Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 5.10.2014
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündlichen Prüfungen werden voraussichtlich am Mittwoch, dem 10.12., ab 17 Uhr und am Donnerstag, dem 11.12., ab 15 Uhr stattfinden. (Ort: Freihaus, grüner Turm, 7.Stock, Besprechungszimmer). Die genaue Termineinteilung wird Ihnen rechtzeitig per TISS bekanntgegeben werden. Sollte einer dieser beiden Termine für Sie absolut unmöglich sein, können Sie das hier vermerken.

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3 und 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C und D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Zu jeder Teilaufgabe wird der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie dort notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor der Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Gesamt:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen und Gesamtnote:

Aufgabe 1: Zu Stichproben aus n Werten $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \in \mathbb{R}$ sind gewisse Fragen zu beantworten, die den (empirischen) Median $\tilde{x}$, den (empirischen) Mittelwert $\bar{x}$ und die (empirische) Varianz V betreffen.

Teilaufgabe A: Geben Sie die Definition des empirischen Medians $\tilde{x}$ an. Gehen Sie dabei explizit auf den Unterschied zwischen geradem und ungeradem n ein.

Teilaufgabe B: Geben Sie die Definition des empirischen Mittelwerts $\bar{x}$ an und erklären Sie, wann in der Ungleichungskette

$$x_1 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_1 \;\leq\; \bar{x} \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_n \;=\; x_n$$

sogar Gleichheit gilt.

Teilaufgabe C: Sei $n = 5$. Geben Sie fünf Werte $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ so an, dass $\tilde{x} = 1$ und $\bar{x} = 0$ gilt, und berechnen Sie für Ihre Werte V.

Teilaufgabe D: Wenn Sie Teilaufgabe C richtig gelöst haben, so haben Sie für V sicher eine positive Zahl erhalten. Geben Sie ein möglichst großes $c > 0$ an, so dass bei jeder korrekten Lösung von Teilaufgabe C für die Varianz V die Ungleichung $V \geq c$ gilt. (Es genügt die Angabe eines korrekten c, der Beweis der behaupteten Eigenschaft ist nicht erforderlich. Einen ganzen Punkt gibt es nur bei Angabe des maximalen c.)

Aufgabe 2: Die Zahlen $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ seien gegeben, außerdem

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey.$$

Teilaufgabe A: Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f, also $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Was lässt sich über die partiellen Ableitungen dritter Ordnung sagen?

Teilaufgabe B: Geben Sie Zahlenwerte für $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ an derart, dass f im Punkt $(0, 0)$ ein striktes lokales Maximum hat (d.h. dass es eine Umgebung von $(0, 0)$ gibt in der alle anderen Funktionswerte echt kleiner sind als in $(0, 0)$).

Teilaufgabe C: Geben Sie Zahlenwerte für $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ an derart, dass f im Punkt $(0, 0)$ kein lokales Extremum hat (d.h. dass in jeder Umgebung von $(0, 0)$ sowohl Punkte mit kleinerem wie auch mit größerem Funktionswert liegen).

Teilaufgabe D: Geben Sie die Hessesche Matrix von f in einem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 3: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch ihre Matrixdarstellung (bezüglich der kanonischen Basis)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Teilaufgabe A: Beschreiben Sie die Wirkung der Abbildung f_α verbal.

Teilaufgabe B: Geben Sie einen dreidimensionalen Körper K mit Volumen 2π an, so dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: K wird durch f_α auf sich selbst abgebildet, d.h. $f_\alpha(K) = K$.

Teilaufgabe C: Was folgt aus der Existenz von K in Teilaufgabe B für die Determinante D_α von f_α? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne D_α auszurechnen.

Teilaufgabe D: Geben Sie die Matrix von f_α^n (= n-fach Iterierte von f_α) an.

Aufgabe 4: Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ habe die Eigenvektoren $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, gegeben durch

$$\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$,$\lambda_3 = -1$.

Teilaufgabe A: Stellen Sie die kanonischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ als Linearkombinationen von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ dar.

Teilaufgabe B: Ermitteln Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der kanonischen Basis. (Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe A.)

Teilaufgabe C: Berechnen Sie die Determinante D von f. (Hinweis: Die Lösung von Teilaufgabe B ist dazu nicht erforderlich, kann aber zur Probe verwendet werden.)

Teilaufgabe D: Sei f^n die n-fach Iterierte von f. Geben Sie Formeln in n für die Koordinaten $y_1(n), y_2(n), y_3(n)$ des Vektors $\mathbf{y} := f^n(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$ an.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.