Algebra, Prüfung am 23.6.2015, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Mündliche Prüfung: Die Termineinteilung für die mündliche Prüfung wird spätestens unmittelbar nach der schriftlichen Prüfung fixiert. Bereits vor der Prüfung angegebene Wünsche werden mit höherer Priorität berücksichtigt.

Vereinbarter Termin (nach der schriftlichen Prüfung auszufüllen):

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. In der folgenden Aufgabe sind alle Ringe als Ringe mit 1 zu verstehen, d.h. insbesondere dass Homomorphismen das Einselement stets auf das Einselement abbilden. $P \cong \mathbb{Z}_7$ bezeichne einen Körper mit 7 Elementen. Gegeben seien die Polynome $f(x) := x^3+2$ und $g(x) := x^3+6$ aus $P[x]$. Mit I_f sei das von f erzeugte Ideal in $P[x]$ bezeichnet, mit I_g das von g erzeugte.

   (a) Untersuchen Sie f und g auf Irreduzibilität und zerlegen Sie im reduziblen Fall in irreduzible Faktoren.

   (b) Wieviele konstante Polynome und wieviele Polynome vom Grad 3 sind in I_f enthalten?

   (c) Seien $\varphi_f : P[x] \to R_f$ und $\varphi_g : P[x] \to R_g$ surjektive Homomorphismen mit $\mathrm{kern}(\varphi_f) = I_f$ und $\mathrm{kern}(\varphi_g) = I_g$. Bestimmen Sie die Anzahlen $|R_f|$ und $|R_g|$.

   (d) Zwischen folgenden sechs Klassen $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, von Ringen gilt eine Inklusionskette $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_3 \subseteq \mathcal{K}_4 \subseteq \mathcal{K}_5 \subseteq \mathcal{K}_6$: Körper, faktorielle Ringe, kommutative Ringe mit 1, Integritätsbereiche, Hauptidealringe, euklidische Ringe. Geben Sie die korrekte Zuordnung an.

   (e) Geben Sie für jeden der Ringe P, $P[x]$, $P[x, y]$, R_f und R_g (die letzten beiden aus Teilaufgabe (c)) die kleinste der Klassen $\mathcal{K}_i$ aus Teilaufgabe (d) an, der er angehört.

   (f) Geben Sie für jene Ringe aus Teilaufgabe (e), die kein Integritätsbereich sind (soferne es solche gibt), ein Paar von Nullteilern a und b mit $ab = 0$ an.

   (g) Geben Sie für jene Ringe aus Teilaufgabe (e), die faktoriell aber kein Körper sind (soferne es solche gibt), ein irreduzibles Element an.

   (h) Geben Sie für jene Ringe aus Teilaufgabe (e), die euklidisch sind (soferne es solche gibt), eine euklidische Bewertungsfunktion an.

   (i) Gibt es einen Homomorphismus $\varphi : P[x] \to P$, der nicht konstant ist? Wenn ja, geben Sie einen solchen an; wenn nein, begründen Sie dies.

   (j) Gibt es einen Homomorphismus $\psi : R_f \to P[x]$, der nicht konstant ist? Wenn ja, geben Sie einen solchen an; wenn nein, begründen Sie dies.

2. Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Algebren $(A, +_A, 0_A, a_A, b_A)$ vom Typ $(2, 0, 0, 0)$, für die $(A, +_A, 0_A)$ ein abelsches Monoid ist und wo das Gesetz $a_A + b_A = 0_A$ gilt. Wir fassen die Elemente von $\mathcal{K}$ in gewohnter Weise auch als Objekte einer Kategorie auf, deren Morphismen die Homomorphismen sind und deren Komposition ebenfalls die übliche Abbildungskomposition ist.

   (a) Ist $\mathcal{K}$ eine Varietät? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Definition des Begriffs der *Varietät*.

   (b) $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist ein abelsches Monoid. Welche Möglichkeiten bestehen, $a_{\mathbb{N}}$ und $b_{\mathbb{N}}$ so zu definieren, dass $(\mathbb{N}, +, 0, a_{\mathbb{N}}, b_{\mathbb{N}}) \in \mathcal{K}$?

   (c) Zu jeder ganzen Zahl k gibt es genau eine Möglichkeit, $b_{\mathbb{Z}}$ so zu wählen, dass $\mathbb{Z}(k) := (\mathbb{Z}, +, 0, k, b_{\mathbb{Z}}) \in \mathcal{K}$.

