Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Übungsbeispiele

1) Man gebe eine Folge reeller Zahlen an, die als Häufungspunkte genau alle natürlichen Zahlen hat. (Hinweis: Das n-te Folgenglied muss nicht explizit angegeben werden.)

2) Man gebe eine Folge reeller Zahlen an, die als Häufungspunkte genau alle ganzen Zahlen hat. (Hinweis: Das n-te Folgenglied muss nicht explizit angegeben werden.)

3) Gibt es eine Folge reeller Zahlen, die als Häufungspunkte genau alle rationalen Zahlen hat?

4) Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{2}$ $(n \geq 0)$.

5) Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n(n+1)/2}$ $(n \geq 0)$.

6) Man finde alle Häufungspunkte der Folge

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n}+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}, \qquad (n \geq 1).$$

7) Man zeige, dass die Folge $a_n = \frac{\sin n}{n}$ $(n \geq 1)$ nur 0 als Häufungspunkt hat.

8) Man zeige, dass die Folge $a_n = \frac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$ nur 0 als Häufungspunkt hat.

9–12) Man zeige, dass die Folge a_n konvergiert, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ und ein geeignetes a angebe, sodass $\forall n > N(\varepsilon):\ |a_n - a| < \varepsilon$.

9) $a_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$ **10)** $a_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt[4]{n}}, \quad n \geq 1$

11) $a_n = \frac{\ln n}{n}$, $n \geq 1$
Anleitung: Zeigen Sie, dass aus $\ln x < \frac{x}{2}$ die Ungleichung $\ln(n) < \sqrt{n}$ folgt. Die erste Ungleichung darf ohne Beweis verwendet werden.

12) $a_n = \frac{n}{4^n},\ , n \geq 0$
Anleitung: Zeigen Sie zunächst $n < 2^n$.

13) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Man zeige, dass es zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

14) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Man zeige, dass es zwei Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

15) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Man zeige, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + 2b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c = a + 2b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

16) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Man zeige, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c = 3a - b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

17) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ mit $b \neq 0$. Man zeige, dass dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. — Wieso spielt hierbei die zusätzliche Bedingung „$b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$“, die eigentlich für die Existenz der Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ notwendig ist, keine große Rolle?

18) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

19) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Zeigen Sie, dass aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ immer $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ folgt. Läßt sich hier $\leq$ durch $<$ ersetzen?

20) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $a_n = 1 + \frac{1}{n^2} + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(3 - \frac{5}{n}\right)$.

1. Gelten für die Umgebung $U = U_1(3) = (2,4)$ von 3 die folgenden beiden Aussagen?
   (a) $a_n \in U$ für unendlich viele n.
   (b) Es gibt ein $N = N(\varepsilon) = N(1)$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.
2. Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ an.
3. Geben Sie eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ an, so dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist.
4. Warum konvergieren alle monotonen Teilfolgen von $(a_n)_{n\geq 1}$?

21–27) Man untersuche die Folge a_n (mit Hilfe vollständiger Induktion) auf Monotonie und Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$. Überlegen Sie sich auch, warum die Folge wohldefiniert ist für alle $n \geq 0$.

21) $a_0 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

22) $a_0 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 9}$ für alle $n \geq 0$.

23) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ für alle $n \geq 0$.

24) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4\cdot\sqrt{a_n} - 3}$ für alle $n \geq 0$. Hinweis: $x^4 + 6x^2 - 16x + 9 = (x-1)^2(x^2 + 2x + 9)$.

25) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2\cdot\sqrt{a_n} - 1}$ für alle $n \geq 0$. Hinweis: $x^4 + 2x^2 - 4x + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + 3x - 1)$.

26) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

27) $a_0 = 1/2$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

28) Man untersuche nachstehende Folgen in Hinblick auf Monotonie, Beschränktheit und mögliche Grenzwerte. Ferner veranschauliche man die Folgen auf der reellen Zahlengeraden:

(a) $(a_n) = 0, 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots, 2n+1, \frac{1}{2n+2}, \ldots$

(b) (b_n) mit $b_n = \frac{n+4}{n-1}$ für $n \geq 2$

(c) (c_n) mit $c_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ für $n \geq 1$

29) Sei $0 < a_0 < c$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $a_{n+1} = \sqrt{a_n c}$.

(a) Zeigen Sie, dass aus $0 < a < c$ stets $a < \sqrt{ac} < c$ folgt.

(b) Folgern Sie aus (a) mittels Induktion nach n, dass a_n definiert ist und dass $0 < a_n < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie sich auch, warum die Folge wohldefiniert ist für alle $n \geq 0$.

(c) Zeigen die a_n irgendein Monotonieverhalten? Wenn ja, welches?

(d) Untersuchen Sie die a_n hinsichtlich Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

30) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge (a_n) mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = (a_n + 6/a_n)/2$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Man berechne die Folgenglieder a_n für $n = 0, \ldots, 10$, untersuche die Folge in Bezug auf Wohldefiniertheit, Monotonie, Beschränktheit sowie Konvergenz und berechne – wenn möglich – den Grenzwert.

31–46) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Wohldefiniertheit und Konvergenz und bestimme gegebenfalls den Grenzwert. (Die a_n sind für fast alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.)

31) $a_n = \dfrac{2n^3 + 2n - 3}{4n^3 + n^2 + 5}$

32) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n - 3}{2n^3 + 3n^2 - n + 7}$

33) $a_n = \dfrac{3n^2 - 5n + 7}{3n^3 - 5n + 7}$

34) $a_n = \dfrac{2n^3 - 5n^2 + 7}{2n^3 - 5n + 7}$

35) $a_n = \dfrac{2n^2 - 5n^{\frac{9}{4}} + 7}{7n^3 + 2n^{-\frac{3}{2}} + 1}$

36) $a_n = \dfrac{3n^2 - 4n^{\frac{11}{3}} + n^{-1}}{2n^4 + 2n^{-\frac{3}{2}} + 1}$

37) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

38) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

39) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

40) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}$

41) $a_n = \dfrac{\frac{\sin n}{(n-2)^2} + \frac{n^2+2}{n^2-n}}{\frac{3n^2+2}{n^2+n}}$

42) $a_n = \dfrac{\frac{n^2-4}{4n^2-7n} - \frac{\cos n}{2n-5}}{\frac{3n^2+2}{(n-3)^2}}$

43) $a_n = n\,q^n \quad (-1 < q < 0)$

44) $a_n = \dfrac{q^n}{n} \quad (q > 1)$

45) $a_n = \sqrt[n^2]{n^5 + 1}$

46) $a_n = \sqrt[n^2]{n^3 + n^2}$

(Hinweis zu Bsp. 45) und Bsp. 46): Man verwende den als bekannt vorausgesetzten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.)

