# Mathematik 2 für Bauingenieure

**Prüfung am 2.3.2018**
**Reinhard Winkler**

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündliche Prüfung wird für die meisten in der Woche von 12. bis 16.3. stattfinden, einige Prüfungen sind schon am Di, 6.3., vormittags möglich. Bitte kreuzen Sie entsprechend an bzw. füllen Sie aus. Eine Prüfungseinteilung, die Ihre Wünsche möglichst berücksichtigt, wird Ihnen rechtzeitig per TISS bekannt gegeben werden.

Di, 6.3., zwischen 9 und 12 Uhr wäre für mich MÖGLICH: ∘ Ja ∘ Nein

In der Woche von 12.3. bis 16.3. sind folgende Tage/Uhrzeiten für mich UNGÜNSTIG:

---

**Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:**

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis ∘, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

---

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

**Aufgabe 1:** Diese Aufgabe ist der Linearen Algebra zuzuordnen und beschäftigt sich mit Linearformen und Skalarprodukten (symmetrische, positiv definite Bilinearformen). Hinweis: Spätere Teilaufgaben können als Hilfe oder Kontrolle für frühere hilfreich sein.

---

**Teilaufgabe A:** Eine $n$-stellige Multilinearform $m$ auf einem Vektorraum $V$ ist eine Abbildung $m : V^n \to \mathbb{R}$, die in jeder der $n$ Komponenten linear ist. Im Fall $n = 2$ spricht man von einer Bilinearform. Explizit lautet dann eine der Multilinearitätsbedingungen: $m(\mathbf{x}, r\,\mathbf{y}) = r\,m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ und alle $r \in \mathbb{R}$. Geben Sie analog die anderen Multilinearitätsbedingungen an $m$ an:

---

**Teilaufgabe B:** Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ der zweidimensionale Standardvektorraum mit den kanonischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Gibt es eine Bilinearform $m$ auf $\mathbb{R}^2$ wie in Teilaufgabe A, für die $m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = m(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$ und $m(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -1$ gilt? Wenn ja, geben Sie so ein $m$ explizit an, indem Sie einen Formelausdruck für $m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und allgemeine Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ explizit anschreiben; gibt es kein solches $m$, begründen Sie dies.

○ Ja, zum Beispiel $m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = m\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := \ldots$

○ Nein, denn …

---

**Teilaufgabe C:** Ähnlich wie in Teilaufgabe B, jedoch für „Skalarprodukt“ statt Bilinearform: Gibt es ein Skalarprodukt $p$ auf $\mathbb{R}^2$ mit $p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = p(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$ und $p(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -1$? Wenn ja, geben Sie so ein $p$ explizit an, indem Sie einen Formelausdruck für $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und allgemeine Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ explizit anschreiben; gibt es kein solches $p$, begründen Sie dies. Hinweis: Überlegen Sie zunächst, welchen Wert $p(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ für eine beliebiges $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ aus Linearitätsgründen haben müsste.

Multilinearität liefert $p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = p\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \ldots$

Daraus ersieht man:

○ Ja, zum Beispiel $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := \ldots$

○ Nein, denn …

---

**Teilaufgabe D:** Sei $p$ eine Bilinearform $p$ auf $\mathbb{R}^2$ (nicht notwendig ein Skalarprodukt) mit den Eigenschaften aus Teilaufgabe C. Beschreiben Sie die Menge $M$ aller Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $p(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$.

Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ liegt genau dann in $M$, wenn …

**Aufgabe 2:** Wir suchen nach einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit bestimmten Eigenschaften und verwenden die Schreibweise

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\alpha, \beta) \mapsto f(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} x(\alpha, \beta) \\ y(\alpha, \beta) \\ z(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$$

mit Komponentenfunktionen $x, y, z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

---

**Teilaufgabe A:** Geben Sie geeignete Komponentenfunktionen $x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta)$ und $z(\alpha, \beta)$ an derart, dass $f$ stetig differenzierbar ist und das Bild $f(\mathbb{R}^2) = \{f(\alpha, \beta) : \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ von $f$ genau mit der sogenannten zweidimensionalen Einheitssphäre (Oberfläche der Einheitskugel) $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ übereinstimmt. Hier genügt die Angabe eines korrekten $f$. Die Begründung, warum $f$ tatsächlich die geforderte Eigenschaft hat, wird erst in den Teilaufgaben B und C gefragt sein. Hinweis: Es kann Zeit sparen, wenn Sie $f$ gleich auch in Hinblick auf diese weiteren Teilaufgaben wählen.

$x(\alpha, \beta) := \ldots$

$y(\alpha, \beta) := \ldots$

$z(\alpha, \beta) := \ldots$

---

**Teilaufgabe B:** Begründen Sie, warum die Funktion $f$, die Sie in Teilaufgabe A angegeben haben, tatsächlich $f(\mathbb{R}^2) \subseteq S^2$ erfüllt. Hinweis: Hier ist eigentlich nur nachzurechnen, dass eine gewisse Quadratsumme für alle Werte von $\alpha$ und $\beta$ einen bestimmten Wert annimmt. (Welchen?)

