

Analysis auf Mannigfaltigkeiten

WS 2018/19

Franz Schuster

franz.schuster@tuwien.ac.at

Einleitung

Diese Vorlesung soll als eine Einführung in die Theorie glatter Mannigfaltigkeiten dienen. Mannigfaltigkeiten stellen eine Verallgemeinerung von Kurven und Flächen dar. Etwas genauer, handelt es sich dabei um topologische Räume, die lokal wie ein Euklidischer Raum aussehen und auf denen man Differential- und Integralrechnung betreiben kann. Die Theorie der glatten Mannigfaltigkeiten ist in fast allen Teilgebieten sowohl der reinen als auch der angewandten Mathematik präsent und, insbesondere, unverzichtbar in der modernen Differentialgeometrie sowie der Lie Gruppen Theorie.

Der Preis für die große Kraft und vielseitige Einsetzbarkeit der Theorie glatter Mannigfaltigkeiten ist die Notwendigkeit sehr abstrakte Strukturen aufzubauen. Eine glatte Mannigfaltigkeiten kann man sich als eine Menge vorstellen, die zwei Schichten an Struktur trägt: Einerseits die Struktur eines topologischen Raumes und andererseits eine „glatte“ Struktur, die es uns erlaubt Werkzeuge der Analysis einzusetzen. Als Voraussetzung für diese Vorlesung gilt daher ein gutes Verständnis der linearen Algebra und Analysis; eine Vertrautheit mit Begriffen aus der Topologie ist ebenfalls von Vorteil.

Im ersten Teil der Vorlesung, bestehend aus Kapiteln 1 bis 3, beginnen wir mit den grundlegenden Konzepten, wie dem Begriff der glatten Mannigfaltigkeit, glatten Abbildungen und Tangentialräumen. Im zweiten Teil verwenden wir den Hauptsatz über implizite Funktionen bzw. den Satz über die Umkehrabbildung um Submersionen, Immersionen, Einbettungen und Untermannigfaltigkeiten zu studieren. Dieser zweite Teil besteht aus den Kapiteln 4 und 5. In den Kapiteln 6 bis 8 beschäftigen wir uns dann mit Vektorfeldern, Integralkurven, Flüssen und dem Kotangentialbündel. Im abschließenden Teil der Vorlesung, Kapitel 9 bis 12, entwickeln wir die Theorie der Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten und beweisen den Hauptsatz der Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten, den Satz von Stokes.

Die Literatur zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten bzw. der Theorie glatter Mannigfaltigkeiten ist äußerst umfangreich. Insbesondere gibt es eine Reihe sehr guter Bücher zu diesem Themenkreis (siehe etwa die Liste auf der nächsten Seite), welche aber häufig deutlich über den Stoffumfang dieser kurzen Vorlesung hinausgehen. Ein besonders empfehlenswertes Buch (da sich die Vorlesung stark daran anlehnen wird), ist „Introduction to smooth manifolds“ von J.M. Lee.

Inhaltsverzeichnis

1	Glatte Mannigfaltigkeiten	3
2	Glatte Abbildungen	16
3	Tangentialvektoren	25
4	Submersionen, Immersionen, Einbettungen	37
5	Untermannigfaltigkeiten	49
6	Vektorfelder	62
7	Kotangentialbündel	69
8	Integralkurven und Flüsse	85
9	Tensoren und Differentialformen	101
10	Orientierungen	126
11	Integration auf Mannigfaltigkeiten	135

Literatur

- [1] K. Jänich, *Vektoranalysis*, Springer, 2005.
- [2] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics 191, Springer, 1999.
- [3] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds. Second edition*, Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, 2013.
- [4] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*, Translations of Mathematical Monographs 201, American Mathematical Society, 2001.
- [5] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer, 1983.

1 Glatte Mannigfaltigkeiten

In diesem ersten Abschnitt sammeln wir die wichtigsten Definitionen, grundlegende Eigenschaften sowie eine Reihe konkreter Beispiele von topologischen bzw. glatten Mannigfaltigkeiten.

Definition. Eine *topologische Mannigfaltigkeit* der Dimension n ist ein topologischer Raum M mit folgenden Eigenschaften:

- M ist ein Hausdorff Raum
Für alle paarweise verschiedenen Punkte $p, q \in M$ existieren disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq M$ mit $p \in U$ und $q \in V$.
- M erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom
Die Topologie von M besitzt eine abzählbare Basis.
- M ist lokal Euklidisch zur Dimension n
Jeder Punkt in M besitzt eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Das triviale Beispiel einer topologischen Mannigfaltigkeit ist die leere Menge. Ein ebenfalls einfaches aber weit wichtigeres Beispiel ist der \mathbb{R}^n selbst: Der euklidische Raum \mathbb{R}^n ist als metrischer Raum Hausdorff und besitzt eine abzählbare Basis für seine Topologie, etwa aus offenen Kugeln mit rationalen Mittelpunktskoordinaten und rationalen Radii. Die drei definierenden Eigenschaften einer topologischen Mannigfaltigkeit sollen sicher stellen, dass Mannigfaltigkeiten sich in vielerlei Hinsicht wie dieses grundlegende Beispiel des \mathbb{R}^n verhalten.

In der Praxis sind die Hausdorff Bedingung und das zweite Abzählbarkeitsaxiom meist leicht zu überprüfen, insbesondere, bei Räumen die aus anderen Mannigfaltigkeiten aufgebaut wurden (z.B. als (topologische) Teilräume oder Produkträume). So folgt etwa sofort, dass jede offene Teilmenge einer topologischen Mannigfaltigkeit wieder eine topologische Mannigfaltigkeit derselben Dimension ist. Bevor wir zu etwas spannenderen Beispielen kommen, führen wir noch Koordinaten ein:

Definition. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n . Eine *Karte* auf M ist ein Paar (U, φ) , wobei $U \subseteq M$ eine offene Menge und $\varphi : U \rightarrow \bar{U}$ ein Homöomorphismus von U nach $\bar{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind. Ist $\varphi(p) = 0$ für ein $p \in U$ so sagt man, die Karte (U, φ) ist *zentriert* bei p .

Ist (U, φ) eine Karte auf M , so nennt man U eine *Koordinatenumgebung* für jeden Punkt in U . Ist $\varphi(U)$ eine offene Kugel in \mathbb{R}^n , so nennen wir U eine *Koordinatenkugel*. Den Homöomorphismus φ nennt man (lokale) *Koordinatenabbildung* und die Komponentenfunktionen (x^1, \dots, x^n) von φ heißen *lokale Koordinaten* in U .

Bemerkung.

- (a) Nach der Definition topologischer Mannigfaltigkeiten ist jeder Punkt $p \in M$ im Definitionsbereich einer Karte (U, φ) enthalten. Ist $p \in U$, so erhält man durch Subtraktion von $\varphi(p)$ eine neue Karte, die bei p zentriert ist.

Beispiele.

(a) Graphen stetiger Funktionen

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion. Der Graph von F ist die Teilmenge des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U \text{ and } y = F(x)\}.$$

Vorsehen mit der Spurtopologie wird $\Gamma(F)$ zu einem Hausdorff Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Es sei $\varphi_F : \Gamma(F) \rightarrow U$ gegeben durch

$$\varphi_F(x, y) = x, \quad (x, y) \in \Gamma(F).$$

Offenbar ist φ_F ein Homöomorphismus mit der Inversen $\varphi_F^{-1}(x) = (x, F(x))$. Damit ist $\Gamma(F)$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n , die homöomorph zu U ist und $(\Gamma(F), \varphi_F)$ ist eine globale Karte auf $\Gamma(F)$.

Auf gleiche Weise zeigt man, dass jede Teilmenge des \mathbb{R}^{n+k} , welche definiert wird, indem k der Koordinaten gleich einer stetigen Funktion der anderen n (aus einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n) gesetzt werden, auch eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.

(b) Euklidische Sphären

Es sei

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

die Euklidische Einheitssphäre im \mathbb{R}^{n+1} versehen mit der Spurtopologie. Als topologischer Teilraum des \mathbb{R}^{n+1} ist \mathbb{S}^n Hausdorff und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Um zu zeigen, dass \mathbb{S}^n lokal Euklidisch ist, betrachten wir die Teilmengen $U_i^+ \subseteq \mathbb{S}^n$, $1 \leq i \leq n+1$, definiert durch

$$U_i^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x^i > 0\}.$$

Analog seien $U_i^- \subseteq \mathbb{S}^n$, $1 \leq i \leq n+1$, die Teilmengen von \mathbb{S}^n mit $x^i < 0$. Es sei $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskugel im \mathbb{R}^n und $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Funktion

$$f(u) = \sqrt{1 - \|u\|^2}.$$

Für jedes $i \in \{1, \dots, n+1\}$ sind die Mengen U_i^\pm Graphen der Funktionen

$$x^i = \pm f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}).$$

Damit sind (U_i^\pm, φ_i^\pm) , wobei $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{B}^n$ definiert ist durch

$$\varphi_i^\pm(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}),$$

Karten für \mathbb{S}^n . Da jeder Punkt in \mathbb{S}^n in einer dieser Karten enthalten ist, ist \mathbb{S}^n lokal euklidisch und daher eine topologische n -Mannigfaltigkeit.

(c) Produkt Mannigfaltigkeiten

Es seien M_1, \dots, M_k topologische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n_1, \dots, n_k . Dann ist $M_1 \times \dots \times M_k$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + \dots + n_k$ mit Karten der Form $(U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)$, wobei (U_i, φ_i) , $1 \leq i \leq k$, Karten auf M_i sind. (Übungsbeispiel)

Aufgrund ihrer engen Beziehung zum Euklidischen Raum spielen Mannigfaltigkeiten unter allen topologischen Räumen eine sehr spezielle Rolle. Im Folgenden besprechen wir einige ihrer besonderen topologischen Eigenschaften. Die erste davon besagt, dass jede topologische Mannigfaltigkeit eine sehr brave Basis für ihre Topologie besitzt. Zur Erinnerung, eine Teilmenge K eines topologischen Raumes X heißt *relativ kompakt* in X , wenn der Abschluss von K in X kompakt ist.

Proposition 1.1 *Jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt eine abzählbare Basis aus relativ kompakten Koordinatenkugeln.*

Beweis: Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n . Wir nehmen zunächst an, dass M eine globale Karte (M, φ) besitzt mit $\varphi : M \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Es sei \mathcal{B} die Menge aller offenen Kugeln $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit rationalen Radii r und rationalen Mittelpunktskoordinaten deren Abschluss in \bar{U} liegt. Offenbar ist jede dieser Kugeln relativ kompakt in \bar{U} . Die Menge \mathcal{B} bildet nach Definition eine abzählbare Basis für die Topologie in \bar{U} . Da φ ein Homöomorphismus ist, schließen wir, dass die Menge $\{\varphi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ eine abzählbare Basis bestehend aus relativ kompakten Koordinatenkugeln für die Topologie von M bildet.

Es sei nun M eine beliebige topologische n -Mannigfaltigkeit. Nach Definition ist jeder Punkt von M im Wertebereich einer Karte enthalten ist. Wir zeigen nun, dass M bereits durch abzählbar viele Karten überdeckt wird. Dazu sei \mathcal{B} eine abzählbare Basis für die Topologie von M und \mathcal{U} eine Menge von Koordinatenumgebungen, die M überdecken. Es sei weiters $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U \text{ für ein } U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{B}$. Für jedes $B \in \mathcal{B}'$ wählen wir ein beliebiges $U_B \in \mathcal{U}$ mit $B \subseteq U_B$. Es ist nun leicht zu sehen, dass die Menge $\{U_B : B \in \mathcal{B}'\}$ eine abzählbare Überdeckung von M bildet.

Es seien $\{(U_i, \varphi_i)\}$ abzählbar viele Karten, die M überdecken. Nach dem ersten Teil des Beweises hat jede Koordinatenumgebung U_i eine abzählbare Basis aus relativ kompakten Koordinatenkugeln und die Vereinigung all dieser abzählbaren Basen bildet eine abzählbare Basis für die Topologie von M . Offenbar stimmt für jede relativ kompakte Koordinatenkugel $V \subseteq U_i$ der Abschluss von V bezüglich U_i mit dem Abschluss in M überein. Damit ist aber V auch relativ kompakt in M . ■

Ein topologischer Raum M heißt *lokal kompakt*, wenn es zu jedem Punkt in M eine Umgebung gibt, deren Abschluss kompakt ist. Offenbar erhalten wir als eine direkte Folgerung von Proposition 1.1:

Korollar 1.2 *Jede topologische Mannigfaltigkeit ist lokal kompakt.*

Wir kommen nun zu Zusammenhangseigenschaften topologischer Mannigfaltigkeiten und erinnern dazu zunächst an folgende Begriffsbildungen:

- Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn X nicht in zwei disjunkte nichtleere offene Mengen zerlegt werden kann.
- Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für jedes Paar von Punkten $x, y \in X$ einen Weg f von x nach y gibt, d.h. eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$.
- Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn X eine Basis bestehend aus wegzusammenhängenden offenen Mengen besitzt.