47–50) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ finde.

47)

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$$

48)

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

49)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

50)

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

51) Zeigen Sie: Sind $a_1, \ldots, a_m \geq 0$ fest gewählte reelle Zahlen und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $b_n = \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_m^n}$ definiert, so gilt $\lim b_n = \max\{a_1, \ldots, a_m\}$.

52) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1).$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion) $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ und bestimme den Grenzwert.

53) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{(n+1)!} \quad (n \geq 0).$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion)

$$a_n = 1 - \frac{1}{n!}$$

und bestimme den Grenzwert.

54) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}, \qquad n \geq 1,$$

für $n \to \infty$.

55–56) Man bestimme alle Häufungspunkte, sowie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folge a_n:

55)

$$a_n = (-1)^n n^{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}+1} + \cos\frac{n\pi}{2}$$

56)

$$a_n = \frac{n^2 \cos\frac{n\pi}{2} + 1}{n+1} + \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

57–58) Man zeige, dass die Folge a_n uneigentlich konvergiert, indem man zu jedem $A > 0$ ein $N(A)$ angebe, sodass für $n > N(A)$ immer $a_n > A$ gilt.

57)

$$a_n = \frac{n^3+1}{n-1}$$

58)

$$a_n = \frac{2n^4+n}{n^3+n}$$

59) Man gebe zwei reelle Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n^2} = +\infty$$

erfüllen.

60) Man gebe zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ an, die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{b_n} = +\infty \qquad \text{erfüllen.}$$

61–66) Man bestimme die Partialsummenfolge und ermittle dann gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe. (Hinweis: Man stelle die Summanden als Differenz bzw. Summe passender Ausdrücke dar.)

61) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+2)}$ **62)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

63) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ **64)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}$

65) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$ **66)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$

67) Seien P_1 und P_2 beliebige Punkte der Zahlengeraden. Man halbiere fortgesetzt die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in P_3, die Strecke $\overline{P_2P_3}$ in P_4, $\overline{P_3P_4}$ in P_5, usw. und bestimme die Lage von P_n für $n\to\infty$.

68–69) Man berechne unter Benützung der komplexen Zahlen und der de Moivreschen Formel $(\cos x+i\sin x)^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$ den Grenzwert der Reihe:

68) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ **69)** $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

70) Es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Man folgere daraus $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

71) Für $n=1,2,3,\dots$ sei $a_n=\frac{1}{n^2}$, $b_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $c_n=\frac{1}{n}$ und $d_n=\frac{1}{n+1}$. Weiters sei $A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $C=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ und $D=\sum_{n=1}^{\infty}d_n$.

(a) Berechnen Sie die Partialsummen von B.

(b) Berechnen Sie den Wert von B.

(c) Begründen Sie $a_n\le 2b_n$. Konvergiert A?

(d) Warum ist $B=C-D$ falsch, obwohl $b_n=c_n-d_n$?

72–81) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

72) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{3n^2+1}{5n^3-2}$ **73)** $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{n-2}{2n^3+5n-3}$

74) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{n+2}{6^n}$ **75)** $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{n!}{n^n}$

76) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{2n^2+1}{n^4+2}$ **77)** $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{n+3}{7n^2-2n+1}$

78) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{n-1}{3^n}$ **79)** $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{n^{n-1}}{n!}$

80) $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{(n^2+1)^n}{\sqrt{n^{n^2}}}$ **81)** $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{3^{n^2}}{n^n}$

82–85) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

82) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ **83)** $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}+5n}$

84) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$ **85)** $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{(n+3)^{4/3}}$

86) Sei $a_n\ge 0$ für alle $n\ge 0$ und die Reihe $\sum_{n\ge 0}a_n$ konvergent. Man zeige, dass dann auch die Reihe $\sum_{n\ge 0}a_n^2$ konvergiert.

87) Gilt Bsp. 86) auch ohne die Voraussetzung $a_n\ge 0$ für alle $n\ge 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

88) Sei $a_n\ge 0$ für alle $n\ge 0$ und die Reihe $\sum_{n\ge 0}a_n$ konvergent. Man zeige, dass dann auch die Reihe $\sum_{n\ge 0}a_n^3$ konvergiert.
(Beweis oder Gegenbeispiel!)

89) Es sei $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\ge 0}(a_{n+1}-a_n)$.

90) Es sei $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\ge 0}(a_{n+2}-a_n)$.

91) Es sei $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\ge 0}(-1)^n(a_{n+1}+a_n)$.

92–95) Man zeige, dass die folgende Funktionenreihen im jeweils angegebenen Bereich konvergieren:

92) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\binom{\frac12}{n}x^n,\quad |x|<1$ **93)** $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\binom{2n}{n}x^n,\quad |x|<\frac14$

94) $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in\mathbb{C}$ **95)** $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad z\in\mathbb{C}$

96–97) Man untersuche, für welche $x\in\mathbb{R}$ die folgende Funktionenreihe konvergiert:

96) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(x-1)^n$ **97)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$

98) Man zeige
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!},\qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

99) Man zeige
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nb^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-b)^n}{n!},\qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

100–101) Man untersuche, welche o-, O- und $\sim$-Beziehungen zwischen den Folgen a_n, b_n und c_n bestehen.

100) $a_n=2n$, $b_n=\frac{n^2}{2}$, $c_n=\frac{3n^4}{6n^2+1}$. **101)** $a_n=\frac{2}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$, $c_n=\frac{8n^2}{4n^3+1}$.

