißt es dazu: „Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.“

Der Lehrplan lässt also keinen Zweifel daran, dass Abstraktion im Unterricht als ein wesentliches Merkmal der Mathematik vermittelt werden soll. Konnte man die Zitate von Kant und Schwartz vielleicht noch als willkürliche Auswahl meinerseits ansehen, so verpflichtet der Lehrplan zur Beschäftigung mit Abstraktion auch im Schulunterricht. Eine genauere Analyse wird zeigen, dass dies mit sehr guten Gründen geschieht. Außerdem mögen die im Zuge dieser Analyse zu treffenden Unterscheidungen eine Orientierung mitliefern, wenn es um eine kluge Dosierung geht.

1.4. Überblick

Im Anschluss an die Einleitung beginnen unsere Untersuchungen zur Rolle von Abstraktion in Mathematik und Mathematikunterricht in Abschnitt 2 mit grundsätzlichen Überlegungen zu wesentlichen Merkmalen der Mathematik. Danach wird in Abschnitt 3 eine begriffliche Unterscheidung zwischen Abstraktion und gewissen anderen verwandten Aspekten getroffen, die in kontroversen Diskussionen oftmals verschwimmen. Diese Unterscheidung bringt eine beträchtliche Klärung wichtiger Ziele von Mathematikunterricht. Im darauf folgenden Abschnitt 4 werden die bis dahin gewonnenen allgemeinen Einsichten anhand konkreter Beispiele aus der schulrelevanten Mathematik illustriert. Der Artikel schließt mit einem kurzen Resümee (Abschnitt 5).

[2] Im französischen Original: „... un objet concret est un objet abstrait auquel on a fini s'habituer.“

2. Was ist und was soll Mathematik?

Im Gegensatz zu innermathematischen Begriffen, die einer strengen Definition bedürfen, erwarten wir nicht, dass der Mathematik und ihrem Facettenreichtum insgesamt eine strenge Definition gerecht werden kann. Sehr wohl muss es uns aber ein Anliegen sein, hervorstechende Merkmale der Mathematik, die sie von anderen Phänomenen menschlicher Zivilisation, insbesondere von anderen Wissenschaften und Erkenntnisformen unterscheidet, zu identifizieren. Später wird auch zu diskutieren sein, in welchem Ausmaß diese Merkmale im Rahmen des Schulunterrichts vermittelt werden können und sollen. In diesem Abschnitt sollen aber vorerst folgende Gesichtspunkte näher beleuchtet werden: Wir beginnen mit der historischen Betrachtungsweise (2.1). Zwanglos wird dabei der akkumulative Charakter der Mathematik ins Auge springen (2.2). Als Schlussfolgerung daraus ergibt sich schließlich ein besonderes Verhältnis von Gegenstand und Methode, das Mathematik von anderen Wissenschaften unterscheidet (2.3).

2.1. Die historische Betrachtungsweise

Verfolgt man die Spuren mathematischen Denkens zurück in die tiefe Vergangenheit der Menschheitsgeschichte, so verlieren sie sich erst dort, wo die Dokumente menschlicher Zivilisation generell sehr rar und undeutlich werden. Schon die frühesten Schriftkulturen enthalten Zeugnisse davon, wie vor allem Rechnen und Messen, Zahl und Figur bereits sehr früh unsere Vorfahren beschäftigten. Dennoch lassen sich im Laufe der historischen Epochen markante Einschnitte ausmachen, durch die sich das Verständnis von dem, worum es in der Mathematik geht, gewandelt, genauer: angereichert hat. Es folgen einige wichtige Beispiele.

In der klassischen griechischen Antike wird die Mathematik erstmals systematisch, und damit paradigmatisch für Wissenschaft generell (siehe Kant-Zitat). Symbol dafür sind die *Elemente* des Euklid, wahrscheinlich aus dem dritten Jh. v. Chr. Sie sind zwar bei weitem nicht der einzige bedeutende Beitrag aus dieser Epoche – man denke nur an Archimedes (287-212 v.Chr.) –, in unserem Zusammenhang aber insofern der bemerkenswerteste, weil darin, aufbauend auf Vorläufern, die axiomatische Methode erstmals auf den Plan tritt. Für zwei Jahrtausende wurde Euklids Werk zum Standard, was zunächst allerdings auch mit einer sonstigen Stagnation der Wissenschaften zumindest in Europa (weniger im Orient) einherging.

Als einer der Väter der neuzeitlichen wissenschaftlichen Revolution gilt Galileo Galilei (1564-1642). Er erhob die empirische Methode in Verbindung mit der mathematischen Beschreibung von Naturgesetzmäßigkeiten zum Paradigma. Besonders fruchtbar wurde dieser Ansatz durch die Einführung von Koordinatensystemen durch René Descartes (1596-1650) und Pierre de Fermat (1607-1665). Darauf konnten dann Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) und Isaac Newton (1643-1727) mit ihrer Infinitesimalrechnung aufbauen. Besonders Newton hob mit seiner epochalen Zusammenschau von Physik und Mathematik die Wissenschaft auf ein neues Niveau. Das daraus resultierende Verständnis von Mathematik als Teil der Naturwissenschaft hielt mehrere Generationen von Mathematikern in Bann, von denen wenigstens Leonhard Euler (1707-1783) als überragender namentlich genannt sei, außerdem Pierre-Simon Laplace (1749-1827), der das für seine Epoche kennzeichnende, durch die Mathematisierung der Physik geprägte mechanistische Weltbild mit der nach ihm benannten Metapher von einem allwissenden „Dämon" besonders einprägsam auf den Punkt brachte.

Dennoch blieb die Mathematik nicht in der Rolle als Zubringer und Sprache der Naturwissenschaft stecken. Als Visionär eines neuen mathematischen Geistes sei an erster Stelle Carl Friedrich Gauß (1777-1855) genannt, der die unterschiedlichsten Teilgebiete der Mathematik revolutionierte. Erst in dieser Epoche wird Abstraktion als wesentliches Element der Mathematik sichtbar. Es ist bemerkenswert, dass es zwei voneinander weitgehend unabhängige Gebiete sind, an denen diese Entwicklung deutlich wird: einerseits die nichteuklidische Geometrie, die neben Gauß auf Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792-1856) und Janos Bolyai (1802-1860) zurückgeht und von Bernhard Riemann (1826-1866) ungeahnte Vertiefungen erfuhr, andererseits die an Vorarbeiten von Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) anschließenden algebraischen Unlösbarkeitsergebnisse von Niels Henrik Abel (1802-1829) und Évariste Galois (1811-1832). In beiden Fällen zeigten eigens konstruierte, wiederum neuartige abstrakte Strukturen, dass gewisse Beweise bzw. Formeln, nach denen lange vergeblich gesucht worden war, unmöglich sind. Als eine etwas später errichtete Brücke zwischen beiden Entwicklungen lässt sich das berühmte „Erlanger Programm“ von Felix Klein (1849-1925) interpretieren, in dem er eine sich als sehr fruchtbar erweisende Verbindung von Geometrie und Algebra mittels Gruppentheorie propagierte. Ebenfalls im Laufe des 19. Jahrhunderts wurde ein rigoroser Grenzwertbegriff zunehmend als unverzichtbar empfunden. Die wichtigsten Beiträge dazu verdanken wir Bernard Bolzano (1781-1848), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1997). Auch die Arbeiten von Richard Dedekind (1831-1916) und Giuseppe Peano (1858-1932) zum Zahlbegriff dienten der Klärung fundamentaler Konzepte.[3]