Proposition 1.3 *Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) M ist lokal wegzusammenhängend.
- (b) M ist genau dann zusammenhängend, wenn M wegzusammenhängend ist.
- (c) Die Zusammenhangskomponenten von M stimmen mit den Wegzusammenhangskomponenten von M überein.
- (d) M hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten und jede davon ist eine offene Teilmenge von M , die selbst wieder eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit bildet.

Beweis: Da jede Koordinatenkugel von M offenbar wegzusammenhängend ist, folgt Aussage (a) aus Proposition 1.1. Die Aussagen (b), (c) und (d) sind nun einfache Konsequenzen aus (a). (Übungsbeispiel) ■

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Familie \mathcal{U} von Teilmengen von X heißt *lokal endlich*, wenn jeder Punkt in X eine Umgebung hat, die höchstens endlich viele der Mengen in \mathcal{U} schneidet.

Eine der wichtigsten Konsequenzen des zweiten Abzählbarkeitsaxioms ist der Umstand, dass jede (glatte) Mannigfaltigkeit parakompakt ist. Zum Beweis dieser Aussage, den wir in Kapitel 2 geben, benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma 1.4 *Jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt eine abzählbare und lokal endliche Überdeckung durch relativ kompakte offene Mengen.*

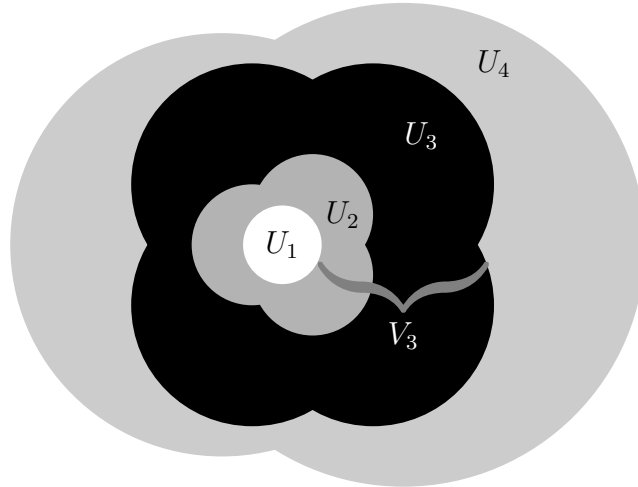
Beweis: Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Nach Proposition 1.1 gibt es eine abzählbare Basis $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ der Topologie von M aus relativ kompakten offenen Mengen. Wir zeigen zunächst mittels Induktion, dass M eine abzählbare Überdeckung $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) U_j ist eine relativ kompakte offene Teilmenge von M .
- (ii) $\text{clos } U_{j-1} \subseteq U_j$ für $j \geq 2$.
- (iii) $B_j \subseteq U_j$.

Für $k = 1$ setzen wir $U_1 = B_1$. Wir können nun annehmen, dass es offene Mengen U_j , $j = 1, \dots, k$ gibt, die (i)-(iii) erfüllen. Da $\text{clos } U_k$ kompakt ist und durch die $\{B_j\}$ sicher überdeckt wird, gibt es ein $m_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{clos } U_k \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_{m_k}.$$

Wir setzen nun $U_{k+1} = B_1 \cup \dots \cup B_{m_k}$. Damit sind sicher (i) und (ii) erfüllt für $j = k + 1$. Wählen wir m_k so groß, dass auch $m_k \geq k + 1$, so ist auch $B_{k+1} \subseteq U_{k+1}$ und damit (iii) erfüllt. Da die $\{B_j\}$ eine Überdeckung von M bilden, garantiert (iii) dasselbe für $\{U_j\}$.



Um eine lokal endliche Überdeckung zu erhalten setzen wir nun $V_j = U_j \setminus \text{clos } U_{j-2}$. Als eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\text{clos } U_j$ ist $\text{clos } V_j$ kompakt. Ist $p \in M$ beliebig, dann liegt $p \in V_k$, wobei k der kleinste Index ist mit $p \in U_k$. Damit bilden die $\{V_j\}$ eine Überdeckung von M . Da V_k nur nichtleeren Schnitt mit V_{k-1} und V_{k+1} besitzt ist diese Überdeckung lokal endlich. ■

Bevor wir zu glatten Mannigfaltigkeiten kommen, betrachten wir noch Fundamentalgruppen topologischer Mannigfaltigkeiten. Dazu erinnern wir zunächst an einige grundlegende Begriffe:

Es seien X ein topologischer Raum und $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ zwei Wege in X mit denselben Anfangs- und Endpunkten. Man nennt f und g *homotop*, symbolisch $f \sim g$, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit

- $H(s, 0) = f(s)$ und $H(s, 1) = g(s)$ für alle $s \in [0, 1]$,
- $H(0, t) = f(0) = g(0)$ und $H(1, t) = f(1) = g(1)$ für alle $t \in [0, 1]$.

Für je zwei Punkte $p, q \in X$ bildet die so definierte Homotopierelation eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege von p nach q . Die Äquivalenzklasse eines Weges f nennen wir *Homotopieklasse* von f und schreiben dafür $[f]$.

Für zwei Wege f, g in X mit $f(1) = g(0)$ ist ihr Produkt $f \cdot g$ der Weg

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}; \\ g(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Wie man leicht sieht, folgt aus $f \sim f'$ und $g \sim g'$, dass auch $f \cdot g \sim f' \cdot g'$. Damit induziert das obige Produkt ein Produkt auf Homotopieklassen $[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dieses Produkt assoziativ ist $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$.

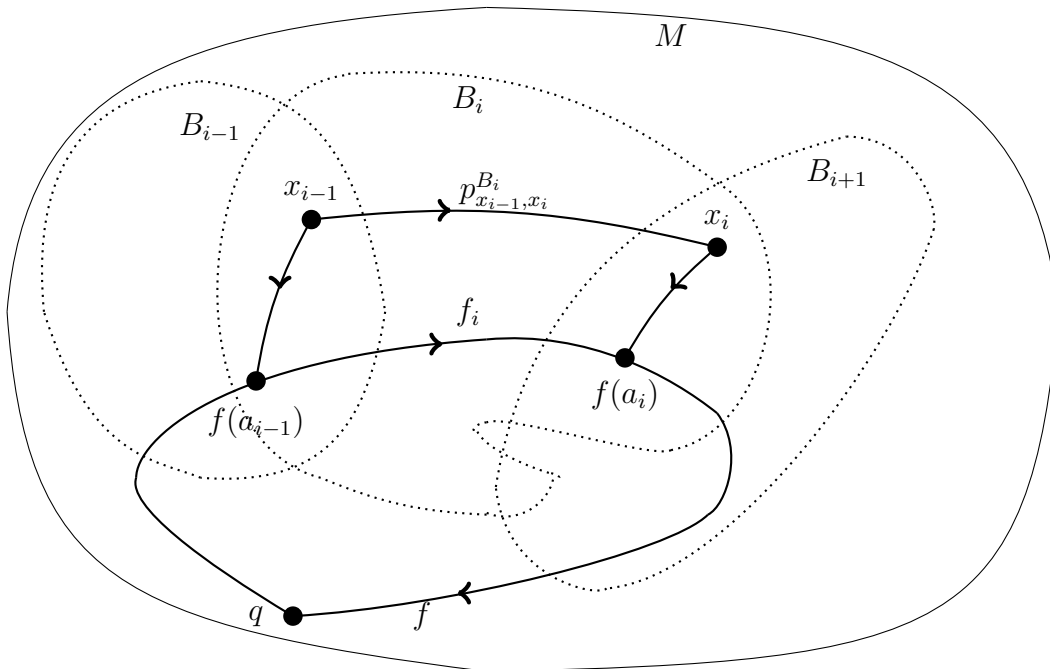
Eine Schleife in X mit Basispunkt $q \in X$ ist ein Weg in X dessen Anfangs- und Endpunkt q ist. Die Menge der Homotopieklassen von Schleifen mit Basispunkt q bezeichnen wir mit $\pi_1(X, q)$. Versehen wir $\pi_1(X, q)$ mit dem oben eingeführten Produkt, so wird $\pi_1(X, q)$ zu einer Gruppe, der *Fundamentalgruppe von X am Basispunkt q* . Das neutrale Element von $\pi_1(X, q)$ ist die Homotopieklasse des konstanten Weges $c_q(s) \equiv q$, das Inverse von $[f]$ ist die Homotopieklasse des Weges $f^{-1}(s) = f(1 - s)$.

Es ist nicht schwer zu zeigen (Übungsbeispiel), dass für wegzusammenhängende Räume die Fundamentalgruppen mit unterschiedlichen Basispunkten alle isomorph sind. Ist X wegzusammenhängend und $\pi_1(X, q)$ für ein/alle $q \in X$ trivial (enthält nur $[c_q]$), so nennt man X *einfach zusammenhängend*. Offenbar ist X genau dann einfach zusammenhängend, wenn je zwei Wege in X mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind bzw. jede Schleife nullhomotop, d.h. homotop zum konstanten Weg, ist. (Übungsbeispiel)

Satz 1.5 *Die Fundamentalgruppe jeder Zusammenhangskomponente einer topologischen Mannigfaltigkeit ist abzählbar.*

Beweis: Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und \mathcal{B} eine abzählbare Menge von Koordinatenkugeln, die M überdecken. Für jedes Paar $B, B' \in \mathcal{B}$ besteht der Durchschnitt $B \cap B'$ aus höchstens abzählbar vielen Komponenten, die alle wegzusammenhängend sind. Es sei \mathcal{X} eine abzählbare Menge, die aus jeder Komponente von $B \cap B'$ für alle $B, B' \in \mathcal{B}$ einen Punkt enthält. Zu jedem $B \in \mathcal{B}$ und jedem Paar $x, x' \in \mathcal{X} \cap B$, sei $p_{x,x'}^B$ ein beliebiger Weg von x nach x' der in B verläuft.

Da die Fundamentalgruppen mit Basispunkten in derselben Wegzusammenhangskomponente isomorph sind, genügt es zu zeigen, dass $\pi_1(M, q)$ für beliebiges $q \in \mathcal{X}$ abzählbar ist. Dazu definieren wir *spezielle Schleifen* als Schleifen mit Basispunkt q , die ein endliches Produkt von Wegen der Form $p_{x,x'}^B$ sind. Offenbar ist die Menge aller speziellen Schleifen abzählbar. Wir werden nun zeigen, dass jedes Element von $\pi_1(M, q)$ durch eine spezielle Schleife repräsentiert wird.



Es sei $f : [0, 1] \rightarrow M$ eine beliebige Schleife mit Basispunkt q . Offenbar bildet die Menge $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Da $[0, 1]$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt Zahlen $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$ mit $[a_{i-1}, a_i] \subseteq f^{-1}(B)$ für ein $B \in \mathcal{B}$. Für $0 \leq i \leq k$ sei f_i die Einschränkung von

f auf $[a_{i-1}, a_i]$ aber reparametrisiert, sodass $f_i : [0, 1] \rightarrow M$ einen Teilweg von f mit Anfangspunkt $f(a_{i-1})$ und Endpunkt $f(a_i)$ darstellt. Weiters sei $B_i \in \mathcal{B}$ eine Koordinatenkugel, die das Bild von f_i enthält. Für jedes i liegt $f(a_i) \in B_i \cap B_{i+1}$ und es gibt ein $x_i \in \mathcal{X}$, das in derselben Komponente von $B_i \cap B_{i+1}$ liegt wie $f(a_i)$. Schließlich seien noch g_i Wege in $B_i \cap B_{i+1}$ von x_i nach $f(a_i)$, wobei wir $x_0 = x_k = q$ und $g_0 = g_k = c_q$ setzen. Da $g_i^{-1} \cdot g_i \equiv c_{f(a_i)}$, erhalten wir nun

$$f \equiv f_1 \cdots f_k \equiv g_0 \cdot f_1 \cdot g_1^{-1} \cdot g_1 \cdot f_2 \cdot g_2^{-1} \cdots g_{k-1} \cdot f_k \cdot g_k^{-1}.$$

Für jedes i verläuft nun der Weg $\bar{f}_i := g_{i-1} \cdot f_i \cdot g_i^{-1}$ in B_i von x_{i-1} nach x_i . Die Koordinatenkugel B_i ist aber einfach zusammenhängend, womit \bar{f}_i homotop zu $p_{x_{i-1}, x_i}^{B_i}$ ist. Es folgt, dass die Schleife f homotop zu einem endlichen Produkt von Wegen der Form $p_{x, x'}^B$ und damit zu einer speziellen Schleife ist. ■

Um auch Differential- und Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten zu betreiben, benötigen wir mehr als nur eine topologische Struktur, denn grob gesprochen sind Ableitungen nicht invariant unter Homöomorphismen. Die zusätzliche „glatte Struktur“ führt zum Begriff der glatten Mannigfaltigkeit erlaubt uns zu entscheiden, welche Funktionen auf unserer Mannigfaltigkeit glatt bzw. differenzierbar sind. Wir wiederholen zunächst einige Begriffe aus der Euklidischen Analysis.

Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Wir nennen eine Funktion $F : U \rightarrow V$ *glatt* oder C^∞ , wenn die Komponentenfunktionen von F partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen. Ist F darüber hinaus bijektiv mit einer glatten Inversen, so nennt man F einen *Diffeomorphismus*.

Die Idee hinter der Definition glatter Funktionen ist leicht erklärt: Jeder Punkt aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M liegt im Wertebereich einer Koordinatenabbildung $\varphi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir könnten daher $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt nennen, wenn $f \circ \varphi^{-1} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist. Das Problem bei dieser Definition ist die Unabhängigkeit von der Wahl der Koordinatenabbildung. Um diese zu garantieren, führt man eine neue Struktur bestehend aus „glatten Karten“ ein.

Definition. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n . Sind (U, φ) und (V, ψ) zwei Karten aus M mit $U \cap V \neq \emptyset$, so heißt der Homöomorphismus $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ der *Kartenwechsel* von φ nach ψ . Wir nennen zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) von M *glatt kompatibel*, wenn entweder $U \cap V = \emptyset$ oder der Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist.

Ein *Atlas* für M ist eine Menge von Karten deren Koordinatenumgebungen M überdecken. Ein Atlas \mathcal{A} heißt *glatt*, wenn je zwei Karten in \mathcal{A} glatt kompatibel sind.

Bemerkung.

- (a) In der Praxis kann man oft zeigen, dass für *jedes Paar* von Koordinatenabbildungen φ und ψ in einem gegebenen Atlas der Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ glatt ist. Für den Nachweis, dass der Atlas glatt ist, ist es dann nicht mehr notwendig zu zeigen, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, da die Inverse $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$ ebenfalls einen Kartenwechsel darstellt, von dem wir bereits wissen, dass er glatt ist.

Wir könnten nun M mit einer „glatten Struktur“ versehen, indem wir einen glatten Atlas für M finden. Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt dann glatt, wenn $f \circ \varphi^{-1}$ für jede Koordinatenabbildung φ in unserem Atlas glatt ist. Diese Konstruktion hat noch einen Schönheitsfehler: Im Allgemeinen, gibt es viele glatte Atlanten die so dieselbe „glatte Struktur“ auf M erzeugen, d.h. auf dieselbe Menge glatter Funktionen führen. Ein einfaches Beispiel sind die folgenden beiden Atlanten auf \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{(B_1(x), \text{Id}_{B_1(x)}) : x \in \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$

Offenbar sind \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 verschieden, eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aber genau dann „glatt“ bezüglich eines der beiden Atlanten, wenn sie im üblichen Sinn glatt ist. Einige Autoren lösen dieses Problem indem sie zu Äquivalenzklassen von Atlanten übergehen. Wir verfolgen einen anderen (weiter verbreiteten) Ausweg:

Definition. Ein glatter Atlas \mathcal{A} auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M heißt *maximal*, wenn er in keinem echt größeren glatten Atlas enthalten ist. Wir nennen einen maximalen glatten Atlas auf M auch eine *glatte Struktur* auf M .

Eine *glatte Mannigfaltigkeit* ist ein Paar (M, \mathcal{A}) bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit M versehen mit einer glatten Struktur \mathcal{A} .

Bemerkungen.

- (a) Die Definition eines maximalen Atlas \mathcal{A} sichert, dass jede Karte auf M , die glatt kompatibel mit allen Karten aus \mathcal{A} ist, auch schon in \mathcal{A} enthalten ist.
- (b) Eine topologische Mannigfaltigkeit, kann viele verschiedene glatte Strukturen tragen oder auch gar keine ermöglichen!

Das folgende Lemma zeigt, dass es für die Definition einer glatten Struktur genügt *irgend einen* glatten Atlas anzugeben.

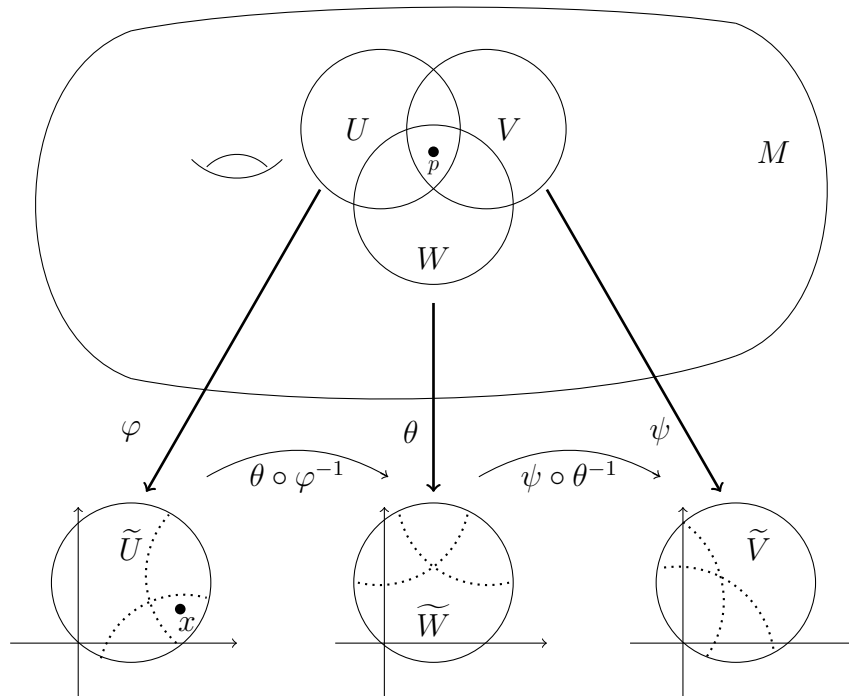
Lemma 1.6 *Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) *Jeder glatte Atlas für M ist in einem eindeutig bestimmten maximalen glatten Atlas enthalten.*
- (b) *Zwei glatte Atlanten für M bestimmen genau dann dieselbe glatte Struktur, wenn ihre Vereinigung ein glatter Atlas ist.*

Beweis : Zum Beweis von (a) sei \mathcal{A} ein glatter Atlas auf M und $\overline{\mathcal{A}}$ sei die Menge aller Karten auf M , die glatt-kompatibel mit allen Karten aus \mathcal{A} sind. Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\mathcal{A}}$ ein glatter Atlas ist, d.h. dass für je zwei Karten $(U, \varphi), (V, \psi) \in \overline{\mathcal{A}}$ die Abbildung $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ glatt ist.

Dazu sei $x = \varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$ beliebig. Da M durch die Koordinatenumgebungen der Karten aus \mathcal{A} überdeckt wird, gibt es eine Karte $(W, \theta) \in \mathcal{A}$ mit $p \in W$. Da jede Karte in $\overline{\mathcal{A}}$ glatt-kompatibel mit (W, θ) ist, sind die Abbildungen $\theta \circ \varphi^{-1}$ und $\psi \circ \theta^{-1}$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen glatt. Da $p \in U \cap V \cap W$, ist die Abbildung

$\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \varphi^{-1})$ glatt in einer Umgebung von x . Da $x \in \varphi(U \cap V)$ beliebig war, ist $\psi \circ \varphi^{-1}$ glatt in einer Umgebung von jedem Punkt in $\varphi(U \cap V)$. Damit ist $\overline{\mathcal{A}}$ ein glatter Atlas und da jede Karte auf M , die mit allen Karten aus $\overline{\mathcal{A}}$ und damit speziell aus \mathcal{A} verträglich ist, auch schon in $\overline{\mathcal{A}}$ liegt, ist $\overline{\mathcal{A}}$ maximal. Ist \mathcal{B} irgend ein anderer maximaler Atlas, der \mathcal{A} enthält, so folgt sofort $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ und damit aufgrund der Maximalität $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$.



Aussage (b) ist nun ebenfalls eine unmittelbare Konsequenz der Definition von $\overline{\mathcal{A}}$ von oben und (a). ■

Bemerkungen.

- (a) Besitzt eine topologische Mannigfaltigkeit M eine globale Karte, so ist die Bedingung der glatten Kompatibilität trivialerweise erfüllt. Daher bestimmt so eine Karte automatisch eine glatte Struktur auf M .
- (b) Ändert man die Kompatibilitätsanforderung an Kartenwechsel in einem Atlas, so führt das auf C^k Strukturen oder reell bzw. komplex analytische Strukturen und damit auf C^k bzw. reell-analytische und komplexe Mannigfaltigkeiten.

Bevor wir zu Beispielen glatter Mannigfaltigkeiten kommen, übertragen wir noch einige der bereits bekannten Begriffsbildungen für topologische Mannigfaltigkeiten auf die Situation glatter Mannigfaltigkeiten:

Jede Karte (U, φ) aus einem maximalen Atlas einer glatten Mannigfaltigkeit M nennen wir eine *glatte Karte*. Die Begriffe der *glatten Koordinatenabbildung* und *glatten Koordinatenumgebung*, sowie der *glatten Koordinatenkugel* sollten damit auch klar sein. Der Beweis der folgenden „glatten“ Verfeinerung von Proposition 1.1 ist eine einfache Adaption des ursprünglichen Beweises (und wird nicht ausgeführt):

Proposition 1.7 Jede glatte n -Mannigfaltigkeit besitzt eine abzählbare Basis aus regulären Koordinatenkugeln, das sind glatte relativ kompakte Koordinatenkugeln $B \subseteq M$, sodass es für geeignete $0 < r < r'$ eine glatte Koordinatenkugel $B' \supseteq \text{clos } B$ und eine glatte Koordinatenabbildung $\varphi : B' \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\varphi(B) = B_r(0), \quad \varphi(\text{clos } B) = \text{clos } B_r(0), \quad \varphi(B') = B_{r'}(0).$$

Für eine gegebene glatte Karte (U, φ) auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ermöglicht die Koordinatenabbildung $\varphi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Identifikation von U und \bar{U} . Damit können wir U auch als Teilmenge des \mathbb{R}^n und jeden Punkt $p \in U$ durch seine lokale Koordinatendarstellung $p \cong \varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$ repräsentieren.

Beispiele.

(a) Null-dimensionale Mannigfaltigkeiten

Eine null-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M ist ein abzählbarer diskreter topologischer Raum. Für jeden Punkt $p \in M$ ist die einzige zu \mathbb{R}^0 homöomorphe Umgebung $\{p\}$ selbst, womit die Kompatibilitätsanforderung an die Koordinatenabbildungen $\varphi : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0$, $p \in M$, trivialerweise erfüllt ist. Damit besitzt M eine *eindeutige* glatte Struktur.

(b) Der Euklidische Raum \mathbb{R}^n und endlich-dimensionale Vektorräume

Der n -dimensionale Euklidische Raum \mathbb{R}^n ist eine glatte Mannigfaltigkeit versehen mit der durch die globale Karte $(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$ bestimmten glatten Struktur. Wir nennen dies die *Standard glatte Struktur*. Wie man leicht zeigt, besitzt der \mathbb{R}^n jedoch viele verschiedene glatte Strukturen (Übungsbeispiel).

Ist V nun ein beliebiger n -dimensionaler (reeller) Vektorraum, so bestimmt jede Norm auf V eine Topologie bezüglich derer V eine natürliche glatte Struktur trägt: Jede Basis $\{E_1, \dots, E_n\} \subseteq V$ definiert einen Isomorphismus $E : \mathbb{R}^n \rightarrow V$, definiert durch $E(x) = \sum_{i=1}^n x^i E_i$. Diese Abbildung ist ein Homöomorphismus, womit der Atlas bestehend aus der globalen Karte (V, E^{-1}) eine eindeutige glatte Struktur bestimmt. Da Basiswechsel durch invertierbare lineare Abbildungen und damit Diffeomorphismen beschrieben werden, folgt, dass die Wahl einer anderen Basis auf dieselbe glatte Struktur führt. Wir nennen diese die *Standard glatte Struktur* auf V .

(c) Offene Untermannigfaltigkeiten

Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen. Die Menge \mathcal{A}_U aller glatten Karten (V, φ) auf M mit $V \subseteq U$ definiert einen glatten Atlas auf U . Um das zu sehen, verwenden wir, dass $p \in U$ sicher in irgend einer Karte (W, φ) von M enthalten ist. Setzen wir daher $V = W \cap U$, dann ist $(V, \varphi|_V)$ eine Karte in \mathcal{A}_U die p enthält. Der Nachweis, dass die Karten \mathcal{A}_U glatt kompatibel sind, ist trivial. Damit ist jede offene Teilmenge von M selbst wieder eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Versehen mit der hier definierten glatten Struktur, nennen wir jede offene Teilmenge eine *offene Untermannigfaltigkeit* von M .

(d) *Matrix-Mannigfaltigkeiten*

Es bezeichne $M(m \times n, \mathbb{R})$ den Vektorraum der $m \times n$ Matrizen mit reellen Einträgen. Nach (b) ist $M(m \times n, \mathbb{R})$ eine glatte mn -Mannigfaltigkeit. Ist $m = n$, so schreiben wir kurz $M(n, \mathbb{R})$ anstatt $M(n \times n, \mathbb{R})$.