102–103) Zeigen Sie die folgenden asymptotischen Beziehungen für die Anzahlen der Kombinationen mit bzw. ohne Wiederholungen für festes k und $n\to\infty$:

102) $\displaystyle\binom{n}{k}\sim\frac{n^k}{k!}$ **103)** $\displaystyle\binom{n+k-1}{k}\sim\frac{n^k}{k!}$

104) Zeigen Sie die folgende asymptotische Beziehung für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen für festes k und $n \to \infty$:

$$[n]_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = n^k + O(n^{k-1}).$$

105–106) Man zeige mit Hilfe der Stirlingschen Approximationsformel $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$:

105)
$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

106)
$$\binom{3n}{n} \sim \left(\frac{27}{4}\right)^n \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}$$

107) Bestimmen Sie die Größenordnungen von

(a) $2{,}7n^2 - 0{,}5n + 1$,

(b) $0{,}35 \cdot 2^n + 5n^5$,

(c) $\sqrt{1 + 1{,}1\,n^2}$.

108) Zeigen Sie:

(a) $a_n = O(1) \iff (a_n)$ ist beschränkt.

(b) $a_n = o(1) \iff (a_n)$ ist eine Nullfolge.

109–112) Man zeige mit Hilfe der Eulerschen Formeln den angegebenen Summensatz.

109) $\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$

110) $\cos(u-v) = \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v)$

111) $\sin(u-v) = \sin(u)\cos(v) - \cos(u)\sin(v)$

112) $\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$

113) Mit Hilfe der Rechenregeln für die Exponentialfunktion e^x beweise man für den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ folgende Eigenschaften:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(x^y) = y\ln(x).$$

114) Mit Hilfe der Rechenregeln für die Exponentialfunktion e^x und den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ beweise man für eine beliebige Basis a mit $a > 0$ und $a \neq 1$ die Darstellungen

$$a^x = e^{x\cdot\ln(a)} \quad \text{und} \quad \log_a(x) = \ln(x)/\ln(a).$$

115–118) Man zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ und bestimme alle Stellen, an denen $f(x)$ stetig ist. ($\operatorname{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$ und $\operatorname{sgn}(0) = 0$.)

115) $f(x) = (x - \pi/2)\operatorname{sgn}(\cos x)$

116) $f(x) = (x^2 - 1)\operatorname{sgn}(\sin(\pi x))$

117) $f(x) = x\operatorname{sgn}(\sin x)$

118) $f(x) = x\sin\left(\frac{\pi}{3}\operatorname{sgn}(x)\right)$

119) Man skizziere den Verlauf der Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ und beweise, dass $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ keinen Grenzwert besitzt, indem man die beiden Folgen $x_n = 1/(n\pi)$ und $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ betrachtet.

120–124) Man zeige, dass die folgenden Funktionen stetige Umkehrfunktionen haben und bestimme diese:

120) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^3}$, $\quad D_f = (1,\infty)$

121) $g(x) = (1+\sqrt{x})^7$, $\quad D_g = (0,\infty)$

122) $f(x) = \dfrac{1-x^7}{x^7}$, $\quad D_f = (1,\infty)$

123) $g(x) = (1+\sqrt{x})^5$, $\quad D_g = (0,\infty)$

124) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\quad D_f = \mathbb{R}$

125) Man zeige mit Hilfe des Nullstellensatzes, dass die Funktion $y = e^{x/2} - 4x + 1$ im Intervall $[0,1]$ sowie im Intervall $[6,7]$ je eine Nullstelle besitzt. Wie können diese Nullstellen näherungsweise berechnet werden?

126) Man skizziere die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad f_3(x) = \cos^2 x, \quad f_4(x) = |\cos x|, \quad f_5(x) = \sqrt{|\cos x|}$$

im Intervall $[0,\pi]$ und untersuche alle Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

127) Sei $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(0) = 0$, $f(a) > a$ und $f(x) \neq x$ für $0 < x < a$. Man zeige, dass dann auch $f(x) > x$ für $0 < x < a$ gilt.

128) Man zeige, dass es zu jeder stetigen Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ wenigstens ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

129–134) Man untersuche, wo die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist und bestimme dort $f'(x)$:

129) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-5x+2}}$

130) $f(x) = \arcsin\left(\sqrt[3]{x^2-2}\right)$

131) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-6x+3}}$

132) $f(x) = \arccos\left(\sqrt[4]{x^2-2}\right)$

133) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}}$

134) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

135) Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass für $f(x) = x^n$ gilt: $f'(x) = nx^{n-1}$. Bestimmen Sie ohne Zuhilfenahme dieses Resultats und ohne Verwendung der Exponentialfunktion die Ableitung der Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x^n$.

136) Untersuchen Sie, wo die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung. Ist die Funktion stetig differenzierbar?

137) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x|x|$. Berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

138) Sei $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Menge aller differenzierbaren Funktionen. Beweisen Sie, dass die Abbildung $D : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \mapsto f'$ linear ist.

139) Die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von f^{-1}. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Resultats die Ableitung von $\arcsin(x)$, wobei der Definitions- und Bildbereich der Sinusfunktion geeignet eingeschränkt werden muss.

140) Beweisen Sie die Quotientenregel für den Quotient von zwei differenzierbaren Funktionen.

141–142) Man zeige mittels Differenzieren:

141)

$$\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\arcsin x = \frac{\pi}{4}, \qquad x \in (-1,1)$$

142)

$$\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad x \in (-1,1)$$

143) Zeigen Sie: Sind $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ differenzierbar und $g_j(x) \neq 0$ für alle j, so gilt

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^m g_j(x)\right)'}{\prod_{j=1}^m g_j(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{g_j'(x)}{g_j(x)}.$$

144) Man zeige, dass die Funktion $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ für $x \geq 0$ streng monoton wachsend und für $x \leq 0$ streng monoton fallend ist und bestimme jeweils die Umkehrfunktion.

145) Wie ist t zu wählen, damit die Funktion $f(x) = (x^2+t)/(x-t)$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend ist? Machen Sie eine Skizze.

146) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ im Intervall $I = [-\pi, \pi]$.

147) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ im Intervall $I = [0, 2\pi]$.

148) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \cos x$ im Intervall $I = [0, 2\pi]$.

149) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x + \cos x$ im Intervall $I = [-\pi, \pi]$.

150) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x + (\sin x)^2$ (d. h. man bestimme Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Symmetrieeigenschaften, Periodizität, ...) und skizziere den Funktionsgraphen.

151) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \cos x + (\cos x)^2$ (d. h. man bestimme Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Symmetrieeigenschaften, Periodizität, ...) und skizziere den Funktionsgraphen.

152) Man diskutiere die Funktion $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ (d. h. man bestimme Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Grenzwerte, Symmetrieeigenschaften, ...) und skizziere den Funktionsgraphen.

