

Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 3.6.2020
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die Vereinbarung der mündlichen Prüfungen erfolgt persönlich in unmittelbarem Anschluss an die schriftliche Prüfung.

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis o, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die gesamte Lösung der Aufgabe inklusive Nebenrechnungen ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.

- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: Wir betrachten zwei Unterräume U und V des \mathbb{R}^3 , die durch Basen $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ für U und $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ für V gegeben sind. U und V sind auf verschiedene Weise darzustellen und außerdem zu einem Unterraum W zu schneiden. Die Koordinaten der Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe A: Schreiben Sie U als Menge aller Linearkombinationen von \mathbf{a} und \mathbf{b} an,

$$U = \dots \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ s+3t \\ 3s+5t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Teilaufgabe B: Der Unterraum V hat eine Darstellung der Gestalt $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$, wobei der Vektor $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal steht sowohl auf \mathbf{c} als auch auf \mathbf{d} . Finden Sie einen solchen Vektor.

Mit Hilfe der Rechnung ... $\overline{c \times d} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -8 & 3 \\ -1 & -8 & 3 \\ 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

findet man zum Beispiel den Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe C: Sei $W := U \cap V$ der Schnitt der beiden Unterräume U und V . Geometrisch ist W die Schnittgerade der beiden Ebenen U und V . Um einen Basisvektor für W zu erhalten, kann man zunächst die Parameterdarstellung von U aus Teilaufgabe A in die Darstellung von V aus Teilaufgabe B einsetzen. Dabei erhält man eine lineare Gleichung in zwei Variablen (den Parametern aus A). Welche?

$$0 = ax + by + cz = 3(s+t) + 4(s+3t) + (3s+5t) = 10s + 20t$$

bzw. $s + 2t = 0$

Teilaufgabe D: Finden Sie eine Lösung der Gleichung aus Teilaufgabe C (kann man eine beliebige Lösung nehmen?) und bestimmen Sie daraus einen Vektor \mathbf{w} , der für sich eine Basis $\{\mathbf{w}\}$ von W bildet.

z.B. $s = 2, t = -1 \Rightarrow \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Wir wollen die Flugbahn eines Geschosses im Schwerfeld der Erde modellieren, wobei wir den Luftwiderstand vernachlässigen. In den Teilaufgaben A bis C machen wir noch eine zusätzliche stark vereinfachende Modellannahmen, die im Fall geringer Abschussgeschwindigkeit jedoch nicht schwerwiegend ist.

Teilaufgabe A: Einfaches Modell: Wir wählen ein kartesisches (= rechtwinkeliges) Koordinatensystem mit waagrechter x - und y -Achse, senkrechter z -Achse und Koordinatenursprung auf Meeresebene. Der Abschuss erfolge zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Punkt $(0, 0, h)$ (also auf Höhe $h > 0$) mit einem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_0 = (a, b, c)$, was bedeutet: Würde sich das Geschoss gleichmäßig und geradlinig weiterbewegen, befände es sich nach t Zeiteinheiten im Punkt $(0, 0, h) + t\mathbf{v}_0$. Das Gravitationsfeld der Erde übt eine Kraft aus, die zusätzlich eine Beschleunigung vom Betrag g (knapp 10 m/s^2), d.h. mit (zunächst konstantem) Beschleunigungsvektor $\mathbf{a} = (0, 0, -g)$ bewirkt. Bezeichne nun $\mathbf{x}(t)$ den Ort, an dem sich das Geschoss zum Zeitpunkt $t \geq 0$ befindet, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$ den Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t , der selbst also die konstante Ableitung $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$ hat. Dadurch ist die Funktion $\mathbf{v}(t)$ eindeutig festgelegt. Geben Sie $\mathbf{v}(t)$ als Spaltenvektor mit Komponentenfunktionen $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ an.

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} a \\ b \\ c - tg \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe B: Ermitteln Sie daraus $\mathbf{x}(t)$ als Spaltenvektor mit Komponentenfunktionen $x(t), y(t), z(t)$.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} at \\ bt \\ h + ct - \frac{t^2}{2}g \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe C: Berechnen Sie aus Ihrer Lösung von Teilaufgabe B den Zeitpunkt t_0 (der von a, b, c und h abhängen darf), zu dem das Geschoss den Boden erreicht, zu dem also $z(t_0) = 0$ gilt.