Die *allgemeine lineare Gruppe* $GL(n, \mathbb{R})$ ist die offene Teilmenge von $M(n, \mathbb{R})$ bestehend aus allen invertierbaren Matrizen. Nach (c) ist $GL(n, \mathbb{R})$ daher eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n^2 .

Analog sind für $m < n$ oder $n < m$ die offenen Teilmengen von $M(m \times n, \mathbb{R})$ bestehend aus allen Matrizen von Rang m oder n glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension mn .

(e) *Euklidische Sphären*

Die n -Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine topologische n -Mannigfaltigkeit. Sind (U_i^\pm, φ_i^\pm) , $1 \leq i \leq n+1$, die weiter oben definierten Karten, so gilt für $i < j$,

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^{i-1}, u^{i+1}, \dots, u^{j-1}, \pm \sqrt{1 - \|u\|^2}, u^j, \dots, u^n)$$

und eine ganz ähnliche Formel für $i > j$. Im Falle, $i = j$ ergibt sich ganz einfach $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_i^\pm)^{-1} = \text{id}_{\mathbb{B}^n}$, womit die Menge aller Karten der Form (U_i^\pm, φ_i^\pm) einen glatten Atlas bildet, der wiederum eine glatte Struktur auf \mathbb{S}^n bestimmt. Wir nennen dies die *Standard glatte Struktur* auf \mathbb{S}^n .

(f) *Glatte Produkt-Mannigfaltigkeiten*

Sind M_1, \dots, M_k topologische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n_1, \dots, n_k , dann ist $M_1 \times \dots \times M_k$ eine topologische $(n_1 + \dots + n_k)$ -Mannigfaltigkeit mit Karten der Form $(U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)$, wobei (U_i, φ_i) , $1 \leq i \leq k$, Karten auf M_i sind. Je zwei solcher Karten sind glatt kompatibel, da

$$(\psi_1 \times \dots \times \psi_k) \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)^{-1} = (\psi \circ \varphi_1^{-1}) \times \dots \times (\psi_k \circ \varphi_k^{-1}),$$

was eine glatte Abbildung ist. Damit trägt $M_1 \times \dots \times M_k$ eine natürliche glatte Struktur.

Zur Konstruktion glatter Mannigfaltigkeiten ist das folgende Lemma oft nützlich:

Lemma 1.8 *Es sei M eine Menge versehen mit einer Familie $\{U_\alpha\}$ von Teilmengen von M und Abbildungen $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ für jedes α , sodass:*

(a) *Für jedes α ist $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$ eine Bijektion.*

(b) *Für je zwei α, β sind $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ und $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen im \mathbb{R}^n .*

(c) *Ist $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann ist $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ein Diffeomorphismus.*

(d) *Abzählbar viele der U_α überdecken M .*

(e) *Für je zwei verschiedene $p, q \in M$, gibt es entweder ein U_α das p und q enthält oder disjunkte Mengen U_α und U_β mit $p \in U_\alpha$ und $q \in U_\beta$.*

Dann ist M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer glatten Struktur, die eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaft, dass $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ glatte Karten sind.

Beweis: Wir definieren zunächst eine Topologie auf M indem wir alle Mengen der Form $\varphi_\alpha^{-1}(V)$, für $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, als Basis wählen. Um zu zeigen, dass diese Basis wohldefiniert ist, genügt es nachzuweisen, dass jede nichtleere Schnittmenge von je zwei $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ und $\varphi_\beta^{-1}(W)$ wieder eine Basismenge ist. Dazu verwenden wir, dass nach (c) die Menge $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W)$ einerseits eine offene Teilmenge von $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ und andererseits wegen (b) auch offen in \mathbb{R}^n ist. Damit ist aber

$$\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) = \varphi_\alpha^{-1}(V \cap \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W))$$

ebenfalls eine Basismenge.

Nach Definition ist jede der Abbildungen φ_α ein Homöomorphismus, womit M lokal Euklidisch von der Dimension n ist. Aus Eigenschaft (e) folgt auf einfache Weise, dass M ein Hausdorff Raum ist. Ist $\{U_{\alpha_i}\}$ eine abzählbare Teilfamilie der U_α , die M überdeckt, dann besitzt jede der Mengen U_{α_i} eine abzählbare Basis; die Vereinigung all dieser ist eine abzählbare Basis von M , womit M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Offenbar ist nach (c) die Familie $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein glatter Atlas auf M , der nach Lemma 1.6 eine eindeutige glatte Struktur auf M bestimmt. ■

Im Folgenden skizzieren wir kurz eine Anwendung von Lemma 1.8:

Beispiel - Grassmann Mannigfaltigkeiten.

Es sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Für $0 \leq k \leq n$ bezeichne $G_k(V)$ die Menge aller k -dimensionalen Unterräume von V . Im Folgenden verwenden wir Lemma 1.8, um zu zeigen, dass $G_k(V)$ in natürlicher Weise die Struktur einer glatten $k(n-k)$ -Mannigfaltigkeit, genannt die k -Grassmann Mannigfaltigkeit, trägt.

Dazu seien P und Q Unterräume von V der Dimension k und $n-k$ mit $V = P \oplus Q$. Weiters sei $L(P, Q)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von P nach Q und $U_Q := \{W \in G_k(V) : Q \cap W = 0\} \subseteq G_k(V)$. Wir definieren noch eine Abbildung $\psi : L(P, Q) \rightarrow U_Q$ durch $\psi(A) = \{x + Ax : x \in P\}$.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass ψ eine Bijektion ist, sei $\varphi = \psi^{-1} : U_Q \rightarrow L(P, Q)$. Da $L(P, Q) \cong M((n-k) \times k, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$, können wir (U_Q, φ) als Karte auf $G_k(V)$ ansehen. Da $\varphi(U_Q) = L(P, Q)$, ist Eigenschaft (a) aus Lemma 1.8 sicher erfüllt.

Es sei nun (P', Q') ein weiteres Paar komplementärer Unterräume, und ψ', φ' die zugehörigen Koordinatenabbildungen. Die Menge $\varphi(U_Q \cap U_{Q'}) \subseteq L(P, Q)$ besteht aus allen $A \in L(P, Q)$ mit $\{x + Ax : x \in P\} \cap Q' = 0$, was offenbar eine offene Menge ist. Damit ist auch Eigenschaft (b) aus Lemma 1.8 erfüllt. Zum Nachweis von Lemma 1.8 (c) müssen wir zeigen, dass $\varphi' \circ \varphi^{-1} = \varphi' \circ \psi$ glatt ist. Diesen technisch mühsamen aber nicht schwierigen Schritt, werden wir hier nicht ausführen.

Ist $\{E_1, \dots, E_n\}$ eine feste Basis von V , so bestimmt jede Partition dieser Basis-elemente in k bzw. $n-k$ Elemente komplementäre Unterräume P und Q . Offenbar wird $G_k(V)$ von den endlich vielen Mengen U_Q , die durch alle möglichen Partitionen der gegebenen Basis bestimmt sind, überdeckt. Damit ist Eigenschaft (d) von Lemma 1.8 nachgewiesen. Die Hausdorff Bedingung (e) ist schließlich noch wie folgt einzusehen: Sind $P, P' \subseteq V$ zwei k -dimensionale Unterräume, so gibt es immer einen Unterraum Q der Dimension $n-k$ mit $P \cap Q = P' \cap Q = 0$, dann sind aber P und P' in der Koordinatenumgebung U_Q , die durch (P, Q) bestimmt wird, enthalten.

Zum Abschluss des ersten Kapitels kommen wir noch zu glatten Mannigfaltigkeiten die (in einem noch zu präzisierenden Sinn) einen „Rand“ besitzen. Prototypen solcher Mannigfaltigkeiten sind etwa die abgeschlossene Euklidische Einheitskugel oder abgeschlossene Halbsphären. Das lokale Modell für Mannigfaltigkeiten mit Rand ist nicht mehr der \mathbb{R}^n sondern die abgeschlossene obere Halbebene

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

Wir verwenden $\text{int } \mathbb{H}^n$ und $\partial\mathbb{H}^n$, um das Innere bzw. den Rand von \mathbb{H}^n zu bezeichnen.

Definition. Eine n -dimensionale *topologische Mannigfaltigkeit mit Rand* M ist ein Hausdorff Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und in dem jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{H}^n ist.

Ein Paar (U, φ) bestehend aus einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ und einem Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow \bar{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ nennen wir eine *Karte* auf M . Wir nennen (U, φ) eine *innere Karte*, wenn $\varphi(U) \subseteq \text{int } \mathbb{H}^n$ und eine *Randkarte*, wenn $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$.

Die besonderen topologischen Eigenschaften von topologischen Mannigfaltigkeiten übertragen sich auch auf topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand:

Proposition 1.9 *Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) *M ist lokal wegzusammenhängend.*
- (b) *M hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, von denen jede wieder eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist.*
- (c) *Die Fundamentalgruppe jeder Zusammenhangskomponente von M ist abzählbar.*

Um zu sehen, wie man glatte Strukturen auf topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand überträgt, klären wir noch was wir unter glatten Funktionen auf \mathbb{H}^n verstehen: Es sei $U \subseteq \mathbb{H}^n$ offen. Eine Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt *glatt*, wenn es zu jedem $x \in U$ eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x \in V$ und eine glatte Abbildung $\bar{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ gibt, die mit F auf $V \cap \mathbb{H}^n$ übereinstimmt.

Definition. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine *glatte Struktur* auf M ist ein maximaler glatter Atlas, d.h. eine Menge von Karten auf M , die M überdecken und deren Kartenwechsel glatt sind. Versehen mit einer solchen glatten Struktur, wird M zu einer *glatten Mannigfaltigkeit mit Rand*.

Ein Punkt $p \in M$ heißt *Randpunkt*, wenn sein Bild unter einer Koordinatenabbildung in $\partial\mathbb{H}^n$ liegt; wir nennen $p \in M$ einen *inneren Punkt* von M , wenn sein Bild unter einer Koordinatenabbildung in $\text{int } \mathbb{H}^n$ liegt. Die Menge aller Rand- bzw. inneren Punkte von M bezeichnen wir mit ∂M bzw. mit $\text{int } M$.

Bemerkung.

- (a) Jede glatte n -Mannigfaltigkeit kann auch als glatte n -Mannigfaltigkeit mit Rand angesehen werden, indem einfach Koordinatenabbildungen mit einem Diffeomorphismus von \mathbb{R}^n nach \mathbb{H}^n verknüpft werden.

2 Glatte Abbildungen

Die Motivation zur Definition glatter Strukturen auf Mannigfaltigkeiten war das Anliegen glatte Abbildungen einzuführen und mit ihnen zu arbeiten. Im Folgenden führen wir dies aus, insbesondere beschäftigen wir uns mit Diffeomorphismen, d.h. glatten und bijektiven Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, und führen am Ende des Kapitels ein sehr wichtiges Werkzeug ein, die Zerlegung der Eins, das es uns erlauben wird aus lokal glatten Objekten global glatte Objekte zusammenzubauen.

Definition. Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ und (U, φ) eine Karte auf M , so heißt die Funktion $\hat{f} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$, definiert durch $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$, die *Koordinatendarstellung* von f bezüglich (U, φ) .

Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt *glatt*, wenn es zu jedem $p \in M$ eine glatte Karte (U, φ) von M mit $p \in U$ gibt, sodass die Koordinatendarstellung von f bezüglich (U, φ) glatt ist auf der offenen Teilmenge $\varphi(U)$ des \mathbb{R}^n . Wir bezeichnen mit $C^\infty(M)$ die Menge aller glatten reellwertigen Funktionen auf M .

Bemerkung.

- (a) Ist $M = U$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , so ist offenbar $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ genau dann glatt auf M , wenn f im üblichen Sinn eine glatte Funktion auf U ist (man nehme einfach $\varphi = \text{Id}$).

Die obige Definition glatter Funktionen ist nur ein Spezialfall eines allgemeineren Glattheitsbegriffs für Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

Definition. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Ist $F : M \rightarrow N$ und sind (U, φ) und (V, ψ) Karten auf M bzw. N mit $F(U) \subseteq V$, so heißt die Funktion $\hat{F} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$, definiert durch $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, die *Koordinatendarstellung* von F bezüglich (U, φ) und (V, ψ) .

Eine Funktion $F : M \rightarrow N$ heißt *glatt*, wenn es zu jedem $p \in M$ glatte Karten (U, φ) von M mit $p \in U$ und (V, ψ) von N mit $F(p) \in V$ gibt, sodass $F(U) \subseteq V$ und die Koordinatendarstellung von F bezüglich (U, φ) und (V, ψ) glatt ist.

Bemerkung.

- (a) Ist $F : M \rightarrow N$ glatt, so sind die Koordinatendarstellungen von F bezüglich *jedem* Paar glatter Karte (U, φ) und (V, ψ) von M bzw. N mit $F(U) \subseteq V$ glatt (Übungsbeispiel).

