Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 13.10.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündliche Prüfung findet im Oktober statt, und zwar stehen Zeitfenster am Do (19.), Mo (23.), Di (24.) und Mi (25.) zur Verfügung. Ort der Prüfung ist der Besprechungsraum im Freihaus, grüner Bereich, im 7.Stock. Wenn gewisse Termine für Sie ungünstig sind, können Sie dies hier angeben. Nach Möglichkeit (keine Garantie) werden Ihre Wünsche berücksichtigt.

Ungünstige Tage/Zeiten: ...

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4 untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis $\circ$, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Grundbegriffe der Linearen Algebra. Gegeben sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie üblich bezeichnen

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

die kanonischen Basisvektoren.

Teilaufgabe A: Es gibt Zahlen a_i, b_i, c_i mit $\mathbf{e}_i = a_i\mathbf{a} + b_i\mathbf{b} + c_i\mathbf{c}$ für $i = 1, 2, 3$. Geben Sie solche Zahlen an.

Nebenrechnungen:

$a_1 = \ldots,\ b_1 = \ldots,\ c_1 = \ldots, \quad a_2 = \ldots,\ b_2 = \ldots,\ c_2 = \ldots, \quad a_3 = \ldots,\ b_3 = \ldots,\ c_3 = \ldots$

Teilaufgabe B: Begründen Sie mit Hilfe der Angabe von Teilaufgabe A, warum es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f : \mathbf{a} \mapsto 2\mathbf{a}, \mathbf{b} \mapsto -\mathbf{b}, \mathbf{c} \mapsto \mathbf{c}$ gibt.

Teilaufgabe C: Bestimmen Sie die Determinante von f aus Teilaufgabe B allein mit Hilfe der Angabe in B ohne lange Rechnung.

Teilaufgabe D: Bestimmen Sie die Matrix M der Abbildung f aus Teilaufgabe B bezüglich der kanonischen Basis. Hinweis: Verwenden Sie A.

Nebenrechnung:

$M = \ldots$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe ist die Funktion

$$f(x,y) := \ln\bigl(3(x-1)^2 + y^2 + 1\bigr)$$

auf dem maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zu untersuchen.

Teilaufgabe A: Geben Sie D an und begründen Sie, warum f keine negativen Werte annimmt.

$D = \ldots$

$f(x,y) \geq 0$, denn: …

Teilaufgabe B: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ldots$$

Teilaufgabe C: Weil die partiellen Ableitungen aus Teilaufgabe B auf dem gesamten Definitionsbereich von f stetig sind, ist f dort auch differenzierbar. Folglich gibt es auch in jedem Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$ und in jede Richtung in der Grundebene einen Tangentialvektor an den Graphen (an das Funktionsgebirge) von f. Denkt man sich die Richtung durch den Winkel φ, den sie mit der x-Achse einschließt, gegeben, so ist $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ jener Einheitsvektor, der in diese Richtung zeigt. Der zugehörige Tangentialvektor in diese Richtung ist dann von der Form $(\cos\varphi, \sin\varphi, t_{\mathbf{x}_0}(\varphi))$. Seine dritte Komponente $t_{\mathbf{x}_0}(\varphi)$ gibt die Steigung von f in diese Richtung an.

Geben Sie die Formel an, mit der man diese Steigung aus den partiellen Ableitungen von f aus Teilaufgabe B und aus φ errechnen kann.

$t_{\mathbf{x}_0}(\varphi) = \ldots$

Teilaufgabe D: Geben Sie einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in D$ an, wo $t_{\mathbf{x}_0}(\varphi) = 0$ für alle φ gilt. (Hinweis: Diese Frage lässt sich mit einem einfachen Argument ohne Rechnung beantworten.)

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe spielt die aus der Vorlesung bekannte (partielle) Differentialgleichung

$$(*) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

der schwingenden Saite die Hauptrolle.

Teilaufgabe A: Verifizieren Sie durch Nachrechnen, dass die Funktion $f(x,t) := \sin(2x)\sin(2t)$ eine Lösung von $(*)$ ist.

Teilaufgabe B: Geben Sie eine Lösung $g(x,t)$ von $(*)$ an, die verschieden von jedem Vielfachen $cf(x,t)$, $c \in \mathbb{R}$, der Lösung f aus Teilaufgabe A ist.

$g(x,t) = \dots$

Teilaufgabe C: Die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen f in den beiden reellen Variablen x und t bildet in der üblichen Weise einen Vektorraum V. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : V \to V, \quad f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

linear. Begründen Sie dies, indem Sie eine andere, bekanntermaßen lineare Funktion $\Psi : V \to V$ mit $\Phi = \Psi \circ \Psi$ (Verkettung von Ψ mit sich selbst) angeben.

$$\Psi : f \mapsto \dots$$

Teilaufgabe D: Sei L die Menge aller Lösungen von $(*)$. Liegt für alle $f_1, f_2 \in L$ auch die Summe $f_1 + f_2$ in L? Begründung?

○ Ja, weil …

○ Nein, weil …

Aufgabe 4: Diese Aufgabe ist der Wahrscheinlichkeitstheorie zuzuordnen. Und zwar geht es um den Gewinn bei folgendem Glücksspiel mit einem fairen Würfel. In jeder Runde eines Spiels hat man einen Euro Einsatz zu zahlen, um würfeln zu dürfen. Würfelt man eine gerade Zahl, ist der Einsatz verloren; würfelt man eine Eins, erhält man den Einsatz zurück; würfelt man eine Drei, erhält man den Einsatz plus einen Euro; würfelt man eine Fünf, erhält man den Einsatz plus zwei Euro.

Als Modell für eine Runde dieses Glücksspiel bietet sich der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an. Dabei ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, die σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist die Menge aller Teilmengen von Ω, und $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{6}$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $2, 4, 6 \mapsto -1$, $1 \mapsto 0$, $3 \mapsto 1$ und $5 \mapsto 2$ beschreibt den Gewinn bei einer Runde.

Teilaufgabe A: Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ von X.

$\mathbb{E}(X) = \dots$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie die Varianz $\mathbb{V}(X)$ von X.

$\mathbb{V}(X) = \dots$

Teilaufgabe C: Angenommen, Sie besitzen einen Euro Startkapital und spielen mehrere Runden, so lange Sie den Einsatz zahlen können. Bezeichne p_n die Wahrscheinlichkeit, spätestens nach n Runden das gesamte Spielkapital verloren zu haben. Geben Sie p_2 an, also die Wahrscheinlichkeit, schon in der ersten oder zweiten Runde kein Kapital mehr zu haben. (Selbstverständlich sind dabei die beiden Würfe als unabhängig anzunehmen.)

$p_2 = \dots$

Teilaufgabe D: Die p_n aus Teilaufgabe C bilden eine reelle Zahlenfolge. Was können Sie über diese Folge aussagen? Kreuzen Sie zutreffende Aussagen an und füllen Sie gegebenenfalls Lücken aus:

○ Die p_n sind beschränkt.

○ Die p_n divergieren gegen ∞.

○ Die p_n haben mehrere Häufungspunkte, z.B. $a = \dots$ und $b = \dots$.

○ Die p_n konvergieren, und zwar gegen $\lim_{n\to\infty} p_n = \dots$.

○ Die p_n sind unbeschränkt.

○ Die p_n sind monoton wachsend.

○ Die p_n sind monoton fallend.

○ Die p_n sind nicht monoton.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.