Die Rechnung ... $0 = z(t) = h + ct - \frac{t^2}{2}g \Leftrightarrow t^2 - \frac{2c}{g}t - \frac{2}{g}h = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{c}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{g}\right)^2 + \frac{2}{g}h}$$

zeigt $t_0 = \dots \frac{c}{g} + \sqrt{\left(\frac{c}{g}\right)^2 + \frac{2}{g}h} \geq \frac{c}{g} > 0$

Teilaufgabe D: Laut dem bisher betrachteten vereinfachten Modell gibt es nach Teilaufgabe C für alle $\mathbf{v}_0 = (a, b, c)$ und $h > 0$ einen Zeitpunkt t_0 , zu dem das Geschoss zu Boden fällt. In Wirklichkeit ist das bei hinreichend großer Abschussgeschwindigkeit in senkrechte Richtung aber nicht so. Dem wollen wir nun durch entsprechende Modellierung gerecht werden (weiterhin jedoch unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes). Dazu legen wir den Ursprung eines neuen Koordinatensystems in den Mittelpunkt der Erde und schießen das Geschoss senkrecht ab. Diesmal bezeichnen wir mit $y(t)$ den Abstand des Geschosses vom Erdmittelpunkt zum Zeitpunkt t . Abschussgeschwindigkeit sei wieder $v_0 = v(0)$ (jetzt allerdings als Zahl, nicht als Vektor) mit $v(t) = y'(t)$. Der Abschusspunkt sei auf der Erdoberfläche, also $y_0 = y(0) = r$ (= Erdradius). Nach dem Gravitationsgesetz ist die Erdbeschleunigung $a(y)$ an einem Punkt $y \geq r$ gegeben durch $a(y) = \frac{r^2}{y^2}g$. Die gesuchte Funktion $y(t), t \geq 0$, erfüllt daher eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den Anfangsbedingungen $y(0) = y_0 = r$ und $y'(0) = v(0) = v_0$. (Sie hat sogar eine eindeutige Lösung, die hier allerdings nicht gefragt ist.) Wie lautet diese Differentialgleichung?

Die gesuchte Differentialgleichung lautet ... $y'' = -a(y) = -\frac{r^2}{y^2}g$

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um die Berechnung von Bereichsintegralen mit Hilfe des Satzes von Fubini. Gegeben sei dazu eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$, und ein achsenparalleler, rechteckiger Integrationsbereich $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2, a \leq b, c \leq d$ in der Grundebene (x - y -Ebene). Für $f \geq 0$ lässt sich das zweidimensionale Integral $I := \int_R f d\lambda_2$ deuten als das Volumen oberhalb R zwischen der Grundebene und dem durch f definierten Funktionsgebirge.

Teilaufgabe A: Aus dem Satz von Fubini folgt, dass sich das Bereichsintegral I in den beiden Variablen x und y auf zwei verschiedene Arten berechnen lässt. Wie lautet die Formel, die dies zum Ausdruck bringt?

$$I = \dots \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Teilaufgabe B: Sei nun speziell $f(x, y) := xe^{x+y}$ und $R = [0, 2] \times [0, 1]$. Berechnen Sie I auf eine der beiden Arten aus Teil A.

$$I = \dots \int_0^2 \int_0^1 x e^{x+y} dy dx = \int_0^2 x e^x \int_0^1 e^y dy dx = \int_0^2 x e^x (e^y \Big|_{y=0}^1) dx = \int_0^2 x e^x (e-1) dx = (e-1) \int_0^2 x e^x dx$$

$$\int_0^2 x e^x dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} x e^x \Big|_{x=0}^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - (e^x \Big|_{x=0}^2) = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1 \Rightarrow I = (e-1)(e^2+1) = e^3 - e^2 + e - 1.$$

Teilaufgabe C: Wie Teilaufgabe B, nur auf die andere Art aus Teil A. (Hinweis: Die Rechnung ist sehr ähnlich wie in B. Sie können also eventuell Zwischenergebnisse aus Teilaufgabe B nochmals verwenden. Damit die doppelte Berechnung als Kontrolle des Endergebnisses möglichst wirksam bleibt, empfiehlt es sich jedoch, dabei penibel darauf zu achten, dass Sie aus B keine Rechenfehler zu übernehmen.)

$$I = \dots \int_0^1 \int_0^2 x e^{x+y} dx dy = \int_0^1 e^y \underbrace{\int_0^2 x e^x dx}_{= e^2 + 1 \text{ lt. B}} dy = (e^2+1) (e^y \Big|_{y=0}^1) = (e^2+1)(e-1) = e^3 - e^2 + e - 1.$$

Teilaufgabe D: Ist der Integrationsbereich kein achsenparalleles Rechteck R , sondern beispielsweise eine Kreisscheibe K mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius r_0 , so ist die oben verwendete Methode zu modifizieren bzw. zu ergänzen. Beschreiben Sie eine Möglichkeit (es gibt mehrere) zur Berechnung eines solchen Integrals, d.h. eines Integrals der Gestalt $J := \int_K f d\lambda_2$. (Sie müssen die Rechnung natürlich nicht ausführen, da f allgemein aufzufassen ist und nicht als die spezielle Funktion aus den Teilaufgaben B und C.)