---

**Teilaufgabe C:** Begründen Sie, warum die Funktion $f$, die Sie in Teilaufgabe A angegeben haben, tatsächlich $S^2 \subseteq f(\mathbb{R}^2)$ erfüllt. Hier ist, in Umkehrung zu Teilaufgabe B, davon auszugehen, dass ein gegebenes reelles Zahlentripel $(x, y, z)$ die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erfüllt, und sodann ein Paar $(\alpha, \beta)$ mit $f(\alpha, \beta) = (x, y, z)$ zu konstruieren. Wenn es Ihnen sympathisch ist, dürfen Sie auch anhand einer Skizze argumentieren.

Für gegebenes $(x, y, z) \in S^2$ (also $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) wählen wir zunächst ...

---

**Teilaufgabe D:** Bestimmen Sie für ein $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ Ihrer Wahl die Menge $f^{(-1)}(\mathbf{x}_0)$, also die Menge aller $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(\alpha, \beta) = \mathbf{x}_0$.

Für $\mathbf{x}_0 := \ldots$

ist $f^{(-1)}(\mathbf{x}_0) = \ldots$

**Aufgabe 3:** In dieser Aufgabe geht es um iterierte Integrale und die Möglichkeit, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Dazu sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := xy^2$. Als Integrationsbereiche werden das Einheitsquadrat $Q$ und das Dreieck $\Delta$ mit

$$Q := [0,1] \times [0,1] \quad \text{und} \quad \Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x,y \geq 0, \; x+y \leq 1\}$$

auftreten. Außerdem schreiben wir abkürzend $I(x) := \int_0^1 f(x,y)\,dy$ und $J(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx$.

---

**Teilaufgabe A:** Berechnen Sie $I(x)$ für $0 \leq x \leq 1$, sowie $\int_0^1 I(x)\,dx$.

$I(x) = \ldots$

$\int_0^1 I(x)\,dx = \ldots$

---

**Teilaufgabe B:** Berechnen Sie $J(y)$ für $0 \leq y \leq 1$, sowie $\int_0^1 J(y)\,dy$.

$J(y) = \ldots$

$\int_0^1 J(y)\,dy = \ldots$

---

**Teilaufgabe C:** Wie lässt sich das zweidimensionale Lebesgueintegral $\int_Q f(x,y)\,d\lambda_2$ ermitteln? Formulieren Sie einen allgemeinen Satz, auf dem die von Ihnen beschriebene Methode beruht, und wenden Sie diese Methode auf das konkrete Beispiel dieser Aufgabe an.

Der Satz von ......... lautet:

Für die Funktion $f$ von Aufgabe 3 und den Integrationsbereich $Q$ bedeutet das:

$\int_Q f(x,y)\,d\lambda_2 = \ldots$

---

**Teilaufgabe D:** Welche Modifikationen sind vorzunehmen, wenn der Integrationsbereich $Q$ aus Teilaufgabe C durch den dreieckigen Integrationsbereich $D$ ersetzt wird? Es genügt, wenn Sie die Rechnung durchführen:

$\int_\Delta f(x,y)\,d\lambda_2 = \ldots$

**Aufgabe 4:** In dieser Aufgabe geht es um wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellungen, vor allem die Exponentialverteilung $\mathbb{P}_\lambda$ zum Parameter $\lambda > 0$ betreffend. $X$ bezeichne eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbb{P}_\lambda$.

---

**Teilaufgabe A:** Ist $\lambda > 0$, so gibt es eine von $\lambda$ abhängige Konstante $c = c(\lambda)$, so dass die Funktion $\rho_\lambda$, definiert durch $\rho_\lambda(x) = ce^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und $\rho_\lambda(x) = 0$ für $x < 0$ die Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}_\lambda$ ist. Welche Gleichung muss dafür gelten?

---

**Teilaufgabe B:** Bestimmen Sie $c(\lambda)$ aus Teilaufgabe A.

---

**Teilaufgabe C:** Berechnen Sie $\mathbb{P}_\lambda(X \leq t)$ für $t \geq 0$.

---

**Teilaufgabe D:** Definieren Sie, was man allgemein unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A|B)$ eines Ereignisses $A$ unter einer Bedingung $B$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ versteht. Damit lässt sich die sogenannte Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung $\mathbb{P}_\lambda$ nachrechnen. Diese Eigenschaft lässt sich verbal folgendermaßen beschreiben:

Sei $X$ eine nach $\mathbb{P}_\lambda$ verteilte Zufallsgröße, die angibt, wann ein bestimmtes „seltenes" Ereignis eintritt, z.B. der Zerfall eines radioaktiven Teilchens. Angenommen, die Zeitmessung hat vor $t$ Zeiteinheiten begonnen, und das Teilchen ist bisher noch nicht zerfallen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Teilchen nach $s$ weiteren Zeiteinheiten von jetzt an zerfällt, ist bei einer gedächtnislosen Verteilung unabhängig von $t$.

Formulieren Sie diese Eigenschaft als Gleichung, in der $X$ in einer bedingten Wahrscheinlichkeit auftritt.

Die allgemeine Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit lautet $\mathbb{P}(A|B) = \ldots$

Die Gedächtnislosigkeit der Verteilung $\mathbb{P}_\lambda$ von $X$ lässt sich wie folgt als Formel schreiben:

$\ldots$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.