Mathematik 1 für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker
Wintersemester 07/08 (Winkler)
Musterprüfung mit Lösungen

1. Sei $T \subseteq \mathbb{N}$.

   (a) Unter welchen beiden Voraussetzungen an T garantiert das Induktionsaxiom (nach Peano) $T = \mathbb{N}$?

   Lösung: $0 \in T$ und $\forall n \in \mathbb{N}: \ n \in T \to n + 1 \in T$

   (b) Geben Sie eine verbale Formulierung für die durch folgende Formel ausgedrückte Eigenschaft einer Menge $T \subseteq \mathbb{N}$:

   $$\forall n \in \mathbb{N}((\forall k \in \mathbb{N}(k < n \to k \in T)) \to n \in T)$$

   Lösung: T enthält jede natürliche Zahl, für die auch alle kleineren natürlichen Zahlen in T liegen.

   (c) Kann man aus der Eigenschaft in (b) stets auf $T = \mathbb{N}$ schließen?

   Lösung: Ja.

   Bemerkung 1: Man setze in (b) $n = 0$ um zu sehen, dass (b) automatisch $0 \in T$ impliziert, dass also der Induktionsanfang Teil der durch obige Formel behaupteten Aussage ist.

   Bemerkung 2: Diese Frage ist um eine Spur tückischer, als es die meisten tatsächlichen Prüfungsfragen. Ich möchte aber hervorheben, dass ein präzises Verständnis der mathematischen Formelsprache, insbesondere auch der logischen Struktur, wesentliches Lehrziel einer mathematischen Einführungsvorlesung für Informatiker ist. Überdies ist der Themenkreis Induktion/Rekursion für Informatiker besonders wichtig.

   (d) Sei $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels Induktion $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Lösung: Der Induktionsanfang gilt wegen $a_0 = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Für den Induktionsschritt berechnet man unter der Annahme $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ sofort $a_{n+1} = a_n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = (n + 1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)((n+1)+1))}{2}$, also die behauptete Formel für $n + 1$ statt n.

2. Stellen Sie sich ein rechteckiges Schachbrettmuster vor, bestehend aus m mal n Quadraten mit Seitenlänge 1. Wege seien nur entlang der Ränder dieser Quadrate erlaubt. Die kürzesten Wege vom linken unteren zum rechten oberen Eckpunkt des Rechtecks haben offenbar alle die Länge $m+n$. Die Menge all dieser kürzesten Wege sei mit $K(m,n)$ bezeichnet.

   (a) Wieviele kürzeste Wege gibt es für $m = 6$ und $n = 4$?

   Lösung: Naive Abzählungen oder Verwendung der allgemeinen Formel, siehe (c), ergeben $\binom{6+4}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$.

   (b) Jeder kürzeste Weg w lässt sich darstellen als eine Abfolge von Schritten w_i nach oben (o) oder nach rechts (r), symbolisch also $w = (w_1, w_2, \ldots, w_{m+n})$, z.B. $w = (r, o, r, r, o, o, o, r, r, r)$ (hier ist wieder $m = 6, n = 4$). Beschreiben Sie eine Bijektion f zwischen $K(m,n)$ und der Menge $T(m,n)$ aller m-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, m+n\}$.

   Lösung: $f : (w_1, \ldots, w_{m+n}) \mapsto \{i |\, w_i = r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m+n\}$.

   (c) Geben Sie eine allgemeine Formel für $|K(m,n)|$ an.

   Lösung: $|K(m,n)| = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$

   (d) Sei $m = 2$. Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt die asymptotische Formel $|K(2,n)| \sim cn^2$?

   Lösung: $|K(2,n)| = \binom{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{3}{2}n + 1 \sim \frac{n^2}{2}$, also $c = \frac{1}{2}$.

3. A sei die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ über dem Körper $\mathbb{R}$, $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung.

   (a) Bestimmen Sie $f_A(x)$ für den Vektor $x = (1, 1, 1)$.

   Lösung: $f_A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (b) Sei allgemein $y = (y_1, y_2) = f_A(x_1, x_2, x_3)$. Geben Sie Formeln für y_1 und y_2 in Abhängigkeit von x_1, x_2, x_3 an.

   Lösung:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

(c) Ist f_A surjektiv?