(i) Substitution: $x = r \cos \varphi, 0 \leq r \leq r_0$
 $y = r \sin \varphi, 0 \leq \varphi < 2\pi$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

$$\Rightarrow \int_K f d\lambda_2 = \int_K f(x, y) dx dy = \int_{R=[0, r_0] \times [0, 2\pi]} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\varphi dr = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi dr$$

(ii)
$$\int_K f d\lambda_2 = \int_{-r_0}^{r_0} \int_{-\sqrt{r_0^2-x^2}}^{\sqrt{r_0^2-x^2}} f(x, y) dy dx$$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe geht es um die (absolute oder bedingte) Wahrscheinlichkeit W sowie um die Unabhängigkeit von Ereignissen A, B, C, \dots . Ab Teilaufgabe B werden diese Begriffe auf einen medizinischen Test mit gewissen Fehleranfälligkeiten angewandt. Geben Sie Ihre Antworten als Formeln bzw. Rechnung an, verbale Erläuterungen sind nicht erforderlich.

Teilaufgabe A: Wann heißen zwei Ereignisse A und B unabhängig, wann eine Familie von drei Ereignissen A, B und C , und was ist bedingte Wahrscheinlichkeit?

A und B heißen unabhängig, wenn ... $W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B)$

Die Familie von Ereignissen A, B und C heißt unabhängig, wenn ... $W(A \cap B \cap C) = W(A) \cdot W(B) \cdot W(C)$
und A, B sowie A, C und B, C unabhängig sind, explizit:

$$W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B), \quad W(A \cap C) = W(A) \cdot W(C), \quad W(B \cap C) = W(B) \cdot W(C)$$

Für $W(B) > 0$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A|B)$ von A unter der Bedingung B definiert durch

$$W(A|B) := \dots \frac{W(A \cap B)}{W(B)}$$

Teilaufgabe B: Wir betrachten nun einen medizinischen Test auf eine bestimmte Krankheit. Für eine zufällig ausgewählte Testperson interessieren wir uns für die Ereignisse G (gesund = nicht infiziert), K (krank = infiziert), N (Test negativ) und P (Test positiv). Es sei bekannt, dass der Test bei Infizierten mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{100}$ fälschlicherweise ein negatives Ergebnis liefert (sonst mit entsprechender Wahrscheinlichkeit $\frac{99}{100}$ ein korrekt positives). Umgekehrt ergebe er bei nicht Infizierten mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{10}$ ein falsches positives Ergebnis (sonst mit entsprechender Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ ein korrekt negatives). Der Anteil der Infizierten an der Gesamtbevölkerung sei $\frac{1}{1000}$ (also $W(K) = \frac{1}{1000}$). Wie groß ist für eine zufällig ausgewählte Testperson die Wahrscheinlichkeit, gesund zu sein und trotzdem positiv getestet zu werden? Geben Sie Ihr Ergebnis exakt in Dezimaldarstellung an.

$$W(G \cap P) = \dots W(G) \cdot W(P|G) = \frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{10} = 0,0999$$

Teilaufgabe C: Verwenden Sie Teilaufgabe B, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine beliebige zufällig ausgewählte Person positiv getestet wird. Geben Sie Ihr Ergebnis wieder exakt in Dezimaldarstellung an.

$$\begin{aligned} W(P) &= \dots W(G \cap P) + W(K \cap P) = \frac{999}{10000} + \underbrace{W(K)}_{\frac{1}{1000}} \cdot \underbrace{W(P|K)}_{\frac{99}{100}} = \\ &= 10^{-5} \cdot (9990 + 99) = \frac{10089}{100000} = 0,10089 \end{aligned}$$

Teilaufgabe D: Verwenden Sie Ihre bisherigen Ergebnisse, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass eine positiv getestete Person gesund ist. Geben Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

$$W(G|P) = \dots \frac{W(G \cap P)}{W(P)} = \frac{999}{10000} \cdot \frac{100000}{10089} = \frac{9990}{10089} = \frac{1110}{1121} = 1 - \frac{11}{1121} \approx 0,99$$