Algebra, Prüfung am 8.3.2019, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte gleich ausfüllen):

Terminvereinbarung für die mündliche Prüfung persönlich im Anschluss an die schriftliche unmittelbar vor dem Hörsaal.

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Verwenden Sie für jede der beiden Aufgaben ein eigenes Blatt.
Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Blätter.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Das symmetrische Monoid $M(X)$ über einer gegebenen Menge X ist bekanntlich eine Algebra vom Typ $(2, 0)$. Ihre Trägermenge enthält als Elemente sämtliche Abbildungen $T : X \to X$. Die binäre Operation ist die Verkettung $\circ$ von Abbildungen, und die 0-stellige Operation wird mit der identischen Abbildung id_X auf X identifiziert.

   Speziell bezeichne in dieser Aufgabe M das symmetrische Monoid über der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Eine besondere Rolle wird in dieser Aufgabe jenes Untermonoid $M_0 \leq M$ spielen, welches aus allen $T_{k,d} : x \mapsto kx + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ besteht, außerdem ein bestimmtes Monoid mit Trägermenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und einer Einheitengruppe, die wir mit G bezeichnen.

   Darüber hinaus verwenden wir noch folgende Notationen und Sprechweisen: C_n bezeichnet wie üblich eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Ist kurz von einer Gruppe $\mathbb{R}$ die Rede, so ist die additive Gruppe $(\mathbb{R}, +, 0, -)$ aller reellen Zahlen gemeint. Diese ist zu unterscheiden von den multiplikativen Gruppen mit den Trägermengen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder auch $\mathbb{R}^+$. (Zur Illustration für die folgenden Aufgaben beachte man, dass der Logarithmus $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ zu einer beliebigen positiven Basis $a \neq 1$ ein Isomorphismus zwischen der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^+$ und der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ ist. Daraus schließt man auch sehr leicht auf die Isomorphie $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1) \cong (\mathbb{R}, +, 0) \times C_2$.)

   (a) Geben Sie jene binäre Operation $\cdot$ auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und jenes Element $e_0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ an, so dass gilt: Die Abbildung

   $$\iota : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to M, \quad (k, d) \mapsto T_{k,d},$$

   ist eine isomorphe Einbettung des Monoids $M_0' := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \cdot, e_0)$ in $(M, \circ, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$. (Offenbar ist $M_0 = \iota(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ der Bildbereich dieser Einbettung.)

   (b) Ist die Operation $\cdot$ aus Teilaufgabe (a) kommutativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Welche Elemente $(k, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ haben Inverse? (Diese bilden die Einheitengruppe G.) Geben Sie für solche (k, d) die Inversen $(k, d)^{-1}$ an.

   (d) Geben Sie zu jedem positiven $n \in \mathbb{N}$ die Menge O_n aller $(k, d) \in G$ mit der Ordnung n an. (Die Elemente, die in keinem der von Ihnen angegebenen O_n liegen, müssen folglich unendliche Ordnung haben.)

   (e) Geben Sie eine Untergruppe $U \leq G$ an mit $U \cong \mathbb{R}$.

   (f) Geben Sie eine Untergruppe $V \leq G$ an mit $V \cong \mathbb{R} \times C_2$.

   (g) Geben Sie einen surjektiven Homomorphismus $\varphi_1 : G \to C_2$ an.

   (h) Geben Sie einen surjektiven Homomorphismus $\varphi_2 : G \to \mathbb{R}$ an.

2. Bezeichne $\mathcal{R}$ die Varietät der Ringe (weder Kommutativität noch Einselement sind gefordert) und $\mathcal{R}_1$ die Varietät der kommutativen Ringe mit Einselement. Die Varietät $\mathcal{R}$ ist vom Typ $(2,0,1,2)$ mit Operationssymbolen $+, 0, -, \cdot$. Die Varietät $\mathcal{R}_1$ ist vom Typ$(2,0,1,2,0)$ mit Operationssymbolen $+, 0, -, \cdot, 1$.

   (a) Sei $R \in \mathcal{R}_1$. Ein Element p des Polynomrings $R[x]$ stellt man üblicherweise in der Form $p(x) = \sum_{i=0}^{n} r_i x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $r_i \in R$ dar. Die Addition in $R[x]$ ist koeffizientenweise definiert. Dann spielt $0 \in R$ auch in $R[x]$ die Rolle des Nullelements, und auch die Bildung additiver Inverser erfolgt in $R[x]$ koeffizientenweise. Geben Sie an, wie die Multiplikation in $R[x]$ zu definieren ist, indem Sie angeben, wie für $p(x)$ wie oben und $q(x) = \sum_{j=0}^{m} s_j x^j$ die Koeffizienten t_k in $(p \cdot q)(x) = \sum_{k=0}^{n+m} t_k x^k$ aus den r_i und s_j ergeben. (Auf diese Weise wird $1 \in R$ auch zum Einselement in $R[x]$.)

   (b) Seien $R \leq S \in \mathcal{R}_1$, $a \in S$ und $\varphi_a : R[x] \to S$ der von a induzierte Einsetzungshomomorphismus. Beschreiben Sie das Bild $\varphi_a(p)$ eines Polynoms $p \in R[x]$ unter φ_a. Verwenden Sie dafür die Darstellung von p aus (a).

   (c) Geben Sie ein $p \in R[x]$ an, so dass für den Einsetzungshomomorphismus φ_a aus (b) gilt: Für jeden Homomorphismus $\varphi : R[x] \to S$, der $\varphi(r) = \varphi_a(r)$ für alle $r \in R$ und $\varphi(p) = \varphi_a(p)$ erfüllt, gilt $\varphi = \varphi_a$.

   (d) Was versteht man generell unter einer über der Menge X freien Algebra (F, ι) in einer Varietät $\mathcal{V}$? Hier ist die definierende Eigenschaft anzugeben.

   (e) Beschreiben Sie einen in $\mathcal{R}$ über der leeren Menge freien Ring (F_0, ι_0). Hier ist sowohl der Ring F_0 als auch die Abbildung ι_0 möglichst konkret anzugeben.

   (f) Beschreiben Sie analog zu (e) einen in $\mathcal{R}_1$ über der leeren Menge freien kommutativen Ring mit Einselement (F_1, ι_1).

   (g) Beschreiben Sie analog zu (e) und (f) einen in $\mathcal{R}_1$ über der einelementigen Menge $X = \{x\}$ freien kommutativen Ring mit Einselement (F_x, ι_x).

   (h) Der Begriff des Polynomrings wird in der universellen Algebra viel allgemeiner definiert als in der Theorie der kommutativen Ringe mit Einselement. Diese allgemeinere Definition hat zur Folge, dass es zu jeder Varietät $\mathcal{V}$, jeder Algebra $A \in \mathcal{V}$ und jeder Variablenmenge X eine Polynomalgebra (in diesem allgemeineren Sinn) $A[X]$ über A in der Variablenmenge X gibt. Wie lautet diese Definition? (Sie dürfen den Begriff des Koproduktes verwenden oder alternativ eine geeignete universelle Eigenschaft explizit formulieren.)