153) Man diskutiere die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ (d. h. man bestimme Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Grenzwerte, Symmetrieeigenschaften, ...) und skizziere den Funktionsgraphen.

154) Man diskutiere die Funktion definiert durch $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und f(0) = 0 (d. h. man bestimme Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Grenzwerte, Symmetrieeigenschaften, ...) und skizziere den Funktionsgraphen.

155) Man diskutiere die Funktion $f(x) = xe^{-x^2}$ (d. h. man bestimme Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Grenzwerte, Symmetrieeigenschaften, ...) und skizziere den Funktionsgraphen.

156) Man diskutiere die Funktion $f(x) = e^{-1/x}$ (d. h. man bestimme Definitionsmenge, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Grenzwerte, Symmetrieeigenschaften, ...) und skizziere den Funktionsgraphen.

157) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend und differenzierbar. Man zeige, dass dann $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

158) Folgt in Bsp. 157) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

159) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Man zeige, dass dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

160) Folgt in Bsp. 159) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

161) Für die Funktion $f(x) = x^2$ und $a < b$ berechne man eine Stelle c im Intervall $[a, b]$, für die gilt $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$ (siehe Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Man interpretiere das erhaltene Ergebnis an Hand des Funktionsgraphen.

162) Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = (x+1)/(x-1)$. Können Sie allgemein einen Ausdruck für die n-te Ableitung angeben?

163) Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = e^x \sin x$. Können Sie allgemein einen Ausdruck für die n-te Ableitung angeben (Fallunterscheidung nach Restklasse von n mod 4)?

164) Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = e^{-x}\cos x$. Können Sie allgemein einen Ausdruck für die n-te Ableitung angeben (Fallunterscheidung nach Restklasse von n mod 4)?

165) Man leite die unendlichen Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch Entwicklung der beiden Funktionen in eine Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ her.

166) Mit Hilfe der Taylorentwicklung approximiere man die Funktion $f(x) = 8(x+1)^{3/2}$ durch eine lineare bzw. eine quadratische Polynomfunktion im Punkt $x_0 = 0$. Wie groß ist der Fehler an der Stelle $x = 0{,}5$? (Hinweis: Den Approximationsfehler stelle man durch das Restglied in Lagrangescher Form dar und schätze diesen Fehler (durch geeignete Wahl der unbekannten Zwischenstelle) nach oben ab.)

167) Wie 166), nur Fehler an der Stelle $x = 0{,}3$ betrachten.

168) Wie 166), nur Fehler an der Stelle $x = -0{,}5$ betrachten.

169) Sei $T_n(x)$ das n-te Taylorpolynom der Funktion $f(x) = e^x$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Durch Untersuchung des Restglieds $R_n(x)$ in Lagrangescher Form bei dieser Taylorentwicklung gebe man an, wie groß n sein muss, damit an der Stelle $x = 0{,}1$ der Unterschied zwischen $T_n(x)$ und e^x kleiner als 10^{-9} ist.

170) Wie voriges Beispiel mit Unterschied zwischen $T_n(x)$ und e^x kleiner als 10^{-10}.

171) Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ und $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(a) Stellen Sie f, g und h als Potenzreihen mit Anschlussstelle $x_0 = 0$ dar und geben Sie deren Konvergenzradius an.

(b) Berechnen Sie das Cauchyprodukt der Reihen von f und g.

172) Man bilde das Cauchyprodukt der Potenzreihen von $\sin x$ und $\cos x$ (jeweils mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$) und zeige damit die Formel $\sin x \cos x = (\sin(2x))/2$.

173–177) Die hyperbolischen Winkelfunktionen Sinus hyperbolicus und und Cosinus hyperbolicus sind definiert durch:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

173) (a) Man zeige $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ und begründe mit Hilfe dieser Formel die Bezeichnung „hyperbolische Winkelfunktionen". (Hinweis: Wie lautet die Gleichung einer Hyperbel in Hauptlage?)
(b) Man bestimme die erste Ableitung von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$.

174) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

175) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\sinh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

176) Man beweise die Formel $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

177) Man beweise die Formel $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

178) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\arcsin(x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

179) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\arccos(x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

180) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\arctan(x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

181) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

182) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1 - x^2)\cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

183) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1 + 3x - 3x^2)\cos x$ an der Stelle $x_0 = 1$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

184) Wie 174), nur für $x_0 = 1$.

185) Wie 175), nur für $x_0 = 2$.

186) Wie 181), nur für $x_0 = 3$.

187) Wie 182), nur für $x_0 = -1$.

188) Wie 183), nur für $x_0 = -3$.

189) Wie 181), nur für $x_0 = -3$.

190) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = (x - 1)^2 \cos x$ an der Anschlussstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie weiters das zugehörige Taylorpolynom zweiter Ordnung samt Restglied und eine Abschätzung für das Restglied im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

191) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ an der Anschlussstelle $x_0 = 7$. Bestimmen Sie weiters das zugehörige Taylorpolynom zweiter Ordnung samt Restglied und eine Abschätzung für das Restglied im Intervall $[4, 10]$.

192) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = e^{2x}$ an der Anschlussstelle $x_0 = 3$. Bestimmen Sie weiters das zugehörige Taylorpolynom zweiter Ordnung samt Restglied und eine Abschätzung für das Restglied im Intervall $[-1, 7]$.

193) Die Produktionskosten einer Ware betragen $10000 + 260x - x^2$ zur Herstellung von x Einheiten, wobei $0 \leq x \leq 100$.

Bestimmen Sie die lineare Näherung der Kostenfunktion in der Nähe von $x_0 = 60$ (Angabe der Gleichung!) und berechnen Sie damit näherungsweise die zusätzlichen Kosten, die bei Produktion einer weiteren Einheit anfallen. Vergleichen Sie diese Näherung mit den tatsächlichen Mehrkosten.

Ermitteln Sie weiters die mittleren Stückkosten, die bei der Produktion von x Einheiten anfallen.

194) Ein Monopolist produziert eine Ware, wobei die Kosten in Abhängigkeit von der Stückzahl durch die Funktion $K(x) = 5000 + 100x + x^2$ beschrieben werden, der Umsatz

durch $U(x) = 1000x - 2x^2$. Der Staat hebe eine Steuer $S(x) = 100x$ auf die Absatzmenge ein.

