Algebra, Prüfung am 25.1.2013, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Mündliche Prüfung: Gemäß individueller Vereinbarung unmittelbar nach der schriftlichen Prüfung

Hinweise bevor Sie beginnen:

1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. (a) Was versteht man unter dem Koprodukt zweier Algebren A, B gleichen Typs innerhalb einer Klasse $\mathcal{K}$, der A und B angehören.
   (b) Wie lässt sich ein Koprodukt V zweier Vektorräume V_1, V_2 innerhalb der Klasse aller Vektorräume über einem Körper K beschreiben?
   (c) Begründen Sie, warum die von Ihnen unter (b) beschriebenen Objekte tatsächlich die Definition eines Koproduktes aus (a) erfüllen.

2. Sei B eine Boolesche Algebra bezüglich der binären Operationen $\cup$ und $\cap$, der Komplementbildung $'$, mit Nullelement 0 und mit Einselement 1. Zur Erinnerung: Ein Element $a \in B$ heißt Atom, wenn $0 < a$, es aber kein $b \in B$ gibt mit $0 < b < a$. $A(B)$ bezeichne die Menge der Atome in B. Eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq B$ heißt Ideal von B, wenn aus $a < b$ und $b \in I$ stets $a \in I$ und aus $a, b \in I$ stets $a \cup b \in I$ folgt. Bezeichne schließlich $P(\mathbb{N})$ die Potenzmengenalgebra von $\mathbb{N}$.
   (a) Sei I ein Ideal von B. Wir definieren die Relation $\sim_I$, indem wir fordern: $a \sim_I b$ genau dann, wenn $(a \cap b') \cup (a' \cap b) \in I$. Das so definierte $\sim_I$ erweist sich als Kongruenzrelation. Zeigen Sie die Verträglichkeit mit der Komplementbildung.
   (b) Der Durchschnitt I einer Familie I_j, $j \in J$, von Idealen in B ist wieder ein Ideal. Zeigen Sie, dass insbesondere I wieder nichtleer ist.
   (c) Folgern Sie aus (b): Zu jeder Teilmenge $X \subseteq B$ gibt es ein kleinstes Ideal $I = I(X)$ mit $X \subseteq I$ (das von X erzeugte).
   (d) Beschreiben Sie die von der Menge $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ aller geraden Zahlen und allen Singletons $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$, erzeugte Unteralgebra U von $P(\mathbb{N})$.
   (e) Sei $I_0(U) := I(A(U))$ (Notation aus (c)) das von den Atomen innerhalb von U (siehe (d)) erzeugte Ideal. Aus (a) und dem Homomorphiesatz folgt, dass es eine Boolesche Algebra B_1 und einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : U \to B_1$ derart gibt, dass die Kongruenzklasse $[0]_{\sim_{I_0(U)}}$ das Urbild des Nullelements in B_1 unter φ ist. Beschreiben Sie B_1 und φ.

3. Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ über $\mathbb{Q}$ und den Körper $K = \mathbb{Q}(x)$ der gebrochen rationalen Funktionen über $\mathbb{Q}$.
   (a) Was versteht man generell unter dem Quotientenkörper eines Integritätsbereiches I? (Definition, nicht Konstruktion)
   (b) Begründen Sie anhand Ihrer Definition aus (a), warum $\mathbb{Q}(x)$ als Quotientenkörper von $\mathbb{Q}[x]$ aufgefasst werden kann.
   (c) Wir betrachten den Polynomring $K[y]$ über $K = \mathbb{Q}(x)$. Ist das Polynom $f(y) = y^2 - x$ in $K[y]$ reduzibel oder irreduzibel? (Begründung)
   (d) Je nach Ihrer Antwort in (c) ist im reduziblen Fall eine Faktorisierung von f anzugeben, im irreduziblen Fall der Zerfällungskörper Z von f über K zu beschreiben.
   (e) Welchen Grad hat die Körpererweiterung von Z aus (d) über $\mathbb{Q}$?