Wie das folgende einfache Lemma zeigt, ist Glattheit eine lokale Eigenschaft:

Lemma 2.1 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Gibt es zu jedem $\alpha \in A$ eine glatte Abbildung $F_\alpha : U_\alpha \rightarrow N$, sodass $F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in A$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ mit $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.*

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Von einer natürlichen Definition glatter Funktionen würde man erwarten, dass sie Stetigkeit impliziert. Dies ist hier auch der Fall:

Proposition 2.2 *Jede glatte Funktion zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist stetig.*

Beweis: Es sei $F : M \rightarrow N$ glatt. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ glatte Karten (U, φ) von M mit $p \in U$ und (V, ψ) von N mit $F(p) \in V$, sodass $F(U) \subseteq V$ und $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ glatt, und damit stetig, ist. Da $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ und $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ Homöomorphismen sind, folgt auch die Stetigkeit von

$$F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U \rightarrow V.$$

Da $p \in M$ beliebig war, folgt, dass F stetig in einer Umgebung von jedem Punkt und damit auf ganz M ist. ■

Um nachzuweisen, dass eine gegebene Funktion $F : M \rightarrow N$ glatt ist, muss man nach Definition zu jedem $p \in M$ Koordinatenumgebungen U von p und V von $F(p)$ finden mit $F(U) \subseteq V$. Diese Anforderung sichert gerade, dass eine glatte Funktion F auch stetig ist. Ist jedoch Stetigkeit schon bekannt, so kann die Glattheit von F auf einfachere Weise nachgewiesen werden:

Lemma 2.3 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung. Sind $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ und $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ glatte Atlanten für M bzw. N und sind für alle α und β die Abbildungen $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen glatt, dann ist F glatt.*

Beweis: Es seien $p \in M$ und $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (V_\beta, \psi_\beta)$ glatte Karten aus den gegebenen glatten Atlanten mit $p \in U_\alpha$ und $F(p) \in V_\beta$. Aufgrund der Stetigkeit von F ist die Menge $U = F^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha$ offen in M und $F(U) \subseteq V_\beta$. Damit erfüllen die glatten Karten $(U, \varphi_\alpha|_U)$ und (V_β, ψ_β) die Bedingungen für die Glattheit von F . ■

Ebenfalls wenig überraschend ist die folgende Aussage:

Proposition 2.4 *Die Zusammensetzung glatter Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist glatt.*

Beweis: Es seien $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen und $p \in M$ beliebig. Da G glatt ist, gibt es glatte Karten (V, θ) von N mit $F(p) \in V$ und (W, ψ) von P mit $G(F(p)) \in W$, sodass $G(V) \subseteq W$ und $\psi \circ G \circ \theta^{-1} : \theta(V) \rightarrow \psi(W)$ glatt ist. Da F stetig ist, ist $F^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von p in M , daher gibt es eine glatte Karte (U, φ) für M mit $p \in U \subseteq F^{-1}(V)$. Nach der Bemerkung vor Lemma 2.1 ist die Koordinatendarstellung $\theta \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \theta(V)$ glatt. Damit erhalten wir insgesamt $G \circ F(U) \subseteq G(V) \subseteq W$, und

$$\psi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ G \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ F \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \rightarrow \psi(W)$$

ist als Zusammensetzung glatter Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des Euklidischen Raumes, selbst glatt. ■

Wir sind nun in der Lage einige Beispiele glatter Abbildungen anzugeben.

Beispiele.

- (a) Jede Abbildung von einer null-dimensionalen Mannigfaltigkeit in eine glatte Mannigfaltigkeit ist automatisch glatt.
- (b) Die Inklusionsabbildung $\iota : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ von der n -Sphäre versehen mit der Standard glatten Struktur ist sicher stetig. Sie ist glatt, da die Koordinatendarstellungen bezüglich der in Kapitel 1 eingeführten glatten Karten (U_i^\pm, φ_i) , $1 \leq i \leq n + 1$, gegeben sind durch

$$\iota \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \left(u^1, \dots, u^{i-1}, \pm \sqrt{1 - \|u\|^2}, u^i, \dots, u^n \right),$$

was glatte Abbildungen auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen, nämlich der Menge mit $\|u\| < 1$, sind.

- (c) Seien M_1, \dots, M_k, N glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ die Projektion auf den i -ten Faktor. Eine Abbildung $F : N \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$ ist genau dann glatt, wenn jede der Komponentenfunktionen $\pi_i \circ F : N \rightarrow M_i$ glatt ist (Übungsbeispiel).

Die Definition glatter Abbildungen überträgt sich auch ohne Schwierigkeiten auf Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand. Es ist dabei nur der richtige Begriff (der in Kapitel 1 besprochen wurde) für glatte Funktionen auf \mathbb{H}^n zu berücksichtigen. Die Details sind einfach auszuarbeiten.

Definition. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Ein *Diffeomorphismus* zwischen M und N ist eine glatte bijektive Abbildung $F : M \rightarrow N$ mit glatter Inversen. Wir nennen M und N *diffeomorph*, wenn es einen Diffeomorphismus zwischen M und N gibt, und schreiben dann $M \approx N$.

Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ heißt ein *lokaler Diffeomorphismus*, wenn es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung U gibt, sodass $F(U)$ offen ist in N und $F|_U : U \rightarrow F(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung.

- (a) Ein zentraler Untersuchungsgegenstand der Analysis auf Mannigfaltigkeiten sind Eigenschaften glatter Mannigfaltigkeiten, die invariant unter Diffeomorphismen sind. Ein interessantes Beispiel hierfür ist die Frage ob eine gegebene topologische Mannigfaltigkeit glatte Strukturen besitzt, die nicht diffeomorph zueinander sind. Wie Arbeiten von Munkres und Moise zeigen, besitzt jede topologische Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 3 eine bis auf Diffeomorphie eindeutige glatte Struktur. Aus Arbeiten von Donaldson und Friedman folgt, dass der \mathbb{R}^n eine bis auf Diffeomorphie eindeutige glatte Struktur besitzt, für alle $n \neq 4$. Der \mathbb{R}^4 besitzt überabzählbar viele verschiedene glatte Strukturen, von denen keine zwei diffeomorph sind.

Beispiele.

- (a) Die Abbildung $F : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch $F(x) = x/(1 - \|x\|^2)$, ist ein Diffeomorphismus, womit $\mathbb{B}^n \approx \mathbb{R}^n$.
- (b) Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine glatte Karte auf M , dann ist $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

Als nächstes kommen wir zu einem der wichtigsten Hilfsmittel der Analysis auf Mannigfaltigkeiten, den Zerlegungen der Eins. Dieses Werkzeug erlaubt es global glatte Objekte aus lokal glatten zusammenzubasteln. Die folgenden Konstruktionen basieren dabei stark auf der Existenz von glatten Funktionen, die positiv sind in gewissen Bereichen einer glatten Mannigfaltigkeit und identisch Null sonst. Ist f eine reell- oder vektorwertige Funktion auf einem topologischen Raum X , so bezeichnen wir mit $\text{supp } f$ den *Träger* von f , d.h.

$$\text{supp } f = \text{clos } \{p \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Lemma 2.5 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Es gibt eine glatte Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq h(t) \leq 1$ und*

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq 1, \\ 0 & \text{für } t \geq 2. \end{cases}$$

- (b) *Es gibt eine glatte Funktion $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq H(x) \leq 1$ und*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \text{clos } B_1(0), \\ 0 & \text{für } x \notin \text{clos } B_2(0). \end{cases}$$

Beweis: Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, dass f glatt ist. Dazu genügt es nachzuweisen, dass f bei $t = 0$ beliebig oft stetig differenzierbar ist. Eine einfache Induktion zeigt, dass für $t > 0$, die k -te Ableitung von f die Form

$$f^{(k)}(t) = \frac{p_k(t)}{t^{2k}} e^{-1/t} \tag{2.1}$$

hat, wobei $p_k(t)$ ein Polynom ist. Da weiters für jedes $m \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t^m} = 0, \tag{2.2}$$

erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t) = 0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass für jedes $k \geq 0$ gilt $f^{(k)}(0) = 0$. Wir verwenden wieder Induktion nach k . Für $k = 0$ ist die Aussage richtig nach Definition. Wir können daher $k > 0$ annehmen. Es genügt nun zu zeigen, dass links- und rechtsseitige Ableitungen von $f^{(k+1)}(0)$ existieren und beide Null sind. Die linksseitige Ableitung ist dabei trivial, und für die rechtsseitige erhalten wir wegen (2.1) und (2.2),

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{p_k(t)}{t^{2k}} e^{-1/t} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_k(t)}{t^{2k+1}} e^{-1/t} = 0.$$

ad (a): Es sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(t) = \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}.$$

Offenbar erfüllt dann h die geforderten Eigenschaften.

ad (b): Es sei $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$H(x) = h(\|x\|).$$

Offenbar erfüllt dann H die geforderten Eigenschaften. ■

Wir benötigen auch noch die bereits angekündigte wichtige Aussage, dass jede (glatte) Mannigfaltigkeit parakompakt ist. Dazu erinnern wir zunächst an die Definition von Parakompaktheit.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X , so heißt eine weitere offene Überdeckung \mathcal{V} von X eine *Verfeinerung* von \mathcal{U} , wenn es zu jedem $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ gibt mit $V \subseteq U$. Ein topologischer Raum X heißt *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so nennen wir eine offene Überdeckung $\{V_i\}$ von M *regulär*, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- Die Überdeckung $\{V_i\}$ ist abzählbar und lokal endlich.
- Jede Menge V_i ist Koordinatenumgebung einer glatten Karte $\varphi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi_i(V_i) = B_3(0) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Die offenen Mengen $\{U_i := \varphi_i^{-1}(B_1(0))\}$ überdecken ebenfalls M .

Satz 2.6 *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann besitzt jede offene Überdeckung von M eine reguläre Verfeinerung. Insbesondere ist M parakompakt.*

Beweis: Es sei \mathcal{X} eine beliebige offene Überdeckung von M und $\{V_j\}$ eine abzählbare und lokal endliche Überdeckung von M durch relativ kompakte offene Mengen. Für $p \in M$ sei weiters W_p eine Umgebung von p , die nur endlich viele der Mengen V_j schneidet. Ersetzen wir W_p durch den Schnitt von W_p mit jenen V_j , die p enthalten, so können wir annehmen, dass für $p \in V_j$ auch $W_p \subseteq V_j$.

Da \mathcal{X} eine offene Überdeckung von M ist, gibt es zu jedem $p \in M$ ein $X \in \mathcal{X}$ mit $p \in X$. Bilden wir wieder den Schnitt von W_p mit X , so können wir auch annehmen, dass W_p in einem $X \in \mathcal{X}$ enthalten ist. Da M nach Proposition 1.7 eine Basis aus glatten Koordinatenkugeln besitzt, können wir schließlich noch annehmen, dass W_p Koordinatenumgebung einer glatten Kartenabbildung $\varphi_p : W_p \rightarrow B_3(0)$ ist, deren Zentrum in p liegt. Es sei $U_p = \varphi_p^{-1}(B_1(0))$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Familie $\{U_p : p \in \text{clos } V_k\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\text{clos } V_k$. Daher gibt es eine endliche Teilüberdeckung, etwa $U_k^1, \dots, U_k^{m_k}$. Es seien $(W_k^1, \varphi_k^1), \dots, (W_k^{m_k}, \varphi_k^{m_k})$ die zugehörigen glatten Karten. Die Vereinigung über alle $k, i \in \mathbb{N}$ der Mengen $\{W_k^i\}$ bildet offenbar eine offene Überdeckung von M , die \mathcal{X} verfeinert. Um zu zeigen, dass es sich dabei um eine reguläre Überdeckung handelt bleibt zu zeigen, dass sie lokal endlich ist.

Zu jedem Paar $k, i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $W_k^i \subseteq V_j$. Nach Konstruktion muss dann $V_j \cap \text{clos } V_k \neq \emptyset$, also auch $V_j \cap V_k \neq \emptyset$. Ist daher $W_k^i \cap W_{k'}^{i'} \neq \emptyset$, so gibt es Indizes $j, j' \in \mathbb{N}$, sodass die Mengen $V_j \cap V_{j'}$, $V_j \cap V_k$ und $V_{j'} \cap V_{k'}$ alle nicht leer sind. Da die $\{V_m\}$ lokal endlich sind, gibt es aber zu festem $j \in \mathbb{N}$, nur endlich viele solcher Indizes j', k' . Damit können auch nur endlich viele Mengen $W_{k'}^{i'}$ die Menge W_k^i schneiden. ■

Definition. Es sei M ein topologischer Raum und $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M . Eine Familie $\{\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ stetiger Funktionen heißt eine \mathcal{X} untergeordnete Zerlegung der Eins, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$ für alle $\alpha \in A$ und alle $x \in M$.
- $\text{supp } \psi_\alpha \subseteq X_\alpha$.
- Die Familie der Träger $\{\text{supp } \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ist lokal endlich.
- $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so nennen wir $\{\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ eine *glatte Zerlegung der Eins*, wenn jede der Funktionen ψ_α glatt ist.

Aus der Parakompaktheit einer glatten Mannigfaltigkeit, folgt nun die Existenz von Zerlegungen der Eins.