Will man diese Entwicklungen zusammenfassen, so kann man sagen: Es waren vor allem Abstraktion und Begriffsklärung, die sich im Laufe des 19. Jahrhunderts als wesentliche Charakteristika der Mathematik herauskristallisierten. Welche Revolution durch diese neuen Perspektiven angelegt war, erkannte am klarsten David Hilbert (1862-1943). Kaum ein anderer Mathematiker in der Geschichte prägte unser heutiges Verständnis von Mathematik in dem Ausmaß, wie Hilbert das in Kooperation mit seinen Zeitgenossen tat. Mit seinen *Grundlagen der Geometrie* griff er die axiomatische Methode Euklids wieder auf. Er beschränkte sie in der Folge aber nicht auf die Geometrie, sondern formulierte in dem nach ihm benannten Programm in bis dahin unerreichter Klarheit eine Vision davon, wie Mathematik insgesamt zu funktionieren habe: gemäß der axiomatischen (= logisch-deduktiven) Methode und streng formalisierbar (was übrigens nur selten auch „tatsächlich formalisiert“ bedeutet). Das alles geschah zu einer Zeit, als auch Georg Cantor (1845-1918) mit seiner Mengenlehre und Gottlob Frege (1848-1925) sowie Bertrand Russell (1872-1970) und Alfred North Whitehead (1861-1947) mit ihren Arbeiten zur Logik neue Sichtweisen auf die Grundlagen der Mathematik eröffneten. Es kam zu Kontroversen zwischen mehreren Strömungen: dem Logizismus mit Frege und Russell als wichtigen Proponenten, dem von Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) begründeten und auch von Hermann Weyl (1885-1955) unterstützten Intuitionismus/Konstruktivismus und dem von Hilbert und seinen Schülern vertretenen Formalismus. Es wirkte wie ein ordnender Donnerschlag, als Kurt Gödel (1906-1978) im Jahr 1931 seinen berühmten Unvollständigkeitssatz veröffentlichte. Diesem Ergebnis zufolge ist es – grob gesprochen – nicht möglich, die Arithmetik der natürlichen Zahlen (geschweige denn die Mathematik in ihrer Gesamtheit) so zu axiomatisieren, dass damit jeder sinnvolle, etwa in der Sprache der „Peano-Arithmetik“ formulierbare Satz entweder bewiesen oder widerlegt werden kann. Es gibt also in jedem hinreichend ausdrucksstarken mathematischen System unentscheidbare Sätze. Gödel folgerte daraus auch noch seinen „zweiten Unvollständigkeitssatz“, dass nämlich – anders als Hilbert es erträumt hatte – ein mathematisches System niemals seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen kann.

Gödels Unvollständigkeitssatz lässt sich also als Widerlegung des Hilbertschen Programms interpretieren. Ich möchte aber auch eine andere Lesart der Gödelschen Sätze propagieren, und zwar mit Fokus auf Gödels knapp zuvor in seiner Dissertation bewiesenen Vollständigkeitssatz. Dieser besagt nämlich – wieder grob gesprochen – dass mit einem einfachen formalen System, wie Hilbert es im Sinn hatte, jeder korrekte logische Schluss abgeleitet werden kann. Zugespitzt lautet die Konsequenz aus Gödels Ergebnissen also: Das logische Schließen als Methode der Mathematik können wir mit einfachen formalen Systemen vollständig überblicken – und damit bewährt sich Hilberts Ansatz sehr wohl! Lediglich der Gegenstand der Mathematik, beginnend schon mit der Arithmetik der natürlichen Zahlen, sprengt jeden axiomatischen Rahmen.

Diese Erkenntnisse beflügelten weitere bemerkenswerte Entwicklungen, die im weiteren Verlauf des 20. Jahrhunderts bis hin zur Gegenwart stattfanden: der strukturmathematische Gesichtspunkt, inspiriert von Beiträgen wie denen Emmy Noethers (1882-1935) und ausgearbeitet von einem unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki arbeitenden Kollektiv führender, vorwiegend französischer Mathematiker (Laurent Schwartz war einer von ihnen); die Etablierung einer methodisch strengsten Ansprüchen genügenden Wahrscheinlichkeitstheorie durch Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow (1903-1987); die

3 Die Überschrift dieses Abschnitts spielt auf Dedekinds berühmte Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (siehe z.B. in Dedekind (2017)) an und möge nicht als Anmaßung, sondern als Verneigung vor diesem großen Mathematiker verstanden werden.

Entwicklung des Computers, jener technischen Innovation, die während der letzten Jahrzehnte unsere Welt wahrscheinlich am fundamentalsten verändert hat, und dessen theoretische Konzeption zu einem beträchtlichen Teil auf die Mathematiker John von Neumann (1903-1957) und Alan Turing (1912-1954) zurückgeht; die Durchdringung zahlreicher neuer Anwendungsgebiete mit mathematischen Methoden.

All diesen jüngeren Strömungen gemeinsam ist die Tragfähigkeit des von Hilbert maßgeblich geprägten modernen Verständnisses einer sowohl inhaltlich (durch die Mengenlehre als begrifflicher Basis) als auch methodisch vereinheitlichten Mathematik. Entscheidend ist dabei neben Formalismus und axiomatischer Methode eben auch Abstraktion.

2.2. Der akkumulative Charakter der Mathematik

Abschnitt 2.1 sollte keine Tour de Force durch die Geschichte der Mathematik um ihrer selbst willen sein, sondern Anlass zu einer wichtigen Beobachtung: In anderen Disziplinen kommt es immer wieder vor, dass vermeintliche Erkenntnisse, die einige Zeit lang als anerkanntes Wissen gegolten haben, aufgrund neuer Entdeckungen vollkommen verworfen werden müssen. In der Mathematik ist das nicht der Fall. Alte Ergebnisse können zwar in einem neuen Kontext an Gewicht verlieren, sich eventuell sogar als irreführend erweisen, wenn neu entdeckte Zusammenhänge einen klareren Blick auf Sachverhalte werfen. Mathematische Ideen verlieren aber (sofern sie keine Fehlschlüsse enthalten) nie ihre Relevanz. Aus diesem Grunde wird mathematisches Wissen über die Jahrhunderte angehäuft, ohne wieder ausgeschieden zu werden. Weil die wachsende Menge akkumulierten Wissens immer schwerer zu überblicken ist, entsteht so der dringliche Wunsch, sie übersichtlicher zu gestalten. Vor allem hier setzt die Arbeit an mathematischen Begriffen an mit dem Ziel, der Mathematik psychologisch leichter fassliche Strukturen aufzuprägen.

Dabei bezieht sich der akkumulative Charakter der Mathematik nicht nur auf Einzelergebnisse, sondern auch auf die verschiedenen Aspekte, die wir mit Mathematik verbinden. Kommen neue hinzu (wie etwa die Hilbertsche Sichtweise), so ändert das wenig an der Relevanz bereits etablierter (wie etwa als Sprache der Naturwissenschaften). So wurde unser Bild von dem, was Mathematik ist, immer bunter und vielschichtiger. Das sollte sich auch im Schulfach Mathematik widerspiegeln.

2.3. Gegenstand versus Methode

Die in 2.1 beschriebene Grundlagenrevision der Mathematik vor etwa 100 Jahren und die darauf folgenden Entwicklungen zeigen vor allem eines: Mathematik ist weniger durch ihren Inhalt bestimmt als durch ihre Methode. Im Gegensatz zu Disziplinen wie beispielsweise der Biologie (die durch ihren Gegenstand, nämlich das Leben auf der Erde, definiert ist) lässt sich Mathematik nicht durch Angabe ihres Gegenstandes erfassen. Denn eine Liste von Objekten wie Zahlen, geometrischen Figuren, Wahrscheinlichkeit, algebraischen Strukturen, die fraglos alle zur Mathematik gehören, müsste laufend ergänzt werden. Das gemeinsame Merkmal der Objekte der Mathematik besteht darin, dass sie zugänglich sind für die axiomatische Methode. Sie lassen sich durch formale Beziehungen definieren (axiomatisieren), so dass daraus mit ausschließlich logischen Mitteln interessante Schlüsse gezogen werden können.

