

Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 8.5.2015
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündlichen Prüfungen finden an einem Nachmittag statt, und zwar am Mi 13.5., Mi 20.5. oder am Do 21.5. Wenn davon gewisse Zeiten für Sie ungünstig sind, können Sie dies hier angeben:

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3 und 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C und D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie dort notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.

- Wenn Sie sich noch vor der Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Gesamt:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen und Gesamtnote:

Aufgabe 1: Bei einer Verlosung gibt es 1000 Lose zu ziehen, die mit den Zahlen aus $A := \{1, 2, \dots, 1000\}$ nummeriert sind, wobei jede dieser Zahlen genau einmal als Losnummer vorkommt. Die Lose seien sonst gleichartig, also hat jedes Los dieselbe Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden. Für jedes $n = 1, 2, \dots$ betrachten wir die Menge A_n jener Zahlen $k \in A$, die sich als n -te Potenz $k = a^n$ einer natürlichen Zahl a darstellen lassen. So ist zum Beispiel $A_1 = A$, $A_2 = \{1, 4, 9, \dots, 31^2 = 961\}$ etc. Im Zusammenhang damit geht es in dieser Aufgabe um die Größe der Mengen A_n und daraus resultierende Wahrscheinlichkeiten.

Teilaufgabe A: Mit wachsendem n werden die Anzahlen $|A_n|$ immer kleiner. Berechnen sie diese Anzahlen für $n = 1, \dots, 10$. Hilfreich könnten dabei folgende Tatsachen sein: $6^4 = 36^2 > 1000 > 6^3$, $5^4 = 25^2 < 1000 < 5^5$, $4^5 = 2^{10} = 1024 > 1000$, $3^6 = 81 \cdot 9 < 1000 < 3^7$.

$$|A_1| = \dots \quad |A_2| = \dots \quad |A_3| = \dots \quad |A_4| = \dots \quad |A_5| = \dots$$

$$|A_6| = \dots \quad |A_7| = \dots \quad |A_8| = \dots \quad |A_9| = \dots \quad |A_{10}| = \dots$$

Teilaufgabe B: Wir verwenden das Symbol A_n nicht nur für die Menge A_n , sondern auch für das Ereignis, ein Los mit einer Zahl aus A_n zu ziehen. Damit gilt $\mathbb{P}(A_n) = \frac{|A_n|}{1000}$. Bestimmen Sie die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten. Hinweis: Ist eine Zahl k sowohl zweite als auch dritte Potenz, dann sogar sechste Potenz und umgekehrt. Aus ähnlichen Gründen ist jede vierte Potenz erst recht zweite Potenz.

$$\mathbb{P}(A_2|A_3) := \dots \quad \mathbb{P}(A_2|A_4) := \dots$$

$$\mathbb{P}(A_3|A_2) := \dots \quad \mathbb{P}(A_4|A_2) := \dots$$

Teilaufgabe C: Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Ziehungen von Losen *mit* Zurücklegen, die nötig sind, um erstmals eine Zahl aus A_2 zu ziehen. Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(X = n)$, $n = 1, 2, \dots$, an.

$$\mathbb{P}(X = n) = \dots$$

Teilaufgabe D: Die Zufallsgröße Y beschreibe die Anzahl der Ziehungen von Losen *ohne* Zurücklegen, die nötig sind, um erstmals eine Zahl aus A_2 zu ziehen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y = 4)$ als Bruch von Produkten ganzer Zahlen an.

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \dots$$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es vor allem um lineare Unabhängigkeit.

Teilaufgabe A: Definieren Sie sorgfältig, wann man die Vektoren v_1, \dots, v_n eines Vektorraumes V linear unabhängig nennt.

Teilaufgabe B: Überprüfen Sie die Vektoren $(1, 1)$ und $(2, 4)$ aus dem Vektorraum \mathbb{R}^2 direkt anhand der Definition aus Teilaufgabe A auf lineare Unabhängigkeit.

Teilaufgabe C: Überprüfen Sie die Vektoren $(1, 1, 1)$, $(2, 4, 8)$ und $(1, -1, -5)$ aus dem Vektorraum \mathbb{R}^3 auf lineare Unabhängigkeit. Sie dürfen dafür die Methode Ihrer Wahl verwenden.

Teilaufgabe D: Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus n Gleichungen $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$ in den Variablen x_i . Was lässt sich über die Lösungsmenge L dieses Systems sagen, wenn die Zeilenvektoren $(a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$, $i = 1, \dots, n$, linear unabhängig sind, was wenn sie linear abhängig sind?

Aufgabe 3: Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die die Ebene auf sich selbst abbildet. In dieser Aufgabe geht es um die Ableitung f' von f und geometrische Interpretationen.

Teilaufgabe A: Für eine zweite Funktion $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ setzen wir $r(x, y) := f(x, y) - l(x - x_0, y - y_0) - f(x_0, y_0)$, so dass sich f schreiben lässt als

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + l(x - x_0, y - y_0) + r(x, y).$$

Die Funktion f heißt differenzierbar im Punkt (x_0, y_0) , wenn es eine (dann eindeutige) lineare Funktion l gibt derart, dass die euklidische Norm $\|r(x, y)\|$ des Restes $r(x, y)$ besonders schnell klein wird, sofern (x, y) gegen (x_0, y_0) konvergiert. Wie genau lautet die entsprechende Grenzwertbedingung?

