

# Mathematik 1 für Bauingenieurwesen

Prüfung am 26.2.2021  
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

---

## Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3, 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C, D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis  $\circ$ , dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.

- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.
- 

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1:      Aufgabe 2:      Aufgabe 3:      Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

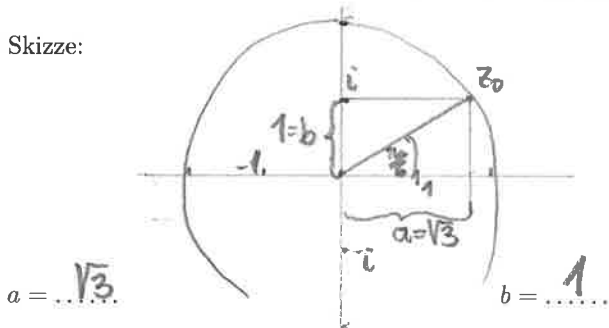
Note:

Sonstige Bemerkungen:

**Aufgabe 1:** In dieser Aufgabe geht es um das Rechnen mit komplexen Zahlen. Eine besondere Rolle spielt die komplexe Zahl  $z_0$ , die geometrisch so definiert werden kann: Man betrachte in der komplexen Ebene ein regelmäßiges 12-Eck mit Mittelpunkt 0 und Radius (= Abstand vom Mittelpunkt zu jedem der Eckpunkte) 2. Ein Eckpunkt liege auf der reellen Achse im Punkt 2. Der diesem in Richtung gegen den Uhrzeigersinn benachbarte Eckpunkt sei  $z_0$ . Als komplexe Zahl ist  $z_0$  also durch die Polarkoordinaten  $z_0 := [2, \frac{\pi}{6}] = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$  gegeben.

**Teilaufgabe A:** Skizzieren Sie  $z_0$  in der komplexen Zahlenebene und bestimmen Sie den Realteil  $a$  sowie den Imaginärteil  $b$  von  $z_0 = a + ib$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ . Geben Sie die gesuchten Werte jedenfalls auch ohne Verwendung von Cosinus bzw. Sinus an (Wurzeln sind erlaubt).

Skizze:



**Teilaufgabe B:** Gesucht ist jene komplexe Zahl  $z_1 = [r, \alpha] = re^{i\alpha} = c + id$ , für die  $z_0 z_1 = 4$  gilt. Ermitteln Sie dazu den Betrag  $r \geq 0$ , den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  sowie Real- und Imaginärteil  $c, d \in \mathbb{R}$  von  $z_1$ .

Aus der Rechnung ...  $[4, 0] = 4 = z_0 \cdot z_1 = [2, \frac{\pi}{6}] \cdot [r, \alpha] = [2r, \frac{\pi}{6} + \alpha]$

ergibt sich:

$r = 2$        $\alpha = \frac{11}{6} \pi$        $c = \sqrt{3}$        $d = -1$

**Teilaufgabe C:** Geben Sie das kleinste  $n > 2$  an, so dass die Potenz  $z_0^n$  wieder im Inneren des ersten Quadranten der komplexen Ebene (insbesondere also weder auf der reellen noch auf der imaginären Achse) liegt, genauer: so, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil von  $z_0^n$  strikt positiv sind.

Das kleinste  $n$  mit der gewünschten Eigenschaft ist  $n = 13$

**Teilaufgabe D:** Mit den Bezeichnungen aus Teilaufgabe C ist  $z_0^n$  sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in Polardarstellung anzugeben, d.h.: Finden Sie  $R \geq 0$ ,  $\beta \in [0, 2\pi)$ ,  $A \in \mathbb{R}$  und  $B \in \mathbb{R}$  mit  $z_0^n = Re^{i\beta} = R(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) = A + iB$ .

$R = 2^{13} = 8192$   
 $\beta = \frac{\pi}{6}$   
 $A = 2^{12} \cdot \sqrt{3} = 4096 \cdot \sqrt{3}$   
 $B = 2^{12} = 4096$

**Aufgabe 2:** Gegeben sei die auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte reelle Funktion  $f(x) := xe^x$ . Deren erste und auch höhere Ableitungen sind Gegenstand dieser Aufgabe.