Das hat mancherlei unausweichliche Konsequenzen, die den Charakter der modernen Mathematik ganz wesentlich bestimmen. Zunächst mag die Beschränkung auf die formal logischen Beziehungen zwischen den betrachteten Objekten als Einengung erscheinen, weil die so mächtige Intuition als Instanz wegfällt. Doch wie gleich auszuführen sein wird, ist das nur scheinbar der Fall. Entscheidend ist dagegen der Vorteil, der in der absoluten Verlässlichkeit der Ergebnisse besteht. Denn jede Struktur, was immer wir uns darunter auch vorstellen mögen, folgt, sofern sie die formalen Voraussetzungen erfüllt, auch den mathematischen Schlussfolgerungen.

Selbstverständlich stellt sich im Kontext von Anwendungen stets die Frage, ob die Voraussetzungen tatsächlich erfüllt sind, das mathematische Modell also die Wirklichkeit beschreibt. In einem strengen Sinn ist das fast nie exakt der Fall. Die mathematische Methode zeichnet sich aber gleichzeitig durch eine enorme Freiheit aus, Modelle zu modifizieren und zu schärfen. So fällt auf, dass erst im Zuge der Etablierung der neuen Sichtweise im 20. Jahrhundert neben der klassischen mathematischen Physik unglaublich viele weitere Bereiche in Natur-, Sozialwissenschaften und auch anderen Bereichen mathematischen Methoden zugänglich gemacht wurden und dadurch unermessliche Bereicherungen erfuhren. Warum die Mathematik *derart* erfolgreich ist, lohnt durchaus tiefere Gedanken, die hier allerdings zu weit führen würden. Statt dessen sei auf den berühmten Aufsatz Wigner (1960) über die Rolle der Mathematik in der Physik verwiesen. Hier interessieren zunächst gewisse Unterscheidungen, die die Mathematik selbst betreffen.

3. Einige wichtige Unterscheidungen

In den Repliken Ableitinger et al. (2018) und Götz (2018) auf meinen Artikel Winkler (2018a) manifestieren sich teils kontroverse Auffassungen zu gewissen Inhalten des Mathematikunterrichts. Damit nicht nur schlicht Meinung auf Meinung prallt, sondern die Argumente genauer gefasst werden können, schlage ich die Unterscheidung gewisser Aspekte der Mathematik vor, die in diesem Abschnitt genauer behandelt werden: Begriffsbildung (3.1), Abstraktion (3.2), Formelsprache (3.3) und Terminologie (3.4). Diese Aspekte haben fraglos alle miteinander zu tun, sollten aber dennoch unterschieden werden. Leider unterbleibt aber gerade das sehr häufig – mit sehr negativen Auswirkungen auf den Erkenntnisfortschritt. Eine sorgfältige Unterscheidung hingegen zeitigt sehr schnell und zwanglos auch Prioritäten für den Unterricht, die sich schematisch in der Ungleichungskette

$$\text{Begriffsbildung} > \text{Abstraktion} > \text{Formelsprache} > \text{Terminologie}$$

zusammenfassen lassen. Abgerundet wird der Abschnitt durch eine Testfrage (3.5), die ebenfalls als recht allgemein anwendbare Orientierungshilfe für die Unterrichtsgestaltung dienen möge.

3.1. Begriffsbildung

In Kants eingangs zitierter Sentenz „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind“ kommt eine Polarität zum Ausdruck zwischen Sinneswahrnehmung und Begriffsbildung. Für die Mathematik gilt das besonders, indem sie Anschauungen in Begriffe fasst und diese dann auf ihre logischen Möglichkeiten hin untersucht. Der primäre Fokus der Mathematik auf Begriffe, die der menschliche Geist solcherart aus zunächst sinnlich inspirierten Vorstellungen heraus geschaffen hat, ist ein entscheidender Unterschied zu den empirischen Wissenschaften, insbesondere zu den Naturwissenschaften. Diese kommen zwar auch nicht ohne Begriffsbildungen aus, wenn sie die chaotische Vielfalt der Erscheinungen überschaubar machen wollen. Primär interessieren sie sich aber für eine äußere Wirklichkeit, an der sich ihre Begriffsbildungen zu orientieren haben. Der Vergleich zeigt, dass man für die Mathematik den zweiten Teil von Kants Sentenz sogar noch zuspitzen kann: Anschauungen ohne Begriffe sind nicht nur blind, sondern auch leer, weil ihnen der Gegenstand fehlt. Begriffsbildung ist in der Mathematik somit keine lästige Begleiterscheinung, die man auf der Suche nach Erkenntnis wohl oder übel hinnehmen muss, sondern substanziell im eigentlichsten Wortsinn: Sie liefert erst die Gegenstände (=Substanz), von denen Mathematik handelt.

Auch wenn das begriffliche Element in vergangenen Epochen nicht so offensichtlich zutage trat wie heute, so ging es in der Mathematik schon damals zu einem beträchtlichen Teil genau darum. Spätestens seit Hilbert und den großen Erkenntnissen in der mathematischen Grundlagenforschung ist aber klar: Wenigstens wenn konkret mathematisch gearbeitet werden soll, handelt es sich nur dann wirklich um Mathematik, wenn die Basis präzise Begriffe sind. Im Unterricht bedeutet Begriffsbildung natürlich auch Begriffsentwicklung, die im Sinne eines didaktischen Spiralprinzips über Jahre hinweg zunehmende, jeweils altersgemäße Exaktheitsniveaus durchläuft. Dennoch: Verzichtet man gelegentlich auf begriffliche Genauigkeit als schlussendlich anzustrebendes Ziel, so braucht das sehr gute Gründe und sollte auch gekennzeichnet werden. Beispiele für solche Ausnahmen finden sich z.B. in der Stochastik: Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz (der ja erst die enorme Rolle der Normalverteilung offenbart) sind so wichtig, dass sie im Unterricht vorkommen sollten, obwohl ihre Präzisierung die Möglichkeiten des Schulunterrichts tatsächlich übersteigen dürfte.

Klare Begriffsbildungen sind auch eng an eine entsprechende Sprache gebunden. Zwar mag es theoretisch denkbar sein, dass ein mathematischer Geist mathematische Begriffe für sich allein und ohne Sprache schafft und erforscht, doch entsteht Wissenschaft real nicht ohne Kommunikation zwischen Menschen, die sie betreiben. Mathematik im Speziellen braucht eine Sprache, die die Struktur mathematischer Begriffe wiederzugeben imstande ist. Sprache (sei es gesprochene oder geschriebene, natürliche oder formalisierte) ist also in der Regel (wichtige Ausnahmen gibt es zum Beispiel in der mathematischen Logik und in der Algebra) nicht der Gegenstand der Mathematik, ihr aus methodischen Gründen aber gewissermaßen zur zweiten Haut geworden. Wir werden in 3.3 nochmals darauf zurückkommen.