Lösung: Ja. (Begründung: Offenbar sind die beiden Zeilenvektoren von A linear unabhängig, also hat A Rang 2. Dies bedeutet, dass die Menge der Bilder unter f_A ebenfalls Dimension 2 hat, also ganz $\mathbb{R}^2$ sein muss.)

(d) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung für die Menge L aller $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $f_A(x) = (1, 0)$.

Lösung: Gemäß (b) können als Ausgangspunkt die Gleichungen (A) $1 = y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3$ und (B) $0 = y_2 = x_1 + 2x_2$ dienen. Aus (B) ergibt sich $x_1 = -2x_2$, was nach Einsetzen in (A) zu $1 = -2x_2 - x_2 + 2x_3$, also $2x_3 = 3x_2 + 1$ oder $x_3 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}$ führt. Wählt man den Parameter $t = x_2$, so erhält man die Parameterdarstellung

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Will man Brüche vermeiden, so kann man darin den Ortsvektor für $t = 1$ wählen und den Richtungsvektor verdoppeln. Das liefert die Darstellung

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $a_n = 1 + \frac{1}{n} + (-1)^n(2 - \frac{1}{n^2})$.

(a) Gelten für die Umgebung $U = U_1(3) = (2, 4)$ von 3 die folgenden beiden Aussagen?

i. $a_n \in U$ für unendlich viele n.

ii. Es gibt ein $N = N(\varepsilon) = N(1)$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Lösung: Für alle geraden n gilt $a_n \in U$, für die ungeraden nicht. Also gilt i., aber nicht ii.

(b) Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ an.

Lösung: Offenbar konvergieren die a_{2n} gegen 3, die a_{2n+1} gegen -1. Also sind -1 und 3 die Häufungspunkte der Folge.

(c) Geben Sie eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ an, so dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist.

Lösung: Ist n ungerade, so gilt $a_n = -1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, also liefert $n_k = 2k+1$ eine monoton fallende Teilfolge.

(d) Warum konvergieren alle monotonen Teilfolgen von $(a_n)_{n\geq 1}$?

Lösung: Die Abschätzung $|a_n| \leq 1 + \frac{1}{n} + 2 + \frac{1}{n^2} \leq 5$ gilt für alle $n \geq 1$. Dies zeigt die Beschränktheit der a_n und somit jeder Teilfolge. Ist also irgendeine Teilfolge zusätzlich monoton, folgt ihre Konvergenz aus dem Hauptsatz über monotone Folgen.

5. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ und $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(a) Stellen Sie f, g und h als Potenzreihen mit Anschlussstelle $x_0 = 0$ dar und geben Sie deren Konvergenzradius an.

Lösung: Die Formel für die geometrische Reihe zeigt $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $g(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ und $h(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ für $|x| < 1$. Also liegen Potenzreihendarstellungen um $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius 1 vor.

(b) Wie sind die c_n im Cauchyprodukt $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihen $A = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ definiert?
Lösung: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

(c) Formulieren Sie (ausführlich) eine (nichttriviale) hinreichende Bedingung für $AB = C$ (Notation von (b)).

Lösung: Die Reihen A und B müssen absolut konvergent sein. Dabei heißt allgemein eine Reihe mit den Gliedern a_n absolut konvergent, wenn auch die Reihe mit den Gliedern $|a_n|$ konvergiert. Generell heißt eine Reihe mit den Gliedern $a_n \in \mathbb{R}$ konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ besitzt. Dies wiederum bedeutet explizit, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ die Beziehung $|a_n - x| < \varepsilon$ gilt. (Bemerkung: Im allgemeinen muss man bei Definitionen oder Begründungen nicht alles bis Adam und Eva zurückverfolgen. In diesem Falle bin ich deshalb ziemlich weit zurückgegangen, um anhand der Musterprüfung die Wichtigkeit der auftretenden Begriffe zu unterstreichen.)

(d) Berechnen Sie das Cauchyprodukt der Reihen von f und g.

Lösung: Wegen der offensichtlichen Beziehung $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ für $|x| < 1$ und weil Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereichs stets absolut konvergieren, folgt aus (c), dass die Reihendarstellung von h aus (a) bereits das gesuchte Cauchyprodukt ist: $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$. Selbstverständlich würde auch ein Einsetzen in die allgemeine Formel aus (c) nach Rechnung dasselbe Resultat liefern.