Satz 2.7 *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von M , dann gibt es eine \mathcal{X} untergeordnete glatte Zerlegung der Eins.*

Beweis: Nach Satz 2.6 gibt es eine reguläre Verfeinerung $\{W_i\}$ von \mathcal{X} . Für jedes i , sei $\varphi_i : W_i \rightarrow B_3(0)$ eine glatte Koordinatenabbildung. Wir setzen

$$U_i = \varphi_i^{-1}(B_1(0)) \quad \text{und} \quad V_i = \varphi_i^{-1}(B_2(0)).$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$, definieren wir $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_i = \begin{cases} H \circ \varphi_i & \text{auf } W_i, \\ 0 & \text{auf } M \setminus \text{clos } V_i, \end{cases}$$

wobei $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die glatte Funktion aus Lemma 2.5 (b) ist. Beachte, dass auf $W_i \setminus \text{clos } V_i$ die beiden Definitionen von f_i jeweils die Nullfunktion ergeben, womit f_i wohldefiniert und glatt ist. Es gilt weiters $\text{supp } f_i \subseteq W_i$.

Mit Hilfe der Funktionen f_i definieren wir nun neue Funktionen $g_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)}.$$

Da die Überdeckung $\{W_i\}$ lokal endlich ist, hat die Summe im Nenner der g_i nur endlich viele von Null verschiedene Terme in einer Umgebung von jedem Punkt und definiert daher eine glatte Funktion. Da weiters $f_i \equiv 1$ auf U_i und die $\{U_i\}$ ebenfalls eine Überdeckung von M bilden, ist der Nenner auch stets positiv, womit die g_i glatte Funktionen auf M sind. Offenbar gilt $0 \leq g_i \leq 1$ und $\sum_{i=1}^{\infty} g_i \equiv 1$.

Durch Umindizierung erhalten wir aus den g_i nun eine $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Da die Überdeckung $\{W_i\}$ eine Verfeinerung von \mathcal{X} ist, gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ einen Index $a(i) \in A$, sodass $W_i \subseteq X_{a(i)}$. Für jedes $\alpha \in A$, sei $\psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi_\alpha = \sum_{\{i \in \mathbb{N} : a(i) = \alpha\}} g_i.$$

Gibt es keinen Index i mit $a(i) = \alpha$, so ist die obige Summe als die Nullfunktion zu interpretieren. Da diese Summe wieder nur endlich viele von Null verschiedene Terme in einer Umgebung von jedem Punkt enthält, sind die ψ_α glatte Funktionen mit $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ und $\text{supp } \psi_\alpha \subseteq X_\alpha$. Darüberhinaus ist die Familie der Träger $\{\text{supp } \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokal endlich und $\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{\infty} g_i \equiv 1$. ■

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subseteq M$ abgeschlossen und $U \supseteq A$ eine offene Teilmenge von M . Eine stetige Funktion $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Bump Funktion* für A mit Träger in U , wenn $0 \leq \psi \leq 1$ und

$$\psi \equiv 1 \text{ auf } A \quad \text{und} \quad \text{supp } \psi \subseteq U.$$

Die Funktion H aus Lemma 2.5 (b) ist ein Beispiel einer Bump Funktion. Wie das folgende Korollar zu Satz 2.7 zeigt, existieren auf glatten Mannigfaltigkeiten stets glatte Bump Funktionen.

Korollar 2.8 *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, $A \subseteq M$ abgeschlossen und $U \supseteq A$ eine offene Teilmenge von M , dann gibt es eine glatte Bump Funktion für A mit Träger in U .*

Beweis: Es sei $U_0 = U$ und $U_1 = M \setminus A$. Bezeichnet $\{\psi_0, \psi_1\}$ die der offenen Überdeckung $\{U_0, U_1\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins, so gilt $\psi_1 \equiv 0$ auf A und daher $\psi_0 \equiv 1$ auf A . Damit ist aber ψ_0 die gesuchte glatte Bump Funktion. ■

Definition. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $A \subseteq M$. Wir nennen eine Abbildung $F : A \rightarrow N$ glatt, wenn es zu jedem $p \in A$ eine offene Umgebung $W \subseteq M$ von p gibt und eine glatte Abbildung $\bar{F} : W \rightarrow N$ deren Einschränkung auf $W \cap A$ mit F übereinstimmt.

Als eine zweite Anwendung von Satz 2.7 zeigen wir, dass glatte Funktionen auf abgeschlossenen Teilmengen einer glatten Mannigfaltigkeit M fortgesetzt werden können auf ganz M .

Korollar 2.9 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ abgeschlossen. Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Funktion, dann gibt es zu jeder offenen Menge $U \supseteq A$ eine glatte Funktion $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit*

$$\bar{f}|_A = f \quad \text{und} \quad \text{supp } \bar{f} \subseteq U.$$

Beweis: Für jedes $p \in A$ wählen wir eine Umgebung W_p von p und eine glatte Funktion $\bar{f}_p : W_p \rightarrow \mathbb{R}^k$, die mit f auf $W_p \cap A$ übereinstimmt. Ersetzen wir (falls notwendig) W_p durch $W_p \cap U$, so können wir annehmen, dass $W_p \subseteq U$. Die Familie $\{W_p : p \in A\} \cup \{M \setminus A\}$ ist eine offene Überdeckung von M . Es sei $\{\psi_p : p \in A\} \cup \{\psi_0\}$ eine dieser Überdeckung untergeordnete glatte Zerlegung der Eins mit $\text{supp } \psi_p \subseteq W_p$ und $\text{supp } \psi_0 \subseteq M \setminus A$.

Für jedes $p \in A$ ist das Produkt $\psi_p \bar{f}_p$ eine glatte Funktion auf W_p , die eine glatte Fortsetzung auf ganz M hat, indem sie einfach identisch Null auf $M \setminus \text{supp } \psi_p$ gesetzt wird. Wir können daher $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ folgendermaßen definieren

$$\bar{f}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) \bar{f}_p(x).$$

Da die Familie der Träger $\{\text{supp } \psi_p\}$ lokal endlich ist, hat diese Summe nur endlich viele von Null verschiedene Terme in einer Umgebung jedes Punktes von M und definiert daher eine glatte Funktion. Ist $x \in A$, dann gilt $\psi_0(x) = 0$ und $\bar{f}_p(x) = f(x)$ für jedes p für das $\psi_p(x) \neq 0$. Damit erhalten wir

$$\bar{f}(x) = \sum_{p \in A} \psi_p(x) f(x) = \left(\psi_0(x) + \sum_{p \in A} \psi_p(x) \right) f(x) = f(x).$$

Die Funktion \bar{f} ist also eine glatte Fortsetzung von f . Ist $x \in \text{supp } \bar{f}$, dann besitzt x eine Umgebung, auf der höchstens endlich viele der Funktionen ψ_p von Null verschieden sind. Da aber $x \in \text{supp } \psi_p$ für zumindest ein $p \in A$ sein muss, folgt $x \in W_p \subseteq U$. ■

Bemerkung.

- (a) Eine zu Korollar 2.9 analoge Aussage für analytische Funktionen auf einer analytischen Mannigfaltigkeit ist sicher falsch, da eine analytische Funktion, die auf einer zusammenhängenden Menge definiert und auf einer offenen Teilmenge verschwindet schon identisch Null sein muss.

Zum Abschluss dieses Kapitels konstruieren wir noch mit Hilfe von Satz 2.7 positive glatte Funktionen deren Sub-Niveaumengen alle kompakt sind.

Korollar 2.10 *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann gibt es eine positive glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Sub-Niveaumengen*

$$M_c = \{x \in M : f(x) \leq c\}$$

kompakt sind für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{V_j\}$ eine abzählbare offene Überdeckung von M durch relativ kompakte offene Mengen. Weiters sei $\{\psi_j\}$ eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins. Wir definieren $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(p) = \sum_{j=1}^{\infty} j\psi_j(p).$$

Da diese Summe nur endlich viele von Null verschiedene Terme in einer Umgebung jedes Punktes von M besitzt, ist f glatt. Weiters folgt aus

$$f(p) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(p) = 1,$$

dass f positiv ist. Es sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Ist $p \notin \bigcup_{j=1}^N \text{clos } V_j$, dann ist $\psi_j(p) = 0$ für $1 \leq j \leq N$, und damit

$$f(p) = \sum_{j=N+1}^{\infty} j\psi_j(p) > \sum_{j=N+1}^{\infty} N\psi_j(p) = N \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(p) = N.$$

Ist daher $f(p) \leq N$, dann folgt $p \in \bigcup_{j=1}^N \text{clos } V_j$. Damit ist für jedes $c \leq N$, die Menge M_c als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\bigcup_{j=1}^N \text{clos } V_j$ selbst kompakt. ■

3 Tangentialvektoren

Das Grundkonzept der Differentialrechnung (in einer oder in mehreren Variablen) ist die lineare Approximation. Um solchen linearen Approximationen auch auf Mannigfaltigkeiten Sinn zu geben, benötigen wir Tangentialräume an die Punkte einer glatten Mannigfaltigkeit, die wir uns als eine Art „lineares Modell“ für die Mannigfaltigkeit in der Nähe eines Punktes vorstellen können.

Zunächst betrachten wir sehr konkrete, geometrische Tangentialvektoren im \mathbb{R}^n . Das sind einfach Vektoren, die an einen Punkt im \mathbb{R}^n angehängt sind.

Definition. Der *geometrische Tangentialraum* an \mathbb{R}^n im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge \mathbb{R}_a^n definiert durch

$$\mathbb{R}_a^n = \{(a, v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ein *geometrischer Tangentialvektor* im \mathbb{R}^n ist ein Element von \mathbb{R}_a^n für ein $a \in \mathbb{R}^n$.

Wir schreiben im Folgenden ein Element $(a, v) \in \mathbb{R}_a^n$ in der Form v_a bzw. $v|_a$. Die Menge \mathbb{R}_a^n wird zu einem Vektorraum mit den Operationen

$$\begin{aligned} v_a + w_a &= (v + w)_a, \\ c(v_a) &= (cv)_a \end{aligned}$$

Bezeichnen $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von \mathbb{R}^n , so bilden offenbar die Vektoren $e_i|_a$, $1 \leq i \leq n$, eine Basis des n -dimensionalen Vektorraumes \mathbb{R}_a^n .

Um zum Begriff des Tangentialraumes an einen Punkt einer glatten Mannigfaltigkeit zu kommen, stehen uns bisher im wesentlichen nur glatte Funktionen und glatte Koordinatenabbildungen zur Verfügung. Eine Möglichkeit geometrische Tangentialvektoren auf glatte Funktionen im \mathbb{R}^n anzuwenden, ist die Richtungsableitung: Jedes $v_a \in \mathbb{R}_a^n$ bestimmt ein Funktional $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv).$$

Die Abbildung $D_v|_a$ ist linear und erfüllt darüber hinaus die Produktregel

$$D_v|_a(fg) = f(a)D_v|_a g + g(a)D_v|_a f.$$

Diese Eigenschaft führt auf folgende

Definition. Ist $a \in \mathbb{R}^n$, so nennen wir ein lineares Funktional $w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Derivation* an a , wenn für alle $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$w(fg) = f(a)wg + g(a)wf. \tag{3.1}$$

Es bezeichne $T_a(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Derivationen von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ an a .

Die Menge $T_a(\mathbb{R}^n)$ bildet offenbar einen Vektorraum mit den Operationen

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2)f &= w_1 f + w_2 f, \\ (cw)f &= c(wf). \end{aligned}$$

Lemma 3.1 *Es sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $w \in T_a(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *Ist f eine konstante Funktion, dann gilt $wf = 0$.*

(b) *Ist $f(a) = g(a) = 0$, dann gilt $w(fg) = 0$.*

Beweis: Aufgrund der Homogenität von w genügt es (a) für die Funktion $f(x) \equiv 1$ zu zeigen. Aus der Produktregel (3.1) folgt

$$wf = w(ff) = f(a)wf + f(a)wf = 2wf,$$

und damit $wf = 0$. Aussage (b) ist eine direkte Konsequenz der Produktregel (3.1). ■

Wie die folgende Proposition zeigt, ist der Vektorraum $T_a(\mathbb{R}^n)$ isomorph zum geometrischen Tangentialraum \mathbb{R}_a^n und damit insbesondere ebenfalls n -dimensional.

Proposition 3.2 *Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung*

$$v_a \mapsto D_v|_a$$

ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen \mathbb{R}_a^n und $T_a(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Da Richtungsableitungen linear (in den Richtungen) sind, ist die Abbildung $v_a \mapsto D_v|_a$ ebenfalls linear. Um zu zeigen, dass diese Abbildung injektiv ist, sei $v_a \in \mathbb{R}^n$ im Kern der Abbildung, d.h. $D_v|_a$ ist die Nullderivation. Ist $v_a = \sum_i v^i e_i|_a$ und f die j -te Koordinatenfunktion $x^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$0 = D_v|_a(x^j) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) \Big|_{x=a} = v^j.$$

Da $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig war, folgt $v|_a = 0$.