3.2. Abstraktion

Zwar ist Abstraktion nicht denknotwendig mit jeglicher Art mathematischen Denkens verbunden, sie geht mit vielen (bei genauerer Betrachtung wohl: mit den allermeisten) mathematischen Begriffsbildungen aber unvermeidlich einher. Und das hat gute Gründe. Denn Begriffsbildung bedeutet Definition, d.h. Grenzziehung zwischen jenen Objekten, die unter den Begriff fallen und allen übrigen. Bei dieser Grenzziehung haben wir typischerweise bestimmte Objekte im Sinn, die wir ein- und andere, die wir ausschließen wollen. An alle übrigen Objekte haben wir bei der Definition aber überhaupt nicht gedacht. Sie landen wie zufällig auf einer der beiden Seiten der Grenze. Alle diejenigen Objekte, die schließlich unter den Begriff fallen, haben die den Begriff definierende Eigenschaft gemeinsam. Sie können sich aber hinsichtlich anderer Eigenschaften unterscheiden, die in der Definition keine Rolle spielen, von denen also abstrahiert wird. Genau in diesem Sinne ist Begriffsbildung von Abstraktion nicht zu trennen.

Allerdings bedeutet das keineswegs, dass Abstraktion Selbstzweck wäre und permanent im Vordergrund stehen müsste, insbesondere unter didaktischen Gesichtspunkten. Es gilt daher in jedem konkreten Fall, Vor- und Nachteile eines mehr oder weniger abstrakten Zugangs abzuwägen. In Abschnitt 4 werden wir das an einigen Beispielen durchspielen.

Abgesehen von der bereits erläuterten Unvermeidlichkeit besteht eines der wichtigsten Argumente für Abstraktion darin, dass durch das Ausklammern unwesentlicher Eigenschaften der untersuchten Objekte sich der Geltungsbereich der Überlegungen ausweitet. Der damit verbundene Vorteil, insbesondere auch aus Sicht der angewandten Mathematik, liegt auf der Hand. Aus Sicht der reinen Mathematik erhöht Abstraktion darüber hinaus die Klarheit, mit der Sachverhalte zutage treten. Dies bedeutet sowohl eine präzisere Konzentration aufs Wesentliche, als auch Vereinheitlichung und Denkökonomie.

Diesen Vorteilen von Abstraktion steht als Nachteil gegenüber, dass abstrakte Strukturen meist als weniger anschaulich empfunden werden und sich dem Bewusstsein weniger unmittelbar einprägen als sinnlich gestützte Vorstellungen. Wir wollen Abstraktion im Unterricht also nicht mutwillig weiter treiben, als sie dem Verständnis dienlich ist. An geeigneten Stellen hat Mathematikunterricht aber immer wieder die Erfahrung zu vermitteln, dass Abstraktion nicht nur ein wesentliches, sondern auch ein nützliches Instrument mathematischen Denkens ist.

3.3. Formelsprache

Von weniger grundsätzlicher, dafür größter pragmatischer Bedeutung für die Mathematik ist ihre Formelsprache. Als Werkzeug bei der mathematischen Arbeit ist sie fast unerlässlich und gilt deshalb mit gutem Recht als unverzichtbarer Inhalt von Mathematikunterricht. Aber in welchem Ausmaß ist sie unverzichtbar? Ähnlich wie bei Abstraktion gilt es, sich klar zu machen, worin Vor- und Nachteile generell bestehen, um in konkreten Fällen klarer urteilen zu können.

Auf offensichtliche Weise dient die mathematische Formelsprache zur Abkürzung. Nehmen wir als Beispiel die Formel $K_t = K_0(1+\frac{p}{100})^t$ für ein Guthaben K_t, das entsteht, wenn ein Startkapital K_0 über eine Laufzeit von t Jahren mit $p\%$ pro Jahr verzinst wird. Man versuche, diese Formel in eine natürliche Sprache zu übersetzen, ohne jegliche mathematische Symbolik. Schnell wird dabei klar, warum im Mittelalter, als diese Symbolik noch nicht entwickelt war, Rechenmeister gut davon leben konnten, wenn sie für ihre nicht eingeweihten Kunden Rechenaufgaben erledigten, die heute Volksschulstoff sind.

Weniger offensichtlich, aber noch wichtiger als die Abkürzung sprachlicher Ungetüme ist die Möglichkeit, durch mathematische Formelsprache gedankliche Strukturen deutlicher sichtbar zu machen. Man erkennt das bereits an obiger simpler Formel. Denn in ihr sind Addition, Multiplikation, Division und Exponentiation in einer ganz bestimmten Weise verbunden, die ein geschulter Leser der Formel mit einem einzigen Blick erfasst. Interessante mathematische Aussagen involvieren darüber hinaus meist auch logische Bestandteile, insbesondere Quantoren. Formelsprache kann die Struktur solcher Aussagen oft besser wiedergeben als die natürliche Sprache (siehe auch Beispiele in Abschnitt 4).

Diese Vorteile nutzen kann andererseits nur, wer mit mathematischer Formelsprache hinreichend vertraut ist. Wie viel Unterrichtszeit regelmäßig investiert werden soll, um diese Vertrautheit beständig zu fördern, ist nicht a priori klar. Auch hat sich die Formelsprache (meist aus historischen Gründen) nicht immer so entwickelt, wie man das aus heutiger Sicht als optimal empfinden würde.[4] Man wird also im konkreten Einzelfall zu entscheiden haben.

3.4. Terminologie

Unter Terminologie versteht man die Wahl bestimmter Bezeichnungen (Termini, Vokabel) für bestimmte Objekte und Begriffe. Im Vergleich mit der in 3.1 diskutierten Begriffsbildung handelt es sich also um eine eher banale Angelegenheit. Umso erstaunlicher ist es, dass allem Anschein nach der Unterschied zwischen Vokabel und Begriff nicht geistiges Allgemeingut zu sein scheint. Wer mit den Worten „Das ist nur ein Streit um Begriffe!“ eine Diskussion abtun möchte, meint vielleicht „Das ist nur ein Streit um Bezeichnungen!“ In diesem Fall wäre es tatsächlich schmerzlos und zeitsparend, sich für die gerade laufende Diskussion auf eine gemeinsame Bezeichnung zu einigen. Handelt es sich hingegen tatsächlich um einen Streit um Begriffe, so ist das „nur“ in obiger Formulierung unangebracht. Herrscht nämlich kein Konsens über den in Rede stehenden Begriff, so ist tatsächlich nicht klar, wovon das Gespräch handelt. Um Missverständnisse zu vermeiden, hätte daher eine Begriffsklärung (in mathematischer Terminologie: die Angabe einer Definition) höchste Priorität.

Terminologie ist also Konvention, und Konventionen sind in hohem Maße austauschbar. Immerhin verlangt aber auch die Umstellung von Konventionen eine gewisse Zeit der Gewöhnung und einen gewissen geistigen Aufwand. Deshalb wird man im Zweifelsfall Einheitlichkeit anstreben und die in der Fachwissenschaft übliche Terminologie gegenüber einer artifiziellen bevorzugen. Trotzdem sind pragmatische Argumente denkbar, die für den Mathematikunterricht auch Alternativen rechtfertigen können. Befangenheiten bei gewissen Vokabeln oder Redewendungen bei den Lernenden könnten beispielsweise solche Argumente liefern. Auch sprachlich komplizierte Konstrukte, deren Sinn von den Lernenden nicht nachvollzogen werden kann, wird man zu meiden suchen. Abweichungen ohne nachvollziehbare Begründung sind aber fragwürdig. Das gilt insbesondere, wenn durch eigenwillige Terminologie ein Sonderstatus von „Schulmathematik“ gefördert wird, der Gefahr läuft, sich gegenüber der Vielfalt der Mathematik hermetisch abzusondern.