   Geben Sie die Trägermenge U_k der kleinsten Unteralgebra von $\mathbb{Z}(k)$ an. (U_k ist also definitionsgemäß der Durchschnitt aller Unteralgebren von $\mathbb{Z}(k)$.)

   (d) Sei X eine beliebige Menge mit $0 \notin X$ und $X^* := X \cup \{0\}$. F bezeichne die Menge aller Funktionen $f : X^* \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) \in \mathbb{N}$ für alle $x \in X$ und $f(x) \neq 0$ für höchtens endlich viele $x \in X$. Weiters sei $a_F \in F$ definiert durch $a_F(0) := 1$ und $a_F(x) := 0$ für alle $x \in X$. Die binäre Operation $+_F$ auf F sei punktweise definiert, ebenso das Nullelement $0_F \in F$.

   Wie muss man $b_F \in F$ definieren, damit $\mathfrak{F} := (F, +_F, 0_F, a_F, b_F) \in \mathcal{K}$?

   (e) Definieren Sie eine Abbildung $\iota : X \to F$ so, dass $\mathfrak{F}$ aus Teilaufgabe (d) frei über (X, ι) ist. Es genügt, wenn Sie für alle $x \in X$ das Bild $f_x := \iota(x)$ durch Angabe des Wertes $f_x(x')$ für beliebiges $x' \in X^*$ definieren.

   (f) Begründen Sie, warum die von Ihnen in (e) angegebene Abbildung ι tatsächlich die dort geforderte Eigenschaft hat. Dazu genügt es, wenn Sie zu einer beliebig vorgegebenen Abbildung $j : X \to A$ mit $\mathfrak{A} = (A, +_A, 0_A, a_A, b_A) \in \mathcal{K}$ einen Homomorphismus $\varphi : F \to A$ von $\mathfrak{F}$ nach $\mathfrak{A}$ definieren, der die geforderte Eigenschaft (welche ?) hat.

   (g) In $\mathcal{K}$ gibt es ein initiales Objekt. Geben Sie ein solches an.

   (h) In $\mathcal{K}$ gibt es ein terminales Objekt. Geben Sie ein solches an.

   (i) Sei $\mathfrak{A} = (A, +_A, 0_A)$ ein reguläres abelsches Monoid und $a_A \in A$. Dann gibt es ein $\mathfrak{B} = (B, +_B, 0_B, a_B, b_B) \in \mathcal{K}$ und eine isomorphe Einbettung $\iota : A \to B$ von $\mathfrak{A}$ ins abelsche Monoid $(B, +_B, 0_B)$ mit $\iota(a_A) = a_B$.

   Beschreiben Sie so ein $\mathfrak{B}$ samt ι. Aus der Vorlesung bekannte Strukturen dürfen dabei als bekannt vorausgesetzt und verwendet werden.

   (j) Sei $\mathfrak{A} = (A, +_A, 0_A)$ ein reguläres abelsches Monoid und $a_A \in A$. Die Kategorie $\mathcal{K}'(\mathfrak{A}) = \mathcal{K}'$ sei wie folgt definiert: Die Objekte von $\mathcal{K}'$ sind sämtliche Paare $(\mathfrak{B}, \varphi)$, für die $\mathfrak{B} = (B, +_B, 0_B, a_B, b_B) \in \mathcal{K}$ und $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus zwischen den Algebren $(A, +_A, 0_A, a_A)$ und $(B, +_B, 0_B, a_B)$ vom Typ $(2, 0, 0)$ ist. Sämtliche $\mathcal{K}'$-Morphismen von $(\mathfrak{B}_1, \varphi_1)$ nach $(\mathfrak{B}_2, \varphi_2)$ seien gegeben durch jene $\mathcal{K}$-Homomorphismen ψ von $\mathfrak{B}_1$ nach $\mathfrak{B}_2$, für die $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$ gilt. Die Komposition von Morphismen ist die von Abbildungen.

   Gibt es in der Kategorie $\mathcal{K}'$ jedenfalls (d.h. für alle $\mathfrak{A}$) initiale Objekte? Wenn ja, beschreiben Sie für beliebig vorgegebenes $\mathfrak{A}$ ein solches; wenn nein, geben Sie ein $\mathfrak{A}$ an, für welches es in $\mathcal{K}'$ kein initiales Objekt gibt.