Es bleibt die Surjektivität der Abbildung zu zeigen. Es sei $w \in T_a(\mathbb{R}^n)$ und $v^1, \dots, v^n \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$v^i = w(x^i).$$

Wir zeigen im Folgenden, dass $w = D_v|_a$, wobei $v = \sum_i v^i e_i$. Dazu sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Nach der Taylorformel (mit Restglied) gibt es glatte Funktionen g_1, \dots, g_n auf \mathbb{R}^n mit $g_i(a) = 0$ für $1 \leq i \leq n$, sodass

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x^i - a^i).$$

Da die Summanden in der zweiten Summe ein Produkt von Funktionen sind, die bei $x = a$ verschwinden, folgt aus Lemma 3.1

$$wf = w(f(a)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(w(x^i) - w(a^i)) + \sum_{i=1}^n w(g_i(x)(x^i - a^i)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)v^i$$

und damit $wf = D_v|_a f$. Da f beliebig war, folgt $w = D_v|_a$. ■

Als direkte Folgerung von Proposition 3.2 notieren wir:

Korollar 3.3 Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ bilden die n Derivationen

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_a, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_a,$$

definiert durch

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

eine Basis von $T_a(\mathbb{R}^n)$.

Motiviert durch Proposition 3.2 geben wir nun folgende

Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir nennen ein lineares Funktional $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Derivation* an $p \in M$, wenn für alle $f, g \in C^\infty(M)$ gilt

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$$

Der Vektorraum $T_p M$ aller Derivationen von $C^\infty(M)$ an p heißt der Tangentialraum von M an p . Ein Element von $T_p M$ heißt Tangentialvektor von M an p .

Das Analogon zu Lemma 3.1 im Kontext glatter Mannigfaltigkeiten ist:

Lemma 3.4 Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $v \in T_p M$. Dann gelten folgende Aussagen:

- (a) Ist f eine konstante Funktion, dann gilt $v f = 0$.
- (b) Ist $f(p) = g(p) = 0$, dann gilt $v(fg) = 0$.

Um diese sehr abstrakte Definition von Tangentialvektoren an eine Mannigfaltigkeit mit geometrischen Tangentialvektoren im \mathbb{R}^n in Beziehung zu setzen, verwenden wir natürlich lokale Koordinaten. Dazu benötigen wir allerdings zunächst den Begriff des Differentials einer glatten Abbildung.

Definition. Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, so ist für jedes $p \in M$ das *Differential* $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ von F an der Stelle p definiert durch

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F).$$

Bemerkungen.

- (a) Das Funktional $dF_p(v) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Definition linear und auch eine Derivation, da

$$\begin{aligned} dF_p(v)(fg) &= v((fg) \circ F) = v((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= f(F(p))dF_p(v)(g) + g(F(p))dF_p(v)(f). \end{aligned}$$

Damit ist $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ wohldefiniert.

- (b) Das (totale) Differential einer glatten Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist eine lineare Abbildung (gegeben durch die Jacobi-Matrix von f), die die „beste lineare Approximation“ von f im jeweiligen Punkt darstellt. Das Differential einer glatten Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten spielt eine ganz analoge Rolle. Wie wir später sehen werden, wird dF_p in lokalen Koordinaten auch durch die Jacobi-Matrix der Koordinatendarstellung von F repräsentiert. In der Literatur trägt das Differential auch den Namen Pushforward, totale Ableitung oder Tangentialabbildung.

Lemma 3.5 *Sind M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen und $p \in M$, dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ist linear.
 (b) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_p M \rightarrow T_{G \circ F(p)} P$.
 (c) $d(\text{Id}_M)_p = \text{Id}_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$.
 (d) Ist F ein Diffeomorphismus, dann ist $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ein Vektorraum Isomorphismus und $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Beispiel.

Für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V und jedes $a \in V$, gibt es einen natürlichen (d.h. unabhängig von der Wahl einer Basis) Isomorphismus $V \rightarrow T_a V$, sodass für jede lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\cong} & T_a V \\
 \downarrow L & & \downarrow dL_a \\
 W & \xrightarrow{\cong} & T_{L(a)} W
 \end{array}$$

Beweis: Für $v \in V$ sei die Derivation $D_v|_a$ von $C^\infty(V)$ an a , gegeben durch

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv).$$

Offenbar definiert diese Zuordnung $v \mapsto D_v|_a$ eine basisunabhängige Abbildung $V \rightarrow T_a V$. Genau wie im Beweis für \mathbb{R}^n zeigt man leicht, dass es sich dabei um einen Isomorphismus handelt. Es sei nun $L : V \rightarrow W$ eine lineare, und damit insbesondere glatte, Abbildung. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 dL_a(D_v|_a) f &= D_v|_a (f \circ L) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(L(a + tv)) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(L(a) + tL(v)) = D_{L(v)}|_{L(a)} f.
 \end{aligned}$$

■

Um Koordinatendarstellungen von Tangentialvektoren behandeln zu können, müssen wir uns noch mit einem kleinen technischen Problem auseinandersetzen: Während wir den Tangentialraum in einem Punkt einer glatten Mannigfaltigkeit M über Derivationen auf ganz M eingeführt haben, sind Karten im Allgemeinen nur in offenen Teilmengen von M definiert. Wie der folgende Satz zeigt, sind aber tatsächlich Tangentialräume ebenfalls rein lokale Konstrukte:

Satz 3.6 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) *Es sei $p \in M$ und $v \in T_p M$. Sind f und g glatte Funktionen auf M , die in einer Umgebung von p übereinstimmen, dann gilt $vf = vg$.*
- (b) *Es sei $U \subseteq M$ eine offene Untermannigfaltigkeit von M und $\iota : U \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Dann ist das Differential $d\iota_p : T_p U \rightarrow T_p M$ für jedes $p \in U$ ein Isomorphismus.*

Beweis: ad (a): Aufgrund der Linearität von v genügt es zu zeigen, dass $vh = 0$ für jedes h , das in einer Umgebung von p verschwindet. Es sei $\psi \in C^\infty(M)$ eine glatte Bump Funktion, die 1 auf dem Träger von h ist und deren Träger in $M \setminus \{p\}$ liegt. Da $\psi h = h$ auf ganz M und $h(p) = \psi(p) = 0$, erhalten wir $vh = v(\psi h) = 0$ aus Lemma 3.4.

ad (b): Es sei B eine Umgebung von p mit $\text{clos } B \subseteq U$. Wir nehmen zunächst an, dass $v \in T_p U$ und $d\iota_p(v) = 0 \in T_p M$. Ist $f \in C^\infty(U)$ beliebig, dann gibt es nach Korollar 2.9 eine glatte Funktion $\bar{f} \in C^\infty(M)$ mit Träger in U und $\bar{f} = f$ auf $\text{clos } B$. Es folgt nun aber aus (a)

$$vf = v(\bar{f}|_U) = v(\bar{f} \circ \iota) = d\iota_p(v)\bar{f} = 0,$$

und damit $v = 0$, also die Injektivität von $d\iota_p$.

Es sei nun $w \in T_p M$ beliebig. Wir definieren $v : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $vf = w\bar{f}$, wobei \bar{f} eine beliebige glatte Funktion auf M ist, die mit f auf $\text{clos } B$ übereinstimmt. Nach (a) ist vf unabhängig von der Wahl von \bar{f} und damit wohldefiniert. Offenbar ist $v \in T_p(U)$ und es gilt für $g \in C^\infty(M)$,

$$d\iota_p(v)g = v(g \circ \iota) = w(\overline{g \circ \iota}) = wg,$$

wobei wir verwendet haben, dass g , $g \circ \iota$ und $\overline{g \circ \iota}$ alle auf B übereinstimmen. Damit ist auch die Surjektivität von $d\iota_p$ gezeigt. ■

Bemerkung.

- (a) Aufgrund von Satz 3.6 (b) können wir von nun an den Tangentialraum $T_p U$ für jedes $p \in U$ mit dem Tangentialraum $T_p M$ identifizieren. Damit können Derivationen aus $T_p U$ auch auf Funktionen auf ganz M angewandt werden.

Es sei nun (U, φ) eine glatte Karte für die glatte Mannigfaltigkeit M . Da φ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $\bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, folgt aus Satz 3.6 (b) und Lemma 3.5 (d), dass $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus ist.

Nach Korollar 3.3 besitzt $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ eine Basis aus den Derivationen $\partial/\partial x^i|_{\varphi(p)}$, $i = 1, \dots, n$. Damit bilden die Urbilder dieser Derivationen unter $d\varphi_p$ eine Basis für T_pM . Symbolisch schreiben wir diese Basisvektoren in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}$$

und nennen sie die *Koordinatenvektoren* an p bezüglich des gegebenen Koordinatensystems. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x^i}(\widehat{p}),$$

wobei $\widehat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ die Koordinatendarstellung von f und $\widehat{p} = (p^1, \dots, p^n) = \varphi(p)$ die Koordinatendarstellung von p ist.

Zusammenfassung. *Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ ist T_pM ein n -dimensionaler Vektorraum. Ist $(U, (x^1, \dots, x^n))$ eine beliebige glatte Karte, die p enthält, dann bilden die Koordinatenvektoren $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von T_pM .*

Jeder Tangentialvektor $v \in T_pM$ kann also eindeutig in der Form

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

geschrieben werden. Wir nennen (v^1, \dots, v^n) die *Komponenten* von v in Bezug auf das gegebene Koordinatensystem. Die Komponenten bestimmen sich leicht durch

$$v(x^j) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = v^j.$$

Wir wenden uns nun der Bestimmung von Differentialen in lokalen Koordinaten zu. Dazu betrachten wir zuerst den Spezialfall offener Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und einer glatten Funktion $F : U \rightarrow V$. Für $p \in U$ wollen wir die Matrix von $dF_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ in Bezug auf die Standardkoordinatenbasen bestimmen. Es bezeichne (x^1, \dots, x^n) die Koordinaten im Wertebereich und (y^1, \dots, y^m) jene im Bild. Dann folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) f &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ F) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^j}(F(p)) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} \right) f. \end{aligned}$$

Damit ist

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}, \quad (3.2)$$

oder in anderen Worten: Die Matrix von dF_p ist gerade die Jacobi-Matrix von F . Im betrachteten Spezialfall stimmt also das Differential $dF_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^m$ mit dem gewöhnlichen Differential $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ überein (wenn wir \mathbb{R}^k mit seinem Tangentialraum identifizieren).

Es sei nun $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Ist (U, φ) eine glatte Karte von M mit $p \in U$ und (V, ψ) eine glatte Karte von N mit $F(p) \in V$, dann ist die Koordinatendarstellung von F gegeben durch

$$\widehat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V).$$

Das Differential von $d\widehat{F}_{\widehat{p}}$ wird bezüglich der Standardkoordinatenbasen durch die Jacobi-Matrix von \widehat{F} dargestellt. Unter Verwendung von $F \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ \widehat{F}$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned} dF_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) &= dF_p \left(d(\varphi^{-1})_{\widehat{p}} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) \right) = d(\psi^{-1})_{\widehat{F}(\widehat{p})} \left(d\widehat{F}_{\widehat{p}} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} \right) \right) \\ &= d(\psi^{-1})_{\widehat{F}(\widehat{p})} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_{\widehat{F}(\varphi(p))} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \widehat{F}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_{F(p)}. \end{aligned}$$

Damit wird auch dF_p bezüglich der gegebenen Koordinatenbasen durch die Jacobi-Matrix der Koordinatendarstellung von F repräsentiert.

Bemerkung.

- (a) Seien (U, φ) und (V, ψ) zwei glatte Karten auf M und $p \in U \cap V$. Bezeichnen (x^1, \dots, x^n) die Koordinatenfunktionen von φ und $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ jene von ψ , so kann jeder Tangentialvektor v an p bezüglich der jeweiligen Koordinatenbasen dargestellt werden. Eine einfache Rechnung zeigt, dass sich die Komponenten von v bei einem Koordinatenwechsel wie folgt verhalten:

$$\bar{v}^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(\widehat{p}) v^i. \quad (3.3)$$

Wir wenden uns Tangentialräumen an Punkte auf Mannigfaltigkeiten mit Rand zu:

Definition. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand und $p \in M$. Der Tangentialraum T_pM von M an p ist der Vektorraum der Derivationen von $C^\infty(M)$ an p . Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, so ist das Differential von F an $p \in M$ definiert als die lineare Abbildung $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}(N)$ gegeben durch

$$(dF_p v)f = v(f \circ F).$$

Den wichtigsten Umstand dieser zum Fall glatter Mannigfaltigkeiten völlig analogen Definition halten wir in folgendem Resultat fest:

Proposition 3.7 *Ist M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und p ein Randpunkt von M , dann ist T_pM ein n -dimensionaler Vektorraum und die Koordinatenvektoren $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{1 \leq i \leq n}$ bezüglich einer beliebigen glatten Karte bilden eine Basis von T_pM .*

Beweis: Nach Definition ist $T_p M$ ein Vektorraum. Wie im Fall glatter Mannigfaltigkeiten zeigt man, dass das Differential $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{H}^n$ jeder glatten Koordinatenabbildung ein Isomorphismus ist. Es genügt daher zu zeigen, dass für jedes $a \in \partial \mathbb{H}^n$ der Tangentialraum $T_a \mathbb{H}^n$ ein n -dimensionaler Vektorraum ist, der von den Standardkoordinatenvektoren aufgespannt wird.