Maximieren Sie den Unternehmensgewinn. Berechnen Sie die Steuereinnahmen für den Staat bei gewinnmaximaler Absatzmenge.

Ermitteln Sie weiters jenen Steuersatz r (also $S(x) = rx$), der dem Staat die maximalen Steuereinnahmen bringt, falls das Unternehmen wieder die gewinnmaximale Menge absetzt.

195) Ein Kapital $K = K(0)$ werde zum Zeitpunkt $t = 0$ Jahre mit kontinuierlicher Verzinsung mit Rate r angelegt, d.h. nach einem Jahr beträgt der Wert $K(1) = K(0)r$.

Bestimmen Sie den Wert des Kapitals nach t Jahren ($t \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass die Wachstumsrate des Kapitals proportional zu seinem Betrag ist und bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor.

Nähern Sie das Kapital in der Nähe des Zeitpunkts t_0 durch eine Gerade an und bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden.

196–206) Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

196)

(a) $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{17x^2 + 4x - 1}{x^3 - 12x^2 + 1}$

197)

(a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to1+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln(x)}$

198)

(a) $\lim\limits_{x\to1-} \sin(x) \cdot \ln(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4}{e^{4x}}$

199)

(a) $\lim\limits_{x\to1/2} (1 - 2x)\tan(\pi x)$

(b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sin(1 - x^2)}{(x - 1)(\cos(x - 1) - 1)}$

200)

(a) $\lim\limits_{x\to1-} \ln(1 - x) \cdot \ln(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

201)

(a) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2 + 4x - 5}{\tan(\pi x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

202) $\lim\limits_{x\to1/2} (1 - 2x)\tan(\pi x)$

203) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(x^2)}{x \sin x}$

204) $\lim\limits_{x\to1-} \left(\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{1 - x}\right)$

205) $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

206) $\lim\limits_{x\to0+} x^x$

207) Für die Funktion $f(t) = \begin{cases} -1 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$ berechnen Sie $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ist $F(x)$ stetig bzw. differenzierbar?

208) Wie 207) für $f(t) = \begin{cases} -2 & (t \le 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$. **209)** Wie 207) für $f(t) = \begin{cases} -1 & (t \le 1) \\ t & (t > 1) \end{cases}$.

210) Wie 207) für $f(t) = \begin{cases} -t^2 & (t \le 2) \\ t^2 & (t > 2) \end{cases}$. **211)** Wie 207) für $f(t) = \begin{cases} -t^3+1 & (t \le 3) \\ t^3-1 & (t > 3) \end{cases}$.

212) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $C \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann die folgenden Behauptungen gelten:

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{und} \quad \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

213) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $y \in [a,b]$. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^y f(x)\,dx + \int_y^b f(x)\,dx.$$

Beweisen Sie weiters die folgende Aussage:

$$\forall x \in [a,b]: \ f(x) \le g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

214) Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gelte für alle $x \in [a,b]$ die Ungleichung $f(x) \le g(x)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Zeigen Sie weiters die Ungleichungen

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a) \sup_{a\le x\le b} f(x)$$

215–217) Hinweise: (i) Äquidistante Teilung des Intervalls $[a,b]$ bedeutet, dass man die Teilungspunkte $x_k = a+(b-a)k/n$, $k = 0,1,\ldots,n$, betrachtet. (ii) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (iii) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$; (iv) $\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2$.

215) Berechnen Sie $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe von Obersummen bei äquidistanter Teilung.

216) Berechnen Sie $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung.

217) Berechnen Sie $\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung.

218) Sei $a \ge 0$. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \sum_{k=1}^n k^a$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

219) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k(n-k)$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

220) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2-k^2}$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

221) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

222) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

Hinweis: Man substitutiere im auftretenden Integral $x = \frac{1+t}{2}$.

223) Mit Hilfe der Substitutionsregel beweise man die Integrationsregel

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C \qquad \text{und berechne damit} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}.$$

224) Wie 223), nur letzter Teil ersetzt durch „und berechne damit $\int \cot(x)\,\mathrm{d}x$.“ ($\cot(x) := \cos(x)/\sin(x)$ bezeichnet den Cotangens).

225) Man berechne $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

(Anleitung: Zum Integrieren wähle man die Substitution $u = \sqrt{x-1}$. Ferner beachte man, dass das angegebene Integral sowohl bei $x = 1$ als auch bei $x = \infty$ uneigentlich ist.)

226) Sei $I_n(x) := \int (1+x^2)^{-n}\,\mathrm{d}x$ $(n = 1,2,3,\ldots)$. Durch partielle Integration zeige man die Rekursion

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n(x) + \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

Mit Hilfe dieser Formel berechne man $I_3(x)$ (beachte $I_1(x) = \arctan(x) + C$).

227) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Beweisen Sie, dass dann auch g integrierbar ist, wobei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$.

228) Sei $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Beweisen Sie mit Hilfe von Ober- bzw. Untersummen, dass die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\int_1^n \frac{dx}{x} \ge H_n - 1 \quad \text{und} \quad \int_1^n \frac{dx}{x} \le H_{n-1}.$$

Folgern Sie daraus, dass $a_n := H_n - \ln n$ für alle $n \ge 1$ im Einheitsintervall $[0,1]$ liegt und zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\ge1}$ eine monoton fallende Folge ist.

229–268) Man berechne:

229) $\int x\arcsin x \,\mathrm{d}x$

230) $\int \frac{4x^3+x^2+3x+5}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}\,\mathrm{d}x$

231) $\int \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

232) $\int \frac{x^3+x^2+7}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$

233) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

234) $\int \frac{x^3-x^2+2}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$

235) $\int \frac{x^6-6x+\sqrt{12x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

236) $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

237) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+9}$

238) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 x\cos^2 x}$

239) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-6}\,\mathrm{d}x$

240) $\int \arccos x\,\mathrm{d}x$

241) $\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$

242) $\int \frac{(x-3)^2}{x^{-7/2}}\,\mathrm{d}x$

243) $\int x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

244) $\int (\sin x)(1+2\cos x)^4\,\mathrm{d}x$

245) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$

246) $\int (x^2+1)e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

247) $\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$

248) $\int \frac{x^2+3}{2x^2+7}\,\mathrm{d}x$

249) $\int \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$

250) $\int \sqrt{1+7x^2}\,\mathrm{d}x$

251) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$

252) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

253) $\int_1^2 \left(\sqrt[4]{x(\sqrt[3]{x\sqrt{x}})}\right)^5\,\mathrm{d}x$

254) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin^2 x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x$

