Analysis 3 für Lehramt, Prüfung am 25.1.2013 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung im Prüfungs- und Besprechungsraum des Instituts im Freihaus, grüner Bereich, 5.Stock, Zeit gemäß individueller Vereinbarung

Hinweise bevor Sie beginnen:
1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
3. Die einzelnen Teile jeder Aufgabe hängen zusammen. Dies schafft nicht nur vereinzelte Abhängigkeiten, sondern ist oft auch als Hilfe gedacht.

1. (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Kontraktion auf X, d.h. für ein $\lambda \in [0, 1[$ und alle $x, y \in X$ gelte $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$. Weiters mögen die $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, eine Iterationsfolge bilden, d.h. es gelte $x_{n+1} = T(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit $c := d(x_0, x_1)$ die Abschätzung $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n c$.

   (b) Folgern Sie, dass die x_n aus (a) eine Cauchyfolge bilden.

   (c) Formulieren Sie das Kontraktionsprinzip (= den Fixpunktsatz von Banach).

   (d) Beweisen Sie dieses.

   (e) Sei $f : D \to \mathbb{R}^s$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^s$ offen und $f(a) = b$ für ein $a \in D$. Der Hauptsatz über Umkehrfunktionen besagt, dass unter gewissen Voraussetzungen V eine Abbildung g mit gewissen Eigenschaften E existiert. Wie lauten die genauen Voraussetzungen V?

   (f) Welche Eigenschaften E können in (e) garantiert werden?

   (g) Der Kern des Beweises des Hauptsatzes aus (e) besteht darin, zu einem aus einer gewissen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ beliebig vorgegebenen y ein x mit $f(x) = y$ zu finden. Das gelingt mit Hilfe des Kontraktionsprinzips, angewendet auf eine geeignete Transformation $T = T_y$ (die auf einer geeigneten Umgebung von a definiert ist). Wie ist T zu wählen?

   (h) Begründen Sie, warum die Polarkoordinatentransformation $f : [0, \infty[\times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $(r, \alpha) \mapsto (x(r, \alpha), y(r, \alpha))$ mit $x(r, \alpha) := r \cos \alpha$, $y(r, \alpha) := r \sin \alpha$, in jedem inneren Punkt a des Definitionsbereiches lokal umkehrbar im Sinne des Hauptsatzes (vgl. (e)) ist.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{1}{x^3}$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sei $f_A(x) := f(x)$, sofern $x \in A$ und $f_A(x) := 0$ sonst. Außerdem verwenden wir für das Lebesgue-Integral $\int f_A \, d\lambda$ (sofern definiert) die Abkürzung $I(A)$.

   (a) Begründen Sie, warum $I(A)$ für jedes Intervall $A = [a, b]$ mit $0 < a < b$ definiert ist.

   (b) Berechnen Sie $I(A)$ für $A = [a, b]$ mit $0 < a < b$.

   (c) Die Mengen $A_n \subseteq [0, \infty[$ mögen für alle $m \leq n$ die Inklusion $A_m \subseteq A_n$ erfüllen. Weiters sei $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Geben Sie eine Rechtfertigung für $I(A) = \lim_{n \to \infty} I(A_n)$. (Rückgriff auf die Definition oder Verwendung eines einschlägigen Satzes.)

   (d) Berechnen Sie $I([1, \infty[)$. Anleitung: Verwenden Sie (b) und (c) mit geeigneten A_n.

   (e) Berechnen Sie $I([0, 1])$.

   (f) Klassifizieren Sie sämtliche abgeschlossenen Intervalle $A = [a, b]$, $a \leq b \in \mathbb{R}$, danach, welcher der sechs möglichen Fälle eintritt: 1) $I(A) = 0$, 2) $0 < I(A) < \infty$, 3) $-\infty < I(A) < 0$, 4) $I(A) = \infty$, 5) $I(A) = -\infty$ oder 6) $I(A)$ ist nicht definiert.

   (g) Gibt es eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $I(A) = 1000$? (Begründung)

   (h) Geben Sie Mengen $A \subseteq B \subseteq [1, 2]$ an mit $I(A) = I(B)$, für die $B \setminus A$ überabzählbar ist.