3.5. Die Frage, auf die es ankommt

In Abschnitt 3.1 meines Artikels Winkler (2018a) habe ich anhand des Katalogs der Grundkompetenzen für die AHS-Matura kritisiert, dass – etwas verkürzt formuliert – im Mathematikunterricht traditionell so mancherlei Exerzitien widerspruchslos gedrillt werden, aber so gut wie nie die Frage gestellt wird: „Was ist das?“ Ich habe das in Hinblick auf die Priorität von Begriffsbildung gemeint, wie ich sie hier in 3.1 erläutert habe. Dennoch ist die Entgegnung in Ableitinger et al. (2018) insofern berechtigt, als man die Frage „Was ist das?“ auch anders verstehen kann, als es meine Intention war. Um Missverständnisse zu vermeiden, möchte ich deshalb als Alternative die Frage „Worauf kommt es an?“ in den Mittelpunkt stellen, oder etwas expliziter:

[4] Ein Beispiel ist die traditionelle Schreibweise $f(x)$ für Funktionswerte. Im Gegensatz dazu entspräche die Schreibweise xf eher der Vorstellung, dass zunächst ein Argument x vorgegeben ist, auf das dann die Funktion f angewendet wird. Vor allem in Hinblick auf die Verkettung von Funktionen (etwa im Zusammenhang mit Gruppenaktionen) wird in der Literatur deshalb manchmal xf gegenüber $f(x)$ als Notation bevorzugt.

Sind die ausgewählten Inhalte geeignet zu zeigen, worauf es im jeweiligen Stoffgebiet ankommt?

Am Beispiel des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wird sich in 4.3 und 4.4 deutlich zeigen, warum diese Frage geeigneter ist, als Wegweiser durch den Mathematikunterricht zu dienen.

4. Beispiele aus dem Schulstoff

In diesem Abschnitt werden einige Stoffgebiete behandelt, wo Abstraktion im Unterricht keine Erschwernis sein muss, sondern im Gegenteil: Richtig platziert, kann Abstraktion eine ganz wesentliche Hilfe für ein adäquates Verständnis des Kernstoffs sein. In einigen wichtigen Fällen geht es nicht einmal darum, schwierige neue Abstraktionen zu bewältigen, sondern es genügt (Laurent Schwartz folgend, siehe 1.2) Gewohntes als vertraut gewordenes Abstraktes zu erkennen. Im Idealfall befindet man sich damit auf dem von Kant vorgezeichneten Weg von der Anschauung über die Begriffsbildung zu den Ideen (siehe 1.1) und wohl auch im Einklang mit den Intentionen des Lehrplans (siehe 1.3). Die ausgewählten Beispiele, anhand derer das illustriert werden soll sind die mathematischen Begriffe von Menge und Zahl (4.1), Punkt, Gerade etc. (4.2), Funktion=Abbildung (4.3), Maß und Wahrscheinlichkeit (4.4) sowie Grenzwert, Formelsprache und logische Struktur (4.5).

4.1. Menge und Zahl

Fragt man, was denn der Anfang aller Mathematik sei, bieten sich zu allererst die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$ an. Schon Kleinkinder lernen in bescheidenem Rahmen damit zu operieren und entwickeln bald eine gewisse Vertrautheit mit ihnen. Aus diesem Grunde werden die natürlichen Zahlen als der Inbegriff des Konkreten in der Mathematik empfunden. Dennoch sind sie das Ergebnis einer Abstraktion. Denn bevor ein Kind die Zahl 3 begrifflich erfassen kann, hat es drei Finger, drei Äpfel, drei Birnen, drei Menschen o.ä. wahrgenommen. Die Zahl 3 entsteht also als abstrakte Gemeinsamkeit aller 3-elementigen Mengen, wobei das Konkrete der besonderen Elemente weggenommen („abstrahiert“) worden ist. Besonders attraktiv wird diese Abstraktion, wenn man auch noch bedenkt, dass drei plus zwei Finger fünf Finger sind, ebenso wie drei plus zwei Äpfel fünf Äpfel etc. Erst durch diese Beobachtung, dass die Anzahl der Elemente einer Vereinigung disjunkter Mengen nur von den einzelnen Anzahlen abhängt und nicht von der speziellen Natur der Elemente, erhalten Zahlenbeziehungen wie $3+2=5$ ihren Sinn.

Die natürlichen Zahlen erweisen sich somit als eine der eindrucksvollsten Bestätigungen von Laurent Schwarz’ Sentenz vom Konkreten als dem Abstrakten, an das wir uns gewöhnt haben. Umso eindrucksvoller ist die historische Tatsache, dass es bis ins späte 19. Jahrhundert dauerte, als Cantor den Begriff der Menge in der Mathematik heimisch machte, obwohl der Umgang mit den eigentlich abstrakteren natürlichen Zahlen in der Geschichte der Menschheit schon seit vielen Jahrtausenden nachweisbar ist.

Auch die Beschreibungen von $\mathbb{N}$ als arithmetischem System, wie Giuseppe Peano (1858-1932) und Richard Dedekind (1831-1916; zum Thema siehe auch die Neuausgabe Dedekind (2017)) sie fast zeitgleich vorschlugen, stellten bedeutende Abstraktionsleistungen dar. Sie erfolgten historisch erst nach der Einführung des Mengenbegriffs durch Cantor (wenn auch noch nicht immer in dieser Terminologie) und muten Nichtmathematikern vielleicht als Abstrakta an, an die man sich noch *nicht* gewöhnt hat. Man kann das – besonders mit Blick auf das Induktionsprinzip, das schon vor einiger Zeit aus dem Schulstoff herausgefallen ist – bedauerlich finden (was ich persönlich tue), doch führt diese Diskussion zu weit und soll hier unterbleiben. Sehr wohl in Erinnerung gerufen sei hier aber der befremdliche Umstand, dass Mengenlehre im Unterricht seit Jahrzehnten den zweifelhaften Ruf genießt, abstrakt und unverständlich zu sein. Da waren wohl falsche Propheten am Werk! Ich behaupte, dass die zugrundeliegenden Missverständnisse nicht am Mengenbegriff selbst liegen, sondern an der – gelinde gesagt – unglücklichen Art, wie er damals in den Unterricht gezwängt wurde. Doch führte auch dies zu weit in eine andere Richtung, als wir sie hier verfolgen wollen.

4.2. Geometrie

Es braucht nicht lange ausgeführt zu werden, dass geometrische Strukturen wie Punkt, Gerade etc. Idealisierungen von Gebilden sind, die als physische Erscheinungen nie in idealer Form vorkommen. Ist auch Idealisierung nicht genau dasselbe wie Abstraktion, so leuchtet doch unmittelbar ein, dass die moderne mathematische Antwort, was denn nun ein Punkt sei (nämlich beispielsweise ein Paar (x,y) in der als kartesische Produktmenge gedachten Ebene $\mathbb{R}^2$) und was eine Gerade (nämlich die Menge jener Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, die eine Gleichung der Form $ax+by=c$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ erfüllen) mit Begriffsbildungen und Abstraktionen einher gehen, so wie das allgemein in 3.1 und 3.2 ausgeführt wurde.

4.3. Der Abbildungsbegriff

Mögen die Bemerkungen aus 4.2 zur Geometrie vielleicht auch als Gemeinplatz erscheinen, so wird das Thema Abstraktion im Schulunterricht schon wesentlich spannender, wenn man sich die Rolle eines Begriffs vor Augen hält, der unter dem Titel „Funktionale Abhängigkeiten“ sogar einen ganzen von nur vier Inhaltsbereichen des AHS-Oberstufenstoffes bildet und im seit 2015 gültigen Katalog zur Reifeprüfung mit 35 von 73 fast die Hälfte aller Grundkompetenzen einnimmt.