255) $\int_0^1 x\arccos x\,\mathrm{d}x$

256) $\int_0^{\pi/2} x^2\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

257) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

258) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

259) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

260) $\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$

261) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

262) $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$

263) $\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

264) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

265) $\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

266) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

267) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$

268) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$

269–278) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

269) $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

270) $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^2}\,\mathrm{d}x$

271) $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\,\mathrm{d}x$

272) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

273) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

274) $\int_0^\infty \frac{x}{e^{x^3}}\,\mathrm{d}x$

275) $\int_0^\infty \frac{x+3}{2x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

276) $\int_0^\infty \frac{x^x}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x$

277) $\int_0^\infty \frac{2x-1}{3x^3+2x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x$

278) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

Hinweis: Einmal partiell integrieren und erst danach die Konvergenzuntersuchung vornehmen.

279–282) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale näherungsweise auf 3 Dezimalstellen (mit und ohne Computer).

Hinweis: Entwickeln Sie den Integranden in eine Taylorreihe. Wieviele Terme sind nötig, um die gewünschte Genauigkeit zu erzielen?

279) $\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^4}\,\mathrm{d}x$

280) $\int_0^1 \frac{\sin(u^2)}{u}\,\mathrm{d}u$

281) $\int_0^1 \frac{\cos(t^2)-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

282) $\int_0^{1/2} \ln\frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

283–294) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, ob die folgenden Reihen konvergieren:

283) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ln^2 n-\ln n-6)}$

284) $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

285) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^\alpha n}$ $\quad(\alpha>0)$

286) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+n^2)\arctan n}$

287) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n\ln^\alpha(\ln n)}$ $\quad(\alpha>0)$

288) $\sum_{n\geq 10} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)\ln^5(\ln(\ln n))}$

289) $\sum_{n\geq 0} ne^{-n}$

290) $\sum_{n\geq 0} ne^{-n^2}$

291) $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln^3(\ln n)}{n\ln n}$

292) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{\sqrt{(1+n^2)^3}}$

293) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

294) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\sqrt{1+n^2}}$

295) Man zeige, dass die Ungleichung $|d(x,y)-d(y,z)|\leq d(x,z)$ in jedem metrischen Raum (X,d) für alle $x,y,z\in X$ gilt.

296) Für jede der Metriken $d = d_1$ (Summen-Metrik), $d = d_2$ (Euklidische Metrik), $d = d_\infty$ (Maximums-Metrik) und $d = d_H$ (Hamming-Metrik) auf $\mathbb{R}^2$ beschreibe man die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{K}_d(\vec{0}, 1) = \{\vec{x} \mid d(\vec{0}, \vec{x}) \leq 1\}$ geometrisch (inkl. Skizze).

297) Wie 296), aber für $\mathbb{R}^3$.

298) (X, d) sei ein beliebiger metrischer Raum und $p \in X$. Man zeige, dass durch

$$d_p(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ d(x,p) + d(p,y), & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert wird.

299) Man zeige, dass die Hamming-Metrik auf $\mathbb{R}^n$ nicht durch eine Norm induziert wird.

300) Für fest gewählte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, bezeichne $C[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass die durch $||f|| := \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ definierte Funktion $|| \cdot ||$ eine Norm auf $C[a, b]$ ist.

301) Für fest gewählte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, bezeichne $I[a, b]$ die Menge aller integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Man überprüfe, ob die durch $||f|| := \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ definierte Funktion $|| \cdot ||$ eine Norm auf $I[a, b]$ ist.

302) Man betrachte den metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$, wobei d die euklidische Metrik ist. Man zeige, dass in diesem Raum die Menge $\mathbb{Q}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

303) Man bestimme alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen in $(\mathbb{R}, d_H)$, wobei d_H die Hamming-Metrik ist.

304) Man zeige, dass eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Metrik d_2 offen ist genau dann, wenn O offen ist bzgl. der Summen-Metrik d_1.

305) Man zeige, dass eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Metrik d_2 offen ist genau dann, wenn O offen ist bzgl. der Maximums-Metrik d_∞.

306) Man zeige, dass eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Metrik d_2 abgeschlossen ist genau dann, wenn A abgeschlossen ist bzgl. der Summen-Metrik d_1.

307) Man zeige, dass eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Metrik d_2 abgeschlossen ist genau dann, wenn A abgeschlossen ist bzgl. der Maximums-Metrik d_∞.

308–310) Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

308)

$$(a) \quad z = x^2 - y^2, \qquad (b) \quad z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}.$$

309)

$$(a) \quad z = xy, \qquad (b) \quad z = \frac{x}{y}.$$

310)

$$(a) \quad z = x^2 y, \qquad (b) \quad z = \frac{x}{y^2}.$$

311) Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x, y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

312) Wie Bsp 311 mit der Funktion $f(x, y) = x^2 y + 2x - y$.

313) Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **homogen** vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f, für die $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ auch im Definitionsbereich von f liegt, gilt:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n).$$

Man beweise, dass die beiden Produktionsfunktionen $f(x, y) = cx^\alpha y^{1-\alpha}$ und $g(x, y) = (cx^\alpha + dy^\alpha)^{1/\alpha}$ (x Arbeit, y Kapital, c, d, α konstant) homogene Funktionen vom Homogenitätsgrad $r = 1$ sind.

314) Man prüfe nach, ob die Funktionen

$$(a) \quad f(x, y, z) = x + (yz)^{1/2} \ \ (\text{für } y, z \geq 0) \qquad (b) \quad f(x, y) = x^2 + y$$
$$(c) \quad f(x, y) = ax^b y^c \ \ (\text{mit } a, b, c \in \mathbb{R},\ x, y > 0)$$

homogen sind.

315–316) Man untersuche für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{t \to 0} f(\alpha t, \beta t)$. Ist die Funktion $f(x, y)$ an $(0, 0)$ stetig?

315)

$$f(x, y) = \frac{|y|}{|x|^3 + |y|} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \text{ und } \quad f(0, 0) = 1$$

316)

$$f(x, y) = \frac{2y^2}{|x| + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \text{ und } \quad f(0, 0) = 0$$

317) Sei

$$f(x, y) = \frac{x \cos \frac{1}{x} + y \sin y}{2x - y}$$

für $0 \neq 2x \neq y$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$?

