Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 8.5.2015
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um die Beschreibung einer Drehung $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit Rotationszentrum im Koordinatenursprung $(0, 0)$. Es gelte $d(1, 0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Teilaufgabe A: Skizzieren Sie ein Koordinatensystem mit dem Einheitskreis und tragen Sie darin die Punkte $(1, 0), d(1, 0), (0, 1), d(0, 1), (4, -3)$ und (approximativ) $d(4, -3)$ ein.

Teilaufgabe B:

Geben Sie α sowohl in Bogen- als auch in Gradmaß an, sowie die Koordinaten x_0 und y_0 des Punktes $d(0, 1) = (x_0, y_0)$.

$\alpha = \ldots\ldots$ (Bogenmaß)

$\alpha = \ldots\ldots$ (Gradmaß)

$x_0 = \ldots\ldots$

$y_0 = \ldots\ldots$

Teilaufgabe C: Gesucht sind die Formeln für die Koordinaten x', y' des Bildpunkt $(x', y') := d(x, y)$ eines beliebig vorgegebenen Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von x und y. Weil d linear ist, hängen sowohl x' als auch y' linear von x und y ab, also $x' = a_{1,1}x + a_{1,2}y$ und $y' = a_{2,1}x + a_{2,2}y$ mit geeigneten Koeffizienten $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2} \in \mathbb{R}$. Geben Sie diese Koeffizienten an. (Hinweis: Sie können Ihre Lösung anhand bekannter Punktepaare kontrollieren.)

$a_{1,1} = \ldots\ldots$ $\quad$ $a_{1,2} = \ldots\ldots$ $\quad$ $a_{2,1} = \ldots\ldots$ $\quad$ $a_{2,2} = \ldots\ldots$

Teilaufgabe D: Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $(x_1, y_1) := d(4, -3)$. Allfällige Brüche und Wurzeln müssen Sie nicht in Dezimaldarstellung umrechnen. Zu Ihrer eigenen Kontrolle könnte aber ein Vergleich mit Ihrer Skizze aus Teilaufgabe A lohnen.

$x_1 = \ldots\ldots$

$y_1 = \ldots\ldots$

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um Grenzwerte und Häufungspunkte von reellen Folgen.

Teilaufgabe A: Geben Sie eine streng monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ und eine streng monoton fallende Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$ an. (Hinweis: Beachten Sie dabei bereits Teilaufgabe B.)

$a_n := \ldots\ldots$

$b_n := \ldots\ldots$

Teilaufgabe B: Erklären Sie für die in Teilaufgabe A von Ihnen angegebene Folge der a_n anhand der Definition des Grenzwertes, dass die Folge tatsächlich gegen 2 konvergiert. Genauer: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben; wie kann man daraus ein $n_0(\varepsilon)$ berechnen, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ eine von Ihnen anzugebende Ungleichung U gilt.

$n_0(\varepsilon) := \ldots\ldots$ (muss nicht unbedingt ganzzahlig sein)

Die Ungleichung U: ....

Teilaufgabe C: Die Summe zweier Folgen, von denen beide einen Häufungspunkt haben, muss nicht unbedingt selbst einen Häufungspunkt haben. Illustrieren Sie das, indem Sie zur Folge der $a_n := 2 + (1 + (-1)^n)n$ (mit Häufungspunkt 2) eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Häufungspunkt 3 angeben derart, dass die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt hat. Definieren Sie die b_n geeignet und geben Sie die daraus resultierenden $a_n + b_n$ an.

$b_n := \ldots\ldots\ldots\ldots$

Folglich:

$a_n + b_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Teilaufgabe D: Angenommen, die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2 und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Häufungspunkt 3. Lässt sich daraus schließen, dass die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt hat? Wenn ja: welchen? Wenn nein: Gegenbeispiel.

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe steht das Newton-Verfahren zur approximativen Berechnung einer Nullstelle α einer differenzierbaren reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Mittelpunkt.

Teilaufgabe A: Die Grundidee des Newtonverfahrens besteht darin, mit einem Schätzwert $x_1 \in D$ als erster Näherung für eine Nullstelle α von f zu beginnen, f durch seine Tangente (lineare Approximation) g im Punkt $(x_1, f(x_1))$ zu ersetzen und die Nullstelle x_2 von g als zweite Näherung für α zu betrachten. Geben Sie die Funktionsgleichung für g an.

$g(x) := \ldots\ldots$

Teilaufgabe B: Erklären Sie wie man von Ihrer Antwort aus Teilaufgabe A zur Formel $T(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ kommt, so dass die Folge der Näherungen x_n die Rekursion $x_{n+1} = T(x_n)$ erfüllt.

Teilaufgabe C: Berechnen Sie für $f(x) := x^2 - 2$ und $x_1 := 2$ die Werte x_2 und x_3 (Notation wie in Teilaufgabe A und B) sowohl als Brüche wie auch als eventuell periodische Dezimalzahl. (Markieren Sie Perioden, indem Sie sie überstreichen, z.B. $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ oder $\frac{1}{99} = 1{,}\overline{01}$).

Teilaufgabe D: Man überlegt sich leicht, dass für die Angabe aus Teilaufgabe C das Newtonverfahren konvergiert. Berechnen Sie $f(x_3)$ und schätzen Sie die Größenordnung des Fehlers $x_3 - \alpha$, indem Sie ein ε angeben mit $\frac{\varepsilon}{10} < |x_3 - \alpha| < \varepsilon$. (Hinweis: Für $1 < x < 2$, wo ja sicher die gesuchte Nullstelle liegt, ist sicher $2 < f'(x) < 4$. Eventuell kann auch eine schematische Skizze hilfreich sein. Sie sollen lediglich ein korrektes ε angeben, weitere Rechnungen oder Begründungen für Ihre Wahl sind nicht gefordert.)

$$f(x_3) = \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon :\approx \ldots\ldots$$

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Mit Hilfe von f können wir die folgenden Funktionen definieren:

$$g_0(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \quad g_1(x) := \int_0^x f(t)^2\,dt, \quad g_2(x) := \int_0^{x^2} f(t)\,dt,$$

Auch die Ableitungen dieser Funktionen existieren und lassen sich mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sowie in einem Fall der Kettenregel ohne Verwendung eines Integalzeichens durch f ausdrücken. Das ist in dieser Aufgabe zu tun.

Teilaufgabe A:

$g_0'(x) = \ldots\ldots$

Teilaufgabe B:

$g_1'(x) = \ldots\ldots$

Teilaufgabe C:
Wie kann man die Funktion h wählen, damit $g_2 = g_0 \circ h$ gilt?

$h(x) = \ldots\ldots$

Teilaufgabe D:

$g_2'(x) = \ldots\ldots$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.