Bekanntlich ist eine Abbildung oder, synonym, eine Funktion $f : A \to B$ eine Zuordnung zwischen den Elementen der Mengen A und B derart, dass zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ gehört. Aber was bedeutet in dieser Formulierung das Wort „Zuordnung“? Zunächst wohl nichts anderes, als dass zu je zwei gegebenen Elementen $a \in A$ und $b \in B$ feststeht, ob sie in dieser Beziehung (Relation) f stehen. Nichts ist begrifflich einfacher und klarer als die übliche mathematische Modellierung, die darin besteht, f als Menge jener Paare (a,b) (wir kennen sie schon aus der Geometrie, siehe 4.2) zu betrachten, für die die Relation f besteht. Gilt die bewusste Zusatzbedingung, so ist f eine solche Relation, die sogar die Bezeichnung Funktion oder Abbildung verdient. In der üblichen Auffassung wird also eine Relation oder auch Funktion mit dem identifiziert, was im Schulunterricht der Graph der Funktion heißt.

Darüber, wie diese in der Mathematik übliche und mehr als bewährte Sichtweise unter dem Vorwand dubioser didaktischer Argumente häufig in Nebel gehüllt wird, schütteln Mathematiker regelmäßig den Kopf. Ich verweise auf meine etwas weiter ausholenden Ausführungen in Abschnitt 2.3 von Winkler (2018a) und will mich hier auf den Aspekt der Abstraktion konzentrieren.

Zunächst ist nämlich eine Erklärung am Platz, warum bei diesem Beispiel tatsächlich eine (äußerst wertvolle) Abstraktion im Spiel ist und nicht nur eine Formalisierung. Das hat zu tun mit dem Übergang von der Frage „Was ist das?“ zur Frage „Worauf kommt es an?“, den ich in 3.5 vorgeschlagen habe. Die Geschichte der Mathematik, insbesondere des Funktionsbegriffs, zeigt nämlich eindrucksvoll, dass es wünschenswert ist, davon abzusehen, ob eine Funktion durch eine Formel angegeben oder zwischen den Elementen $a \in A$ und $b \in B$ wenigstens irgendeine Kausalität oder sonstige außermathematische inhaltliche Beziehung beschrieben werden kann, durch die f definiert ist. Man gewinnt nämlich unermesslich fruchtbare Freiheit, wenn man von solch inhaltlichen Gesichtspunkten absieht (abstrahiert), als Relationen beliebige Teilmengen von $A \times B$ zulässt und es für Funktionen/Abbildungen darüber hinaus nur darauf ankommen lässt, dass zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a,b) \in f$ existiert.

In ähnlicher Weise handelt es sich bei den ebenfalls in Winkler (2018a) behandelten Rechenregeln (in anderer Terminologie: Funktionalgleichungen) um Abstraktionen, die Vielfältiges vereinheitlichen, damit den Überblick erleichtern und auch Antworten geben auf die Frage „Worauf kommt es an?“ genauer: „Warum spielen gewisse Funktionstypen in der Mathematik eine so wichtige Rolle?“ Antwort: „Weil diese Rechenregeln/Funktionalgleichungen Strukturverträglichkeiten zum Ausdruck bringen.“[5] So sehr sich Vertiefungen in Richtung algebraischer Strukturen wie Gruppe, Ring und Körper anbieten, wäre das mangels interessanter Beispiele abseits der Zahlenbereiche vermutlich ein Abstraktionsschritt, der im Schulunterricht vergleichsweise wenig zusätzliche Einsichten brächte.

[5] Es geht dort um die Beziehungen $k(x+y) = kx+ky$ also $f(x+y) = f(x)+f(y)$ für lineare, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ also $f(xy) = f(x)f(y)$ für Potenz-, $a^{x+y} = a^x a^y$ also $f(x+y) = f(x)f(y)$ für Exponential- und $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ also $f(xy) = f(x)+f(y)$ für Logarithmusfunktionen.

4.4. Maß und Wahrscheinlichkeit

Wir beginnen mit der Formel $F(D) = \frac{ch_c}{2}$ für den Flächeninhalt $F(D)$ eines Dreiecks D mit Seitenlänge c und zugehöriger Höhe h_c. Eine elementare Begründung gelingt, indem man das Dreieck einem Rechteck R einschreibt und feststellt, dass D genau die halbe Fläche von R einnimmt. Die Argumentation fußt dabei auf den folgenden, in geeigneter Sprache schon Volksschülern vermittelbaren Sachverhalten:
1. Die Fläche eines Rechtecks ergibt sich als Produkt der Seitenlängen.
2. Flächen addieren sich bei disjunkten Vereinigungen.
3. Flächen bleiben unverändert bei Drehungen (ebenso bei Schiebungen und Spiegelungen).

Es ist ein kleiner (im Wesentlichen nur die Notation betreffender) Schritt im Unterricht, der aber einem großen Schritt in der Geschichte der Mathematik entspricht, wenn man sich die folgende daran anschließende Aufgabe stellt:

Man ordne möglichst vielen Teilmengen $A, B, \ldots$ von $\mathbb{R}^2$ eine Fläche $F(A), F(B), \ldots$ so zu, dass folgende drei Regeln gelten:
1. $F(R) = ab$ für alle Rechtecke R mit Seitenlängen a und b. Insbesondere hat das Einheitsquadrat Einheitsfläche. (Normierung)
2. $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$ für disjunkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. (Additivität)
3. $F(b(A)) = F(A)$, wenn b eine Bewegung (d.h. Drehung, Schiebung oder Spiegelung) ist. (Invarianz bezüglich Bewegungen)

Eine sehr weit reichende Lösung dieser Aufgabe, die die höhere Mathematik anbietet, lautet: Das ist möglich für alle Mengen aus einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, die sämtliche Rechtecke (und folglich alle Borelmengen) enthält. Verschärft man Additivität zu σ-Additivität und fordert man Vollständigkeit sowie Regularität von F, so sind F und damit auch $\mathcal{A}$ sogar eindeutig bestimmt.

Ohne hier (geschweige denn im Schulunterricht) auf alle in diesem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das zweidimensionale Lebesguemaß vorkommenden Begriffe näher eingehen zu müssen, besticht doch die Einfachheit der drei Forderungen, um die es beim Flächenmessen offenbar geht. Noch eindrucksvoller ist das, wenn man folgende Analogie zur Wahrscheinlichkeit zieht:

Sei Ω eine Menge von sogenannten Elementarereignissen $\omega \in \Omega$, und seien $A, B, \ldots \subseteq \Omega$ zusammengesetzte Ereignisse. Dann gilt für ihre Wahrscheinlichkeiten $W(\Omega), W(A), W(B), \ldots$:
1. $W(\Omega) = 1$, sofern Ω die Menge aller möglichen Elementarereignisse ist. (Normierung)
2. $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$, wenn die Ereignisse A und B einander ausschließen. (Additivität)
3. $W(A) = W(B)$, wenn dies durch geeignete Symmetrieüberlegungen nahegelegt wird. Typisches Beispiel: Ω endlich, alle $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich und $|A| = |B|$. (Invarianz bezüglich maßerhaltender Transfomationen, z.B. Bijektionen)

Diese Beobachtungen führen geringfügig verschärft zum Begriff des Maßes und des Wahrscheinlichkeitsmaßes als Spezialfall. Für den Unterricht ergibt sich daraus: Unabhängig davon, wie ausführlich man auf den Maßbegriff samt möglichen Verfeinerungen eingeht, wäre es ein schweres Versäumnis, jene Abstraktion zu scheuen, die die Analogie zwischen herkömmlichem Messen und Wahrscheinlichkeit erst deutlich hervortreten lässt. Wie schon im allgemeinen Teil beschrieben, ermöglicht das eine Vereinheitlichung scheinbar weit entfernter Stoffgebiete. Auf diese Weise können Intuitionen, die bei der Beschäftigung mit einem Gebiet entwickelt worden sind, auch auf einem anderen Gebiet fruchtbar gemacht werden. Außerdem entsteht bei der Zusammenschau ein wesentlich besserer Überblick.