**Teilaufgabe A:** Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von  $f$ :

$$f'(x) = \dots x e^x + e^x = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = \dots (x e^x + e^x) + e^x = x e^x + 2e^x = (x+2)e^x$$

$$f'''(x) = \dots (x e^x + e^x) + 2e^x = x e^x + 3e^x = (x+3)e^x$$

**Teilaufgabe B:** Geben Sie ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  an mit der Eigenschaft, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt derart, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  aus der Bedingung  $|x - 1| < \delta$  stets die Beziehung

$$\left| \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - \alpha \right| < \varepsilon$$

folgt. Hinweis: Die gesuchte Zahl  $\alpha$  ergibt sich sehr schnell mit Hilfe von Teilaufgabe A.

Weil der Bruch zwischen den großen Betragsstrichen ein Differenzenquotient von  $f$  ist, gilt

$$\alpha = \dots f'(1) = 1 \cdot e^1 + e^1 = 2e$$

**Teilaufgabe C:** Es lässt sich zeigen (siehe Teilaufgabe D), dass allgemein die  $n$ -te Ableitung von  $f$  die Gestalt  $f^{(n)}(x) = (a_n + b_n x)e^x$  mit gewissen ganzzahligen Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  hat. Geben Sie Formeln in Abhängigkeit von  $n$  für diese Koeffizienten an. Zunächst ist kein Beweis gefragt.

$$a_n = \dots n \dots$$

$$b_n = \dots 1 \dots$$

**Teilaufgabe D:** Beweisen Sie Ihre Behauptung aus Teilaufgabe C mittels vollständiger Induktion. Führen Sie insbesondere den Induktionsanfang durch, formulieren Sie sowohl die Induktionsvoraussetzung IV als auch die Induktionsbehauptung und markieren Sie in Ihrem Induktionsschritt die Stelle, wo die Induktionsvoraussetzung IV einfließt.

Induktionsanfang,  $n = 0$ :  $\dots f^{(0)}(x) = f(x) = x e^x = (0+1 \cdot x) e^x$

Induktionsvoraussetzung (IV):  $\dots f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$  für ein bestimmtes, beliebiges  $n \in \mathbb{N}$

Induktionsbehauptung:  $\dots f^{(n+1)}(x) = ((n+1)+x)e^x$  für das  $n$  aus der IV

Induktionsschritt:  $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = ((n+x)e^x)' = (n+x)(e^x)' + (n+x)'e^x =$   
 $= (n+x)e^x + 1 e^x = (n+1+x)e^x$

**Aufgabe 3:** Von der für  $x > 0$  definierten reellen Funktion  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g(x)$ , sei bekannt, dass

$$g(2x) = g(x) + 3 \quad \text{für alle } x > 0$$

gelte. Daraus folgt z.B. durch Iteration auch

$$g(4x) = g(2^2x) = g(2(2x)) = g(2x) + 3 = (g(x) + 3) + 3 = g(x) + 6 = g(x) + 2 \cdot 3.$$

In dieser Aufgabe sollen unter gewissen zusätzlichen Annahmen weitere Informationen über  $g$  herausgefunden werden.

**Teilaufgabe A:** Wenn der Wert  $g(1) = 5$  bekannt ist, ergibt sich daraus auch der Wert an der Stelle  $x = 16$ . Berechnen Sie diesen.

$$g(16) = \dots g(2^4 \cdot 1) = g(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1) \stackrel{\uparrow}{=} g(1) + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 12 = 17$$

Iteration von  $g(2x) = g(x) + 3$

**Teilaufgabe B:** Diesmal sei vorausgesetzt, dass  $g(x)$  für alle  $x \in [1, 2)$  bekannt sei. Wie lässt sich daraus der Wert an der Stelle  $3 = 2 \cdot \frac{3}{2}$  bestimmen?

$$g(3) = \dots g(2 \cdot \frac{3}{2}) = \underbrace{g(\frac{3}{2})}_{\text{bekannt, weil } \frac{3}{2} \in [1, 2)} + 3$$