318) Sei

$$f(x, y) = \frac{x + y \cos \frac{1}{y}}{x + y}$$

für $0 \neq y \neq -x$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$?

319) Sei
$$f(x,y)=x^{1/y}$$
für $y>0$ und $x\geq 0$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$
Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$?

320) In welchen Punkten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist die Funktion
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
stetig?

321–322) Man untersuche die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ auf Stetigkeit (Hinweis: Für alle $a,b\geq 0$ gilt die Ungleichung $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.):

321)
$$f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|} \quad \text{für } (x,y)\neq(0,0) \text{ und } \quad f(0,0)=0.$$

322)
$$f(x,y)=\frac{xy^2+x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{für } (x,y)\neq(0,0) \text{ und } \quad f(0,0)=0.$$

323) Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z)=\frac{1-\cos(xy)}{xyz}+\frac{\sin z}{1+x^2+y^2}$. In welchen Punkten des Definitionsbereiches ist f stetig?

324) Zeigen Sie: Die Komposition stetiger Funktionen $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $g:M\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ mit $f(I)\subseteq M$ is wiederum stetig.

325) Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$.
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

326) Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$.
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

327)

(a) Für die Funktion $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0,y_0)=(0.2,0.3)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y)=x^2\sin y+\cos(x+2y)$.

328) Man prüfe nach, ob die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} für die folgenden Funktionen $f(x,y)$ übereinstimmen:
$$(a)\quad f(x,y)=\frac{x^2}{1+y^2}, \qquad (b)\quad f(x,y)=x^3e^{y^2}, \qquad (c)\quad f(x,y)=\sqrt{xy^3}.$$

329–330) Man bestimme den Definitionsbereich der Vektorfunktion $\mathbf{x}(t)$, sowie die Ableitung $\mathbf{x}'(t)$, wo sie existiert:

329)
$$\mathbf{x}(t)=\left(\left(\frac{2t}{\sqrt{1-3t^2}}\right)^{\frac{5}{4}}, \sin\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right)$$

330)
$$\mathbf{x}(t)=\left(\sin(1+\cos(t)), \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

331) Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist durch
$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{p}=(p,0,0)$ gilt:
$$\varphi_2(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$
(Dabei sind Q, p und ϵ_0 Konstante.) In beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}$ nach der Formel $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi$.

332–335) Man bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

332) $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{4x^2y^2}{1+x+y}\right)$ **333)** $f(x,y,z)=\dfrac{y+\sqrt{xz}}{1+\sin^2(xyz)}$

334) $f(x,y)=\arctan\left(\dfrac{2x^3y}{y-x^3}\right)$ **335)** $f(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x}+y^3z^2}{1+\cos^2(1+x)}$

336–339) Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$:

336) $\mathbf{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(x+y-z)\\ \cos\left(\frac{xy}{z}\right)\end{pmatrix}$ **337)** $\mathbf{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{y^2z}\\ x^yz^2\end{pmatrix}$

338) $\mathbf{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{x-z}{y+1}}\\ z\cdot e^{-\frac{x}{y}}\end{pmatrix}$ **339)** $\mathbf{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln(\arctan(x+y^2))\\ x\cos(y^2-\sqrt{x})\cdot\tan(xyz)\end{pmatrix}$

340) Duch $z=\frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x=e^t$ und $y=e^{-t}$ $(t\in\mathbb{R})$ liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst x und y in z einsetzt und anschließend nach dem Parameter t differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

341) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = \frac{1+\tan(u)^2}{v+\tan(u)}$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = (v+\tan(u))^{-1}$. Man bestimme mit Hilfe der Kettenregel $h(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(2t, t^2+1)$.

342) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = (1-2u^2)e^{-u^2+v^3}$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = 3uv^2 e^{-u^2+v^3}$. Man bestimme mit Hilfe der Kettenregel $h(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t^2-1, 3t)$.

343) Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$ nach y an der Stelle $(0,0)$, wobei $f(u,v) = u^2+v^2$, $g(x,y) = \cos x + \sin y$ und $h(x,y) = x+y+1$ ist.

344) Es sei $F(x,y) = \frac{2x^4+y}{y^5-2x}$, $x = 2u-3v+1$, $y = u+2v-2$. Man berechne $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ für $u=2$, $v=1$ mit Hilfe der Kettenregel.

345) Man bestimme die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ in Richtung $\binom{-1}{1}$ im Punkt $(3,2)$ mit

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{1+y^2}$, (b) $f(x,y) = x^3 e^{y^2}$, (c) $f(x,y) = \sqrt{xy^3}$.

346) Man berechne die Ableitung von $f(x,y) = x^2+4y^2$ im Punkt $P_0(3,2)$

(a) in Richtung der Koordinatenachsen,

(b) in Richtung von $(-1,-1)$, sowie

(c) in Richtung von grad$f$.

347) In welcher Richtung erfolgt die maximale Änderung von

$$f(x,y,z) = x^2\sin(yz) - y^2\cos(yz)$$

vom Punkt $P_0(4, \frac{\pi}{4}, 2)$ aus und wie groß ist sie annähernd?

348) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y-1 = (x-1)^2 > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist an der Stelle $(1,1)$ unstetig, aber an dieser Stelle existieren alle Richtungsableitungen und sind identisch 0.

349) Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation der Funktion

$$f(x,y) = x^2(y-1) + xe^{y^2}$$

im Entwicklungspunkt $(1,0)$.

350) Für die Funktion $f(x,y) = xye^{x+y}$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0,y_0) = (1,1)$.

351) Für die Funktion $f(x,y) = x\ln(1+xy)$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0,y_0) = (1,0)$.

352) Für die Funktion $f(x,y) = e^{x-y}(x+1) + x\sin(x^2-y)$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0,y_0) = (0,\frac{\pi}{2})$.

353) Für die Funktion $f(x,y,z) = e^{x^2+yz}(x+yz+1)$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,\frac{\pi}{2})$.

354) Für die Funktion $f(x,y,z) = x^3\cos(x^2-\arctan(y-z))$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,\frac{\pi}{2})$.

355) Für die Funktion $f(x,y,z) = x\cos(x-y-z))$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,2)$.

