Algebra
Prüfung am 1.7.2011 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung (bitte ankreuzen):
○ Am 1.7. nach der schriftlichen Prüfung um 16:30 Uhr
○ Ich melde mich ehestmöglich per email an reinhard.winkler@tuwien.ac.at zwecks Vereinbarung eines Termins ab 11.7.

Arbeitszeit: 100 Minuten
Die Teilfragen haben annähernd gleiches Gewicht.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe!

1. Sei S_n die symmetrische Gruppe, bestehend aus allen Permutationen π der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, $A_n \subseteq S_n$ die Untergruppe aller geraden $\pi \in S_n$ und $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq A_4$ (Zyklenschreibweise).

   (a) Sei N Normalteiler einer Gruppe G. Wie sind Trägermenge und binäre Operation der Faktorgruppe G/N definiert? (Auf Probleme der Wohldefiniertheit müssen Sie nicht eingehen.)

   (b) Ermitteln Sie die Linksnebenklassen von V in A_4.

   (c) Erstellen Sie die Operationstafel von A_4/V. (Anleitung: Aus der Ordnung $|A_4/V|$ ergibt sich fast alles. Sie dürfen dabei verwenden, dass V ein Normalteiler von A_4 ist.)

   (d) Besitzt A_4 eine Untergruppe, die isomorph ist zu A_4/V? (Angabe eines Beispiels oder Begründung)

   (e) Finden Sie das minimale n derart, dass S_n eine Untergruppe besitzt, die isomorph zu $C_6 = \mathbb{Z}/(6)$ ist (Bezeichnung wie in Aufgabe 1).

   (f) Nach dem Satz von Cayley ist jede endliche Gruppe G zu einer Untergruppe von S_k mit $k = |G|$ isomorph. Finden Sie ein $m > 5$ und eine Gruppe G mit $m = |G|$, so dass m minimal ist unter jenen k, für die S_k eine zu G isomorphe Untergruppe besitzt.

2. Für einen Körper K bezeichne $K_n[x]$ die Menge aller Polynome über K vom Grad $\leq n$.

   (a) Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit $4 = 2^2$ Elementen. Schreiben Sie die Operationstafeln für Addition und Multiplikation an. (Anleitung: Sie dürfen verwenden, dass dies nur auf eine Art möglich ist.)

   (b) Sei $K = \{0, 1\}$ ein zweielementiger Körper. Wieviele Elemente hat der Zerfällungskörper der Menge $K_2[x]$?

   (c) Wie (b) mit $K_3[x]$ statt mit $K_2[x]$.

   (d) Sei $f \in K[x]$ vom Grad n und Z der Zerfällungskörper von f über K. Geben Sie (in Abhängigkeit von n) eine obere Schranke für den Grad $[Z : K]$ der Körpererweiterung an.

   (e) Wieviele Elemente hat der Zerfällungskörper des Polynoms $x^6 - 1$ über dem zweielementigen Körper?

   (f) Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ der 4-elementige Körper aus (a). Ist $f(x) = x^3 + a \in K[x]$ irreduzibel? (Begründung)

3. In der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ bezeichne $(m) = \{km : k \in \mathbb{Z}\}$ die von $m \in \mathbb{Z}$ erzeugte Untergruppe, $C_m = \mathbb{Z}/(m)$ die zugehörige Faktorgruppe und $\kappa_m : \mathbb{Z} \to C_m, k \mapsto k+(m)$ den kanonischen Homomorphismus. Weiters sei $\kappa : \mathbb{Z} \to P, k \mapsto (\kappa_m(k))_{m\geq 1}$ die dadurch induzierte Abbildung ins direkte Produkt $P = \prod_{m\geq 1} C_m$. Die Teilmenge $P^* \subseteq P$ bestehe aus jenen $a = (a_m)_{m\geq 1} \in P$, wo es ein m_0 gibt mit $a_m = 0$ für alle $m \geq m_0$.

   (a) Ist $\kappa : \mathbb{Z} \to P$ ein Homo-, Epi-, Mono-, Endo-, Iso- bzw. Automorphismus?

   (b) Ist P^* Untergruppe von P? (Begründung)

   (c) Geben Sie ein $a = (a_m)_{m\geq 1} \in P \setminus \kappa(\mathbb{Z})$ an.

   (d) Sei U jene Untergruppe von P, die von P^* und $\kappa(\mathbb{Z})$ erzeugt wird. Liegt eine direkte Summe $U = P^* \oplus \kappa(\mathbb{Z})$ vor? (Begründung)

   (e) Für welche $n = 1, 2, \ldots$ gibt es in P^* Elemente der Ordnung n?

   (f) Für welche $n = 1, 2, \ldots$ gibt es in $\kappa(\mathbb{Z})$ Elemente der Ordnung n? (Hinweis: (a) kann hilfreich sein.)