Auch zu den Funktionalgleichungen aus 4.3 ergibt sich eine Verbindung, wenn man die Additivität $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$ als Strukturverträglichkeit liest und etwa mit der Gleichung $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für die Exponentialfunktion vergleicht. Treten in den beiden Gleichungen auch verschiedene Operationen auf (links $\cup$ und $+$, rechts $+$ und $\cdot$), so geht es doch in beiden Fällen darum, nicht nur einzelne Werte zu bestimmen, sondern Funktionen W bzw. f im Sinne von 4.3. Formal gesehen geht es also um (in der Regel unendliche) Mengen von Wertepaaren der Form $(A, W(A))$ bzw. $(x, f(x))$, die gewisse (Funktional-) Gleichungen erfüllen.

Für die Mathematik hat es sich als epochal erwiesen, dass Kolmogorow im Wesentlichen den hier beschriebenen Zugang zu Ende dachte und damit die moderne Auffassung von Wahrscheinlichkeitstheorie begründete. Indem er in der beschriebenen Weise durch Abstraktion gewonnene formale Eigenschaften zur Definition dessen machte, was man seither unter Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsraum etc. versteht, befreite er dieses so wichtige Teilgebiet der Mathematik von diversen philosophischen Problemen, das „Wesen" von Wahrscheinlichkeit zu fassen, wie sie vor ihm zahlreiche große Geister beschäftigt hatten. Kolmogorow konnte mit seiner Theorie u.a. das Gesetz der großen Zahlen (arithmetische Mittel konvergieren „mit hoher Wahrscheinlichkeit" gegen den Erwartungswert) präzisieren und beweisen, ohne Wahrscheinlichkeit dabei sehr fragwürdig z.B. als Grenzwert relativer Häufigkeiten erklären zu müssen, deren Konvergenz ja keineswegs gesichert ist.

Im Lichte von 3.5 lässt sich also sagen: Kolmogorow beantwortete nicht die Frage „Was ist Wahrscheinlichkeit?", sondern die Frage „Worauf kommt es bei Wahrscheinlichkeit an?" Seine Antwort lautet etwas verkürzt: „Darauf, dass man Wahrscheinlichkeit als eine additive Zuordnung $A \mapsto W(A)$ versteht." Dank der darauf basierenden Theorie Kolmogorows erfüllt auch dieses wichtige Teilgebiet die durch Hilbert und seine Zeitgenossen etablierten methodischen Standards der Mathematik. Ob man dabei im Unterricht von „Komogorow-Axiomen" und „σ-Algebren" spricht (wie es am genauesten wäre), von der „Additionsregel" (wie das im Schulunterricht üblich zu sein scheint) oder von der „wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellierung" (wie ich vorschlagen würde), betrifft nur die Terminologie (siehe 3.4) und ist von untergeordneter Bedeutung. Vergleichsweise wichtiger ist die deutliche Abgrenzung der „Additionsregel" von der im Unterricht oft „Multiplikationsregel" genannten Formel $W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B)$. Diese ist *nicht* Teil der Definition von Wahrscheinlichkeit, sondern jener für die (keineswegs allgemeingültige) Unabhängigkeit von Ereignissen A und B – um einen weiteren Zentralbegriff der Stochastik zu erwähnen, der gelegentlich vernachlässigt wird.

4.5. Grenzwert, Formelsprache und logische Struktur

Als letztes Beispiel greife ich nochmals jenen Begriff auf, den ich für den vielleicht wichtigsten der Mathematik überhaupt halte und dem ich deshalb schon im vergangenen Jahr mit Winkler (2018/19) einen ganzen Artikel in der vorliegenden Serie gewidmet habe: den Grenzwertbegriff. Darin habe ich vor allem die analoge logische Struktur von fünf für den Schulstoff relevanten Ausprägungen hervorgehoben: Konvergenz von Folgen, Reihen, Funktionen (Stetigkeit), Differenzenquotienten (Ableitung) und Ober-, Unter- bzw. Riemannsummen (Integral). In jedem dieser fünf Fälle besteht die entscheidende Denkfigur darin, dass zu einer beliebig vorgegebenen Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ ein Schwellenwert $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bzw. $\delta(\varepsilon) > 0$ gesucht ist, der für alle Werte $n > n_0(\varepsilon)$ bzw. $|\Delta x| < \delta(\varepsilon)$ eine Approximation der gesuchten Größe bis auf einen Fehler $< \varepsilon$ garantiert. Unter Verwendung logischer Quantoren lautet im Falle der Konvergenz einer Folge mit den Gliedern a_n gegen einen Grenzwert α die vollständige Formel

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon): \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon,$$

für die anderen vier Beispiele sinngemäß modifiziert. In allen Fällen bleibt eines gleich, nämlich die sprachliche Struktur: „Für alle ... gibt es ein ... derart, dass für alle ... gilt." Symbolisch manifestiert sich das in der Abfolge $\forall \ldots \exists \ldots \forall \ldots$ der logischen Quantoren.[6] So sehr dem Anfänger die Verwendung der Symbole $\forall$ und $\exists$ zunächst vielleicht widerstreben mag – es gibt wohl kaum ein überzeugenderes Beispiel für den Nutzen mathematischer Symbolsprache. Denn so gut wie jede interessante mathematische Aussage, sei sie als Definition oder als Satz zu verstehen, hat eine innere quantorenlogische Struktur, von der alles entscheidend abhängt.[7] Der Hauptzweck vieler mathematischer Definitionen wie der des Grenzwerts kann gerade darin gesehen werden, solche logische Strukturen in leichter fassliche Pakete zu packen, die dann als Ganzes wahrgenommen und der Intuition besser zugänglich gemacht werden.

[6] Natürlich haben sich Mathematiker darüber Gedanken gemacht, wie man die fünf erwähnten Ausprägungen des Grenzwertbegriffs wie auch viele andere unter ein gemeinsames Konzept bringen kann. Eine Lösung ist die Konvergenz sogenannter Netze. Sie sind ähnlich wie Folgen definiert, nur dass allgemeinere Indexmengen mit Ordnungsstruktur als nur $\mathbb{N}$ zugelassen sind.

[7] Leserin und Leser mögen vielleicht kurz innehalten und diese Behauptung an einigen Beispielen überprüfen. Besonders die Struktur $\forall \ldots \exists \ldots \forall \ldots$ des Grenzwerts tritt besonders häufig auf, es kann aber auch deutlich komplizierter werden.

Im Fall des Grenzwerts könnte man auch sagen, dass ein unendlicher Prozess (nämlich jener der infinitesimalen Annäherung) zu einem handlichen Objekt gemacht wird, das gewissermaßen mit einem (Be-)Griff erfasst werden kann. So fällt es leichter, sich daran zu gewöhnen und (wieder im Sinne von Laurent Schwartz) das Abstrakte zum Konkreten werden zu lassen. Kaum etwas lohnt deshalb so sehr die Vermittlung im Mathematikunterricht wie die Fähigkeit, logische Strukturen (und nicht nur rein arithmetische Ausdrücke aus simplen Zahlen und Termen) zu erkennen und mit Hilfe von Formelsprache rasch zu erfassen.