356) Man bestimme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ für folgende Kurven durch implizites Differenzieren:

(a) $x^{2/3}+y^{2/3} = 1$, für $x_0 = 0.5$, (b) $x^3+y^3-2xy = 0$, für $x_0 = 1$.

357) Es sei $F(x,y) = e^x\sin y + e^y\sin x - 1 = 0$. Man berechne $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ im Punkt $(\pi/2, 0)$.

358) Es sei $F(x,y) = x^3-3xy+y^3-1 = 0$. Man berechne y' und y'' im Punkt $(1,-\sqrt{3})$.

359) Man berechne y' und y'' im Punkt $(1,1)$ der Kurve $x^3+3x^2y-6xy^2+2y^3 = 0$.

360) Es sei $F(x,y,z) = x^2(2x+3z)+y^2(3x-4z)+z^2(x-2y)-xyz = 0$. Man berechne z_x und z_y.

361) In welchen Punkten der Kurve $x^2+4xy+16y^2 = 27$ sind die Tangenten horizontal, in welchen vertikal?

362) Bestimmen Sie alle Tangenten mit Anstieg ± 1 an die Kurve $2x^2-4xy+9y^2 = 36$.

363) Man ermittle die Gleichungen einer Tangente aus dem Punkt $(0,0)$ an die durch $y^3 = x^3-2x+2$ bestimmte Kurve.

364) Gegeben sei die quadratische Form $q(\mathbf{x}) = q(x,y) = 4x^2+2bxy+25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, sodass $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$? Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

365) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $3x^2+axy+2xz+2y^2+2yz+2z^2$ positiv definit ist.

366) Wie 365) für $x^2+axy+3xz+y^2-2yz+4z^2$.

367) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $-2x^2-2xy+8xz-2y^2+2ayz-10z^2$ negativ definit ist.

368) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $-2x^2-2xy+8xz-2y^2+2ayz-10z^2$ negativ definit ist.

369–374) Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrizen:

369) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

370) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

371) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & -7 & -20 \end{pmatrix}$

372) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

373) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

374) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Setzen Sie den Vektor $(1,0,0)$ und den Vektor $(0,0,1)$ in die der Matrix entsprechenden quadratischen Form ein.

375–379) Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

375) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

376) $f(x,y) = 2x^3 - 5xy^2 + 3y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

377) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

378) $f(x,y) = (x^2+5y^2)e^{-x^2-y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

379) $f(x,y) = (x^2+3y^2)e^{-x^2-2y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

380–385) Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

380) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

381) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi$.

382) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x - \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

383) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x - \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi$.

384) $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

385) $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi$.

386) Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = 4(x-2)(y^2+10y)+3x^3$.

387) Man bestimme die Extrema von $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$.

388) Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(3-x-y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) | x \ge 0, y \ge 0, y \le 3-x\}$.
(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich D in der (x,y)-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima im Inneren von D sowie unter den Funktionswerten am Rand von D zu suchen.)

389) Durch Einsetzen bestätige man, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 6y = 12 \ln x$$

durch

$$y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 2/3$, $y'(1) = -1$?

390) Man betrachte die Eulersche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$

Zeigen Sie, dass $C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{\ln x}{x}$ die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 3$, $y'(1) = -2$?

391) Man ermittle das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ und überlege, ob es durch jeden Punkt der (x,y)-Ebene genau eine Lösung der Gleichung gibt.

392) Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = axy$ mit a reell. Skizzieren Sie das Richtungsfeld und die Isoklinen für $a = -2$, $a = -1$ und $a = 1$.

393) Skizzieren Sie mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{xy}{x^2+1}$$

und finden Sie die allgemeine Lösung.

394) Skizzieren Sie mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x-y}$.

395) Man löse die homogene lineare Differentialgleichung $y' - y \tan x = 0$.

396) Man löse die inhomogene lineare Differentialgleichung $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

397) Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

398–403) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

398) $y' = y \sin x$

399) $y - xy' + 1 = 0$

400) $y' + \frac{1}{1-x} y = x^2,\ y(0) = 1$

401) $y' + \frac{1}{1+2x} y = 2x - 3,\ y(0) = 2$

402) $y' = \sin^2 x \cos^2 y$

403) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$

404) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 8y' - 20y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 8y' + 16y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 8y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

405) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 6y' - 27y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 6y' + 9y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 6y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

406) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 12y' + 36y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 12y' + 60y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 12y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

407) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
(a)\quad & y'' - 10y' + 100y = 0, \\
(b)\quad & y'' + 10y' + 16y = 0, \\
(c)\quad & y'' - 10y' + 25y = 0.
\end{aligned}$$

408) Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = 0$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

409) Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - y' - 2y = x$.

410–434) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

410) $xy' - y = x^3 + 3x^2 - 2x$

411) $y' + \frac{y}{x} - e^x = 0$

412) $y' + 2(\cot x)y + \sin 2x = 0$

413) $y' + y \cot x = 5e^{\cos x}$ (für $x = \pi/2$ sei $y = -4$)

414) $(1 + e^x)y' = -e^{x+y}$

415) $xy' = y + x^2 \cos x$

416) $y'' - y = 4e^x$

417) $y'' + 7y' + 6y = \cosh(x)$

418) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

419) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$

420) $y'' - 2y' = e^x \sin x$

421) $y'' + y = \cos x$

422) $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}$

423) $y'' + 3y' + y = x3^x$

424) $y'' - y' + y = x$

425) $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}$

426) $y' + 2xy = 2xy^3$

427) $y' = (1 - 2x)y + (1 + x^2)$

428) $y' = y + xy + 1$

429) $y''' + y'' = 6x^2 + 4$

430) $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Ansatz: $y = x^r$.

431) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$. Ansatz: $y(x) = x^r$.

432) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$. Ansatz: $y = x^r$.

433) $x^2y'' - xy' - 3y = x$. Ansatz für $y_h(x)$: $y = x^r$. Zur Bestimmung von $y_p(x)$ versuchen Sie die Standardansätze.

434) $x^2y'' + xy' - 3y = 5x^2$. Ansatz für $y_h(x)$: $y = x^r$. Zur Bestimmung von $y_p(x)$ versuchen Sie die Standardansätze.

435) Bestimmen Sie eine Abschätzung für den Verfahrensfehler, wenn man zur numerischen Berechnung der Ableitung deren Definition als Limes des Differenzenquotienten verwendet und infolgedessen den Differenzenquotienten zur Approximation der Ableitung heranzieht.