Teilaufgabe B: Sei nun speziell $f : (r, \varphi) \mapsto (x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ mit $x(r, \varphi) := r \cos \varphi$ und $y(r, \varphi) := r \sin \varphi$. In diesem Fall ist f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Also gibt es ein l wie in Teilaufgabe A. Geben Sie die Matrixdarstellung dieser linearen Funktion l an.

Teilaufgabe C: Sei $R = R(r, \varphi, a, b) := [r, r+a] \times [\varphi, \varphi+b] \subseteq \mathbb{R}^2$ das achsenparallele Rechteck mit linkem Eckpunkt (r, φ) und Länge a und Höhe b . Durch die Funktion f aus Teilaufgabe B wird R auf einen Bereich $f(R)$ in der Ebene abgebildet, der möglicherweise von krummen Linien begrenzt ist. Fertigen Sie eine Skizze von $f(R)$ für die Werte $r := 2$, $\varphi := \frac{\pi}{4}$, $a := \frac{1}{2}$ und $b := \frac{\pi}{4}$ an.

Teilaufgabe D: Die Fläche von R aus Teilaufgabe C ist offenbar $\lambda_2(R) = ab$ ($\lambda_2 =$ zweidimensionales Lebesguemaß). Durch die Anwendung von f wird diese Fläche um einen gewissen Faktor verzerrt. Genauer: In jedem Punkt (r, φ) existiert der Grenzwert

$$c(r, \varphi) := \lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{\lambda_2(f(R(r, \varphi, a, b)))}{ab} \quad (a, b \neq 0).$$

Klarerweise ist $c(r, \varphi)$ durch r und φ bestimmt. Wie genau?

$$c(r, \varphi) = \dots\dots\dots$$

Aufgabe 4: Sind die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben, so sei die Funktion $f = f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := ax + by$. Außerdem bezeichne $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe. In dieser Aufgabe untersuchen wir, wie die Extrema von f auf K von a und b abhängen. Für gegebenes $c \in \mathbb{R}$ spielt dabei auch die Menge $M_{a,b}(c) := \{(x, y) : f_{a,b}(x, y) = c\}$, wo $f_{a,b}$ den Wert c annimmt, eine Rolle.

Teilaufgabe A: Der Gradient einer auf \mathbb{R}^2 definierten reellwertigen und differenzierbaren Funktion ordnet jedem Vektor v aus \mathbb{R}^2 die Richtung des größten Anstiegs der Funktion an der Stelle v zu. Im Fall der Funktion f aus der Angabe erweist sich der Gradient als von v unabhängig. Geben Sie diesen Gradienten von f als Zeilenvektor an.

$$\text{grad}(f) = \dots\dots$$

Teilaufgabe B: Im Fall $a = b = 0$ ist $f_{a,b}$ die Nullfunktion und nicht sehr interessant. Nehmen wir deshalb $(a, b) \neq (0, 0)$ an. Mittels rein anschaulich-geometrischer Überlegungen lässt sich aus Teilaufgabe A ablesen, an welchem Punkt $P(a, b) = (x_0(a, b), y_0(a, b))$ der Kreisscheibe K die Funktion $f_{a,b}$ ihr Maximum annimmt. Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an (vgl. auch Teilaufgabe C).

$$x_0(a, b) = \dots\dots$$

$$y_0(a, b) = \dots\dots$$

Teilaufgabe C: Sei $a = 1, b = 2$ und $c = 1$. Skizzieren Sie K , tragen Sie den Gradienten $\text{grad}(f_{1,2})$, die Stelle $P(1, 2)$ des Maximums von $f = f_{1,2}$ auf K (siehe Teilaufgabe B) und die Menge $M_{1,2}(1)$ ein.

Teilaufgabe D: Weiterhin sei $(a, b) \neq (0, 0)$. Weil $\text{grad}(f_{a,b})$ nirgends verschwindet, hat $f_{a,b}$ keine lokalen Extremstellen im Inneren von K . Um die Extremstellen der Funktion $f_{a,b}$ am Rand von K zu finden, lässt sich auch die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwenden. Ihr Kern besteht darin, die Extremstellenbestimmung für eine Funktion f in den beiden Variablen x, y unter einer Nebenbedingung zurückzuführen auf die Suche nach den Extremstellen einer gewissen Funktion F in drei Variablen x, y und λ , allerdings ohne Nebenbedingung. Geben Sie für $f = f_{a,b}$ aus der Angabe die Funktion F an sowie die konkreten Gleichungen, die nach der Lagrangeschen Methode zu lösen sind. (Hinweis: Lösen müssen Sie diese Gleichungen nicht. Es steht Ihnen aber frei, das zur Kontrolle ihrer Lösung von Teilaufgabe A zu tun. Die Ergänzungsblätter bieten Platz dafür.)

$$F(x, y, \lambda) := \dots\dots\dots$$

Die zu lösenden Gleichungen:

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.