**Teilaufgabe C:** Wie Teilaufgabe B, nur soll nun allgemeiner der Wert  $g(x)$  von  $g$  an einer beliebigen Stelle  $x > 0$  bestimmt werden. Dazu wählen wir jene ganze Zahl  $k$ , für die  $k \leq \log_2(x) < k+1$  gilt (was immer möglich ist). Für dieses  $k$  setzen wir  $x_0 := \frac{x}{2^k}$ , also  $x = 2^k x_0$  mit  $x_0 \in [1, 2)$ . Folglich ergibt sich  $g(x)$  aus  $k$  und  $g(x_0)$  mittels der Formel:

$$g(x) = \dots g(2^k x_0) = g(x_0) + 3k$$

**Teilaufgabe D:** Die vorausgesetzte Bedingung  $g(2x) = g(x) + 3$  an  $g$  bedeutet, dass  $g$  die Multiplikation mit der Zahl 2 in eine Addition, und zwar der Zahl 3 übersetzt. Auch die Funktionalgleichung für den Logarithmus entspricht einer Übersetzung von Multiplikation in Addition. Insbesondere gilt für den Logarithmus  $\log_a$  zu einer Basis  $a > 0$

$$\log_a(2x) = \log_a(2) + \log_a(x).$$

Welchen Wert kann man also für  $a$  nehmen, damit für  $g := \log_a$  tatsächlich  $g(2x) = g(x) + 3$  gilt?

Aus der Rechnung  $\dots \log_a(2) = 3 \Leftrightarrow a^3 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2}$

folgt  $a = \dots \sqrt[3]{2}$

**Aufgabe 4:** In dieser Aufgabe geht es um Polynome vom Grad  $n \in \mathbb{N}$ , für die wir die Schreibweise  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  (also  $a_n \neq 0$ ) vereinbaren. Eine besondere Rolle spielen lokale Extremstellen, außerdem Wendestellen im folgenden Sinn: Für ein nichtkonstantes Polynom  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heiße  $x_0$  eine Wendestelle (bzw.  $(x_0, p(x_0))$  ein Wendepunkt), wenn die zweite Ableitung von  $p$  bei  $x_0$  das Vorzeichen wechselt. Insbesondere muss an Wendestellen  $p''(x_0) = 0$  gelten.

**Teilaufgabe A:** Hat jedes Polynom vom Grad 3 wenigstens eine lokale Extremstelle? Wenn ja, begründen Sie das; wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

o Ja, jedes Polynom vom Grad 3 hat eine lokale Extremstelle, weil .....

X Nein, es gibt auch Polynome  $p$  vom Grad 3 ohne lokale Extremstelle, z.B.  $p(x) := x^3$ ...

**Teilaufgabe B:** Hat jedes Polynom  $p$  vom Grad 3 wenigstens eine Wendestelle? Wenn ja, begründen Sie das; wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

X Ja, jedes Polynom  $p$  vom Grad 3 hat eine Wendestelle, weil  $p''$  Grad 1 hat.  
Polynome vom Grad 1 haben immer eine Nullstelle, an der das Vorzeichen wechselt.

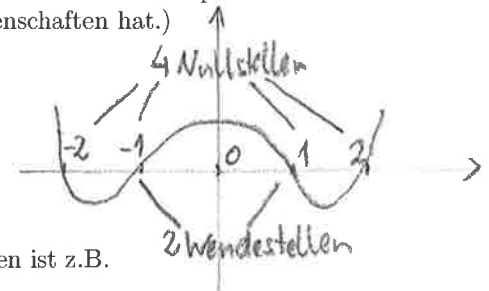
o Nein, es gibt auch Polynome  $p$  vom Grad 3 ohne Wendestelle, z.B.  $p(x) := \dots$

**Teilaufgabe C:** Was ist der minimale Grad  $n$  eines Polynoms  $p$ , welches zwei Wendestellen hat? Hier ist zunächst noch keine strenge Begründung gefordert. Sie dürfen sich von heuristischen Überlegungen leiten lassen.

Ein Polynom  $p$  mit zwei Wendestellen muss mindestens den Grad  $n = 4$  haben.

**Teilaufgabe D:** Zeigen Sie, dass das  $n$  aus Teilaufgabe C nicht größer sein kann als von Ihnen behauptet, indem Sie ein Polynom  $p$  von diesem Grad  $n$  mit zwei Wendestellen explizit angeben. (Hinweis: Die gewünschte Eigenschaft folgt z.B. wenn Sie  $p$  auf geeignete Weise durch seine Nullstellen festlegen. Wenn Sie das korrekt tun, ist es nicht notwendig, die Wendestellen explizit zu bestimmen und/oder zu begründen, warum Ihr  $p$  die gewünschten Eigenschaften hat.)

Raum für Vorüberlegungen oder eine Skizze (nicht verpflichtend):



Ein Polynom vom Grad  $n$  aus Teilaufgabe C mit zwei Wendepunkten ist z.B.

$$p(x) := (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - 5x^2 + 4$$