Doch zurück zum Grenzwert: Keinesfalls soll in Frage gestellt werden, dass gerade bei diesem Begriff im Unterricht zunächst anschaulich-intuitive Vorstellungen aufgebaut werden sollen. Erst wenn diese vorhanden sind, kann auch die präzise Begriffsbildung gewürdigt werden. Aus persönlicher Erinnerung an meine eigene Schulzeit weiß ich, dass es eines der größten Aha-Erlebnisse sein kann, wenn das intuitiv-anschauliche Verstehen des Grenzwerts einer Folge durch den korrekten Begriff mit $\forall \varepsilon > 0 \ldots$ gekrönt wird.[8] Solche Erfahrungen, wo der Wert präziser mathematischer Begriffsbildung erlebbar wird, sollten im Schulunterricht immer wieder angeboten werden, denn sie betreffen einen der allerwichtigsten Aspekte der Mathematik.

5. Schluss

Ob ein bestimmter mathematischer Inhalt im Unterricht vorkommen soll, hängt vom konkreten Einzelfall ab – aber nicht nur. Denn ein Inhalt kann auf einen anderen, auf den ersten Blick weit entfernten Inhalt ein neues Licht werfen und das Verständnis in einem Ausmaß fördern, das gegenüber dem zusätzlichen Aufwand bei Weitem überwiegt. (Beispiele dafür habe ich in Abschnitt 4 diskutiert). Ich möchte dieses Phänomen mit dem Schlagwort „mehr ist weniger" kennzeichnen und dem populären „weniger ist mehr" gegenüberstellen. Mit „weniger ist mehr" sind Situationen gemeint, wo ein Weglassen (Abstrahieren) von Beiläufigem den Blick auf das Wesentliche freigibt und deshalb einem Zuviel an Stoff vorzuziehen ist. Dass solche Situationen häufig vorkommen, ergibt sich aus dem vorliegenden Artikel allein deshalb, weil wir Abstraktion (d.h. Weglassen von Unwesentlichem) als ein unverzichtbares Element in der Mathematik identifiziert haben. Mit „mehr ist weniger" möchte ich aber betonen, dass aus den bereits ausführlich dargelegten Gründen gelegentlich auch das Gegenteil vorzuziehen ist, nämlich zusätzliche Lehrinhalte zu bringen, sofern sie die Vernetzung fördern, den Blick aufs Große schärfen und so dem Verständnis dienen. Man hat also abzuwägen, ob – um es auf eine Formel zu bringen – die repräsentative Kraft des charakteristischen Beispiels (weniger ist mehr) oder die vereinheitlichende Kraft der Abstraktion (mehr ist weniger) überwiegt.

Verweise auf irgendwann gescheiterte Versuche, gewisse Lehrinhalte im Unterricht unterzubringen, greifen dabei häufig zu kurz. Es ist nämlich erstens nicht gesagt, dass diese gescheiterten Versuche in Bezug auf den konkreten Inhalt klug angegangen wurden (Beispiel: verunglückte Mengenlehre und Strukturmathematik im Rahmen von „New Math"); und zweitens kommt es bei „mehr ist weniger" entscheidend darauf an, dass Inhalte mit anderen in eine fruchtbare Beziehung gesetzt werden. Aufgrund einer isolierten Betrachtung allein kann das nicht beurteilt werden. Lehrinhalte trivialisierend zu verfälschen oder gar zu eliminieren, weil sie anspruchsvoller erscheinen als andere, ohne dabei den Bildungswert in Rechnung zu stellen, ist besonders kurzsichtig. Das wird deutlich, wenn man einen Vergleich zur Staatsbürgerkunde zieht: Das moderne Konzept eines liberalen, demokratischen Rechtsstaates mit Gewaltenteilung, Grundrechten und allen begleitenden Institutionen, die eine ausgewogene Balance zwischen Individualrechten und ordnender Staatsmacht garantieren sollen, ist um ein Vielfaches komplizierter als ein absolutistisches Staatswesen (wie es in Europa zu Newtons und Leibniz' Zeiten vorherrschte). Eine Argumentation, wie ich sie gegen anspruchsvolle Begriffe im Mathematikunterricht (wie etwa gegen einen präzisen Grenzwertbegriff) schon häufig vernommen habe, würde nahelegen, analog zu fordern: „Begnügen wir uns doch damit, einander das Wort *Demokratie* immer wieder intuitiv vorzusagen! Eine inhaltliche Auseinandersetzung mit den dahinter stehenden Begriffen ist für die breite Bevölkerung viel zu schwierig."

[8] Ein großer Dank gilt meinem Lehrer und Klassenvorstand Karl Baumgartner, der mir genau dieses entscheidende Aha-Erlebnis vor fast 40 Jahren großartig vermittelte!

Wohin solch eine Einstellung führt, sei der Phantasie (oder auch nur dem Wahrnehmungsvermögen) der Leserin und des Lesers anheimgestellt. Auch wenn in der Mathematik die politische Relevanz eines guten Unterrichts nicht so unmittelbar sichtbar ist wie in der Staatsbürgerkunde (bei genauerer Betrachtung schon eher, siehe Winkler (2018b)), steht außer Zweifel: Mathematik ohne sorgfältige Begriffsbildung und damit verbundene Abstraktion ist wie Sprache ohne Vokabel und Grammatik oder wie Musik ohne Klang.

Danksagung: Ich danke Martin Goldstern, Helmut Heugl, Manfred Kronfellner und Roland Steinbauer für wertvolle Anregungen zur Verbesserung früherer Versionen des vorliegenden Artikels.

Literatur

Christoph Ableitinger, Hans Humenberger, Michael Oberguggenberger. *Kurze Replik auf einen Aufsatz von R. Winkler: Zentralmatura in der Sackgasse?* Internationale Mathematische Nachrichten 278 (August 2018), 23-31.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. *AHS-Lehrpläne Oberstufe neu: Mathematik.* Am 19.7.2019 online verfügbar unter: `https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf`

Richard Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und Irrationale Zahlen.* Springer (2017, Hrsg: Stefan Müller-Stach).

Stefan Götz. *Eine echte Teilmenge: zum Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik an AHS.* In: Mathematik im Unterricht, Band 9 (Hrsg.: Günter Maresch, Karl Josef Fuchs, Simon Plangg, Marion Zöggeler), 2018, S. 15–28.

Immanuel Kant. *Werkausgabe in 12 Bänden*, Suhrkamp (1977). Wilhelm Weischedel (Hrsg).

Laurent Schwartz. *Un mathématicien aux prises avec le siècle.* Paris: Odile Jacob 1977.

Eugene Wigner. *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, No. I (February 1960). New York, John Wiley & Sons.

Reinhard Winkler. *Zentralmatura in der Sackgasse?* Internationale Mathematische Nachrichten 237 (2018a), 27-58. Auch online unter: `http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/zm.pdf`.

Reinhard Winkler. *Mathematik als zentraler Teil des Projektes Aufklärung auf breiter Front.* In: Mathematik und Gesellschaft. Historische, philosophische und didaktische Perspektiven. Herausgeber: Gregor Nickel, Markus Helmerich, Ralf Krömer, Katja Lengnink, Martin Rathgeb. Springer Spektrum (2018b), 99-106.

Reinhard Winkler. *Der Grenzwert – Zentralbegriff der Analysis.* Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) – ehemals Didaktikhefte der ÖMG, 51 (2018/19), 97-111. Eine Langversion mit Beweisen ist online verfügbar unter `https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html` oder unter `http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/lim-lang.pdf`.