Mathematik 1 für Bauingenieure, Prüfung am 7.3.2014, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.
Gelegentlich ist die Angabe länger als die Lösung. Wenn Sie sich bei jeder Aufgabe noch vor dem Studium der Details einen Überblick verschaffen, was in den einzelnen Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

1. Von der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass die Gleichung

$$\text{G1}: \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt und dass f an der Stelle 0 differenzierbar ist, wobei wir $c := f'(0) \in \mathbb{R}$ setzen.

   (a) Begründen Sie, warum aufgrund von G1 für $f(0)$ nur die Werte 0 und 1 in Frage kommen. (Bemerkung für später: Ist $f(0) = 0$, so auch $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$, also ist f die Nullfunktion.)

   (b) Mit Hilfe des Bisherigen kann man auf die Gleichungskette

$$\text{G2}: \quad f'(x_0) \overset{\text{A}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\text{B}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0)(f(x - x_0) - 1)}{x - x_0} \overset{\text{C}}{=} f(x_0)f'(0)$$

   schließen. Begründen Sie darin die Gleichheit A.

   (c) Begründen Sie die Gleichheit B in G2 aus (b).

   (d) Begründen Sie die Gleichheit C in G2 aus (b).

   (e) Unter einer Differentialgleichung wollen wir hier eine Gleichung in einer Unbekannten y für eine Funktion verstehen, wo auch die Ableitung y' vorkommen darf. Welche Differentialgleichung dieser Form erfüllt f aufgrund von G2 in (b)?

   (f) Man kann zeigen, dass es zu jedem Wert von $c \in \mathbb{R}$ genau ein f mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Welches f liegt im Fall $c = 1$ vor?

2. Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Zählerpolynom $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$ und Nennerpolynom $q(x) = x^3 - x$. $D \subseteq \mathbb{R}$ sei der maximale sinnvolle Definitionsbereich, d.h. $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen von q.

   (a) Wie man leicht nachprüfen kann, besitzt p genau die Nullstellen -2, -1 und 2. Benutzen Sie diese Information, um p als Produkt von Linearfaktoren darzustellen.

   (b) Stellen Sie auch q als ein Produkt von Linearfaktoren dar.

   (c) Die Funktion f hat eine gekürzte Darstellung $f(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$, die sogar für einen größeren Definitionsbereich $D_1 = D \cup \{x_0\}$ mit $x_0 \notin D$ sinnvoll ist. Geben Sie dieses x_0 an.

   (d) Berechnen Sie Polynome p_1 und q_1 wie in (c).

   (e) Polynomdivision liefert Darstellungen von f der Form $f(x) = l(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ bzw. $f(x) = l(x) + \frac{r_1(x)}{q_1(x)}$ mit einer linearen Funktion l, mit q_1 aus (c) und (d), und mit Polynomen r bzw. r_1, deren Grad kleiner ist als der von q bzw. der von q_1. Ermitteln Sie eine dieser beiden Darstellungen.

   (f) Hat f für $x \to \pm\infty$ eine Asymptote? Wenn ja, welche?

3. In dieser Aufgabe ist von linearen Funktionen (Transformationen) $T = T_{k,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Rede mit Steigung k und $d = T_{k,d}(0)$, also $T_{k,d} : x \mapsto kx + d$. Die beiden Parameter k und d dürfen beliebige reelle Zahlen sein.

   Wir interessieren uns hier für Iterationen von T. D.h. wir starten mit einem Anfangswert a_0, wenden auf ihn T an und erhalten somit $a_1 := T(a_0)$, analog $a_2 := T(a_1)$ etc. Auf diese Art und Weise ist durch beliebige Vorgabe von $a_0 \in \mathbb{R}$ eine rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt, indem man $a_{n+1} := T(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

   Offenbar ist diese Folge genau dann konstant, wenn a_0 ein Fixpunkt von T, d.h. wenn $T(a_0) = a_0$ ist.

   (a) Die Funktion $T = T_{k,d}$ ist stetig. Begründen Sie dies (in einem beliebigen Punkt x_0), indem Sie zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ wie in der ε-δ-Definition von Stetigkeit angeben.

   (b) Weil T stetig ist, kommen als Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ nur Fixpunkte von T in Frage. Das erkennt man an einer Gleichungskette der Form

   $$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} a_n) = \ldots = \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

   Ergänzen Sie die fehlenden Glieder dieser Gleichungskette und markieren Sie, wo die Stetigkeit von T einfließt.

   (c) Skizzieren Sie $T_{k,d}$ samt der Menge $F_{k,d}$ aller Fixpunkte von $T_{k,d}$ für vier verschiedene Parameterpaare, nämlich: für $k = 2$ und $d = -1$; für $k = -\frac{1}{2}$ und $d = 1$; für $k = 1$ und $d = 2$; und für $k = -1$ und $d = 1$.

   (d) Wie man aus (c) ersehen kann, hängt die Menge $F_{k,d}$ der Fixpunkte von den Parametern k und d ab. Beschreiben Sie $F_{k,d}$ in Abhängigkeit von k und d. (Anleitung: Drei Fälle sind zu unterscheiden.)

   (e) Im Fall $k = -1$ gibt es Perioden der Länge 2, d.h. Paare von Punkten $x_0 \neq x_1$ mit $T(x_0) = x_1$ und $T(x_1) = x_0$. Finden Sie ein solches Paar für $d = 1$.

   (f) Sei jetzt $|k| < 1$ und $d \in \mathbb{R}$ beliebig. Für welche a_0 konvergiert, für welche divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Geben Sie im konvergenten Fall auch den Grenzwert x an. (Skizze ist nicht verpflichtend, kann aber helfen.)

   (g) Für welche Parametertripel (k, d, a_0) mit $|k| > 1$ konvergiert, für welche divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Geben Sie im konvergenten Fall auch den Grenzwert x an.

   (h) Wie (g), nur mit $|k| = 1$.