Dazu zeigen wir, dass das Differential $d\iota_a : T_a \mathbb{H}^n \rightarrow T_a \mathbb{R}^n$ der Inklusionsabbildung $\iota : \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus ist. Angenommen $d\iota_a v = 0$. Es sei f eine beliebige glatte Funktion in einer Umgebung von $a \in \mathbb{H}^n$. Eine Anwendung von Korollar 2.9 liefert eine glatte Funktion \bar{f} , definiert auf einer offenen Teilmenge U des \mathbb{R}^n mit $p \in U$, die auf $U \cap \mathbb{H}^n$ mit f übereinstimmt. Damit ist $f = \bar{f} \circ \iota$ auf der offenen Teilmenge $U \cap \mathbb{H}^n$ und daher

$$vf = v(\bar{f} \circ \iota) = (d\iota_a v) \bar{f} = 0,$$

woraus die Injektivität von $d\iota_a$ folgt. Es sei nun $w = \sum_i w^i \partial/\partial x^i|_a \in T_a \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir definieren $v \in T_a \mathbb{H}^n$ durch

$$vf = w\bar{f} = \sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(a).$$

Aufgrund der Stetigkeit der Ableitungen von \bar{f} in a sind diese bereits durch die Ableitungen von f in \mathbb{H}^n bestimmt, und v daher wohldefiniert. Es ist nun einfach zu zeigen, dass $w = d\iota_a v$, womit $d\iota_a$ auch surjektiv ist. ■

Ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir uns als Abbildung vorstellen, die an jeden Punkt aus U einen Vektor aus \mathbb{R}^n „anhängt“. Als Verallgemeinerung dieses bekannten Konzepts auf eine glatte Mannigfaltigkeit M liegt es nahe Abbildungen zu betrachten, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $v \in T_p M$ zuordnen. Wir widmen ein späteres Kapitel dem Studium von Vektorfeldern, müssen dazu aber zuerst ihren Wertebereich etwas präzisieren:

Definition. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so ist das *Tangentialbündel* TM von M definiert als disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume an Punkte aus M :

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{(p, v) : v \in T_p M\}.$$

Die *natürliche Projektion* $\pi : TM \rightarrow M$ ist gegeben durch $\pi(p, v) = p$.

Wie der folgende Satz zeigt, trägt das Tangentialbündel TM einer glatten Mannigfaltigkeit selbst wieder die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit.

Satz 3.8 *Ist M eine glatte n -Mannigfaltigkeit, so trägt das Tangentialbündel TM von M in natürlicher Weise die Struktur einer glatten $2n$ -Mannigfaltigkeit, sodass die Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ glatt ist.*

Beweis: Wir definieren zunächst Karten für TM und verwenden dann Lemma 1.8. Ist (U, φ) eine glatte Karte für M und bezeichnen (x^1, \dots, x^n) die Koordinatenfunktionen von φ , dann sei $\bar{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definiert durch

$$\bar{\varphi} \left(p, \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n).$$

Das Bild von $\bar{\varphi}$ ist offenbar $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, und damit eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^{2n} . Die Abbildung $\bar{\varphi}$ ist bijektiv, mit der Inversen

$$\bar{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(\varphi^{-1}(x), \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)} \right).$$

Die so definierten Karten $(\pi^{-1}(U), \bar{\varphi})$ (bzw. Koordinaten $(x^i, v^i)_{1 \leq i \leq n}$) für TM heißen die Standardkoordinaten für TM .

Es seien nun (U, φ) und (V, ψ) zwei glatte Karten für M , (x^i) und (\tilde{x}^i) die jeweiligen Koordinatenfunktionen von φ und ψ und $(\pi^{-1}(U), \bar{\varphi})$, $(\pi^{-1}(V), \bar{\psi})$ die zugehörigen Karten für TM . Die Mengen

$$\bar{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \bar{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

sind offen in \mathbb{R}^{2n} und der Kartenwechsel $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ kann explizit berechnet werden. Mit Hilfe von (3.3) ergibt er sich zu

$$\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(\hat{x}, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i}(\hat{x}) v^i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^i}(\hat{x}) v^i \right)$$

wobei $\hat{x} = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Damit ist $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}$ offenbar glatt.

Es sei nun $\{U_i\}$ eine abzählbare Überdeckung von M durch glatte Koordinatenumgebungen. Dann ist $\{\pi^{-1}(U_i)\}$ eine abzählbare Überdeckung von TM durch offene Mengen und die zugehörigen Standardkoordinaten erfüllen die offenbar die Bedingungen (a)-(d) von Lemma 1.8. Um (e) nachzuweisen, beachten wir, dass zwei verschiedene Punkte der Form $(p, v), (p, w) \in TM$ in derselben Karte liegen während es für Punkte der Form $(p, v), (q, w) \in TM$ disjunkte glatte Koordinatenumgebungen U, V von M gibt mit $p \in U$ und $q \in V$, womit $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ disjunkte glatte Koordinatenumgebungen sind, die (p, v) bzw. (q, w) enthalten. Damit liefert eine Anwendung von Lemma 1.8 nun eine glatte Struktur für TM , deren glatte Karten gerade die Standardkoordinaten sind.

Um zu sehen, dass π glatt ist, beachten wir, dass die Koordinatendarstellung von π in Bezug auf Karten (U, φ) für M und $(\pi^{-1}(U), \bar{\varphi})$ für TM die glatte Abbildung $\pi(x, v) = x$ ist, womit nach Lemma 2.3 $\pi : TM \rightarrow M$ glatt ist. ■

Durch Zusammenfassung der Differentiale einer glatten Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, erhalten wir eine Abbildung zwischen den entsprechenden Tangentialbündeln.

Definition. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ glatt. Das *globale Differential* von F ist die Abbildung $dF : TM \rightarrow TN$, deren Einschränkung auf jeden Tangentialraum $T_p M \subseteq TM$ durch dF_p gegeben ist.

Proposition 3.9 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ glatt. Dann ist auch das globale Differential $dF : TM \rightarrow TN$ glatt.*

Beweis: Aus der Koordinatendarstellung (3.2) von dF_p folgt, dass dF die folgende Koordinatendarstellung in Bezug auf die Standardkoordinaten für TM hat:

$$dF(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left(F^1(x), \dots, F^n(x), \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^1}{\partial x^i}(x)v^i, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^n}{\partial x^i}(x)v^i \right).$$

Damit ist die Koordinatendarstellung von dF glatt, wenn F glatt ist. ■

Die folgenden Eigenschaften des globalen Differentials folgen sofort aus Lemma 3.5.

Lemma 3.10 *Sind M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, dann gelten folgende Aussagen:*

(a) $d(G \circ F) = dG \circ dF.$

(b) $d(\text{Id}_M) = \text{Id}_{TM}.$

(c) *Ist F ein Diffeomorphismus, dann ist auch $dF : TM \rightarrow TN$ ein Diffeomorphismus und $(dF)^{-1} = d(F^{-1}).$*

Wir wollen als nächstes eine sehr geometrischen Interpretation von Tangentialvektoren geben. Dazu zunächst folgende

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (das wir als glatte Mannigfaltigkeit eventuell mit Rand auffassen). Eine *glatte Kurve* in M ist eine glatte Abbildung $\gamma : J \rightarrow M.$

Ist γ eine glatte Kurve in M , so ist der Tangentialvektor $\gamma'(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$ an γ bei $t_0 \in J$ definiert durch

$$\gamma'(t_0) = d\gamma_{t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right),$$

wobei $d/dt|_{t_0}$ die Standardkoordinatenbasis von $T_{t_0}\mathbb{R}$ ist.

Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so gilt

$$\gamma'(t_0)f = d\gamma_{t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (f \circ \gamma) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0).$$

Es sei nun (U, φ) eine glatte Karte für M mit Koordinatenfunktionen $(x^1, \dots, x^n).$ Ist $\gamma(t_0) \in U$, so können wir in der Nähe von t_0 die Koordinatendarstellung von γ in der Form $(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ schreiben. Aus der Formel für die Bestimmung des Differentials in lokalen Koordinaten erhalten wir daher

$$\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^n (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t_0)}. \quad (3.4)$$

Damit ist $\gamma'(t_0)$ der Tangentialvektor, dessen Komponenten bezüglich der gegebenen Koordinatenbasis die Ableitungen der Komponentenfunktionen von γ sind.

Wie der folgende Satz zeigt, stimmt der Tangentialraum in einem Punkt einer glatten Mannigfaltigkeit mit der Menge der Tangentialvektoren an glatte Kurven in M im gegebenen Punkt überein.

Satz 3.11 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Jeder Tangentialvektor $v \in T_p M$ ist Tangentialvektor an eine glatte Kurve in M durch p .*

Beweis: Es sei (U, φ) eine glatte Karte, die bei p zentriert ist, und $v = \sum_i v^i \partial/\partial x^i|_p$ in Bezug auf die entsprechende Koordinatenbasis. Wir definieren eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ durch

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv^1, \dots, tv^n).$$

Damit sind die Komponenten der Koordinatendarstellung von γ in der Notation von Formel (3.4) gegeben durch $\gamma^i(t) = tv^i$, $1 \leq i \leq n$. Offenbar ist $\gamma(0) = p$ und aus Formel (3.4) folgt sofort

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(0)} = v.$$

■

Die folgende Proposition gibt Auskunft darüber, wie sich Tangentialvektoren an Kurven unter der Komposition von Abbildungen verhalten:

Proposition 3.12 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist $\gamma : J \rightarrow M$ eine glatte Kurve in M , so ist der Tangentialvektor bei $t_0 \in J$ an die glatte Kurve $F \circ \gamma : J \rightarrow N$ gegeben durch*

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = dF(\gamma'(t_0)).$$

Beweis: Auswickeln der Definitionen ergibt

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = d(F \circ \gamma) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) = dF \circ d\gamma \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) = dF(\gamma'(t_0)).$$

■

Bemerkungen.

- (a) Proposition 3.12 kann (und wird im Folgenden) dazu verwendet werden Differentiale auszurechnen: Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $p \in M$, so können wir $dF_p(v)$ für $v \in T_p M$ bestimmen, indem wir eine glatte Kurve γ wählen, deren Tangentialvektor bei $t = 0$ gerade v ist, da

$$dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0).$$

- (b) Satz 3.11 motiviert einen alternativen Zugang zum Begriff des Tangentialraumes an eine Mannigfaltigkeit: Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Es bezeichne \mathcal{C}_p die Menge aller glatten Kurven $\gamma : J \rightarrow M$ mit $0 \in J$ und $\gamma(0) = p$. Auf \mathcal{C}_p sei weiters eine Äquivalenzrelation wie folgt definiert: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn $(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0)$ für jede glatte reellwertige Funktion f , die in einer Umgebung von p definiert ist. Die Abbildung $\Phi : \mathcal{C}_p / \sim \rightarrow T_p M$, gegeben durch $\Phi[\gamma] = \gamma'(0)$, ist dann bijektiv (Übungsbeispiel).
- (c) Eine weitere Alternative zum Begriff des Tangentialraumes, die besonders wichtig für analytische Mannigfaltigkeiten ist, verwendet den Begriff des Keimes einer Funktion: Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so heißt ein Paar (f, U) , wobei $U \subseteq M$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, ein glattes Funktionselement auf M . Zu gegebenem $p \in M$ nennen wir zwei Funktionselemente (f, U) und (g, V) mit $p \in U \cap V$ äquivalent, wenn $f \equiv g$ auf einer Umgebung von p . Die Äquivalenzklasse $[(f, U)] = [f]_p$ eines Funktionselements (f, U) bezeichnet man den *Keim* von f bei p .
- Für jedes $p \in M$ bezeichne C_p^∞ die Menge der Keime von glatten reellwertigen Funktionen bei p . Versehen mit den Operationen

$$\begin{aligned} [(f, U)] + [(g, V)] &= [(f + g, U \cap V)], \\ c[(f, U)] &= [(cf, U)], \\ [(f, U)] \cdot [(g, V)] &= [(fg, U \cap V)], \end{aligned}$$

wird C_p^∞ zu einer assoziativen Algebra über \mathbb{R} . Es ist nicht schwer zu zeigen, dass der Vektorraum der Derivationen von C_p^∞ an p , das sind alle linearen Funktionale $X : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$X[fg]_p = f(p)X[g]_p + g(p)X[f]_p,$$

isomorph zu $T_p M$ ist. (Übungsbeispiel).

4 Submersionen, Immersionen, Einbettungen

Im Folgenden gehen wir der Frage nach, ob wir aus den Eigenschaften der „besten linearen Approximation“ einer glatten Abbildung in der Nähe eines Punktes, also den Eigenschaften des Differential der Funktion, Rückschlüsse auf Eigenschaften der Funktion selbst ziehen können. Es stellt sich heraus, dass dies im Falle von Abbildungen mit konstantem Rang in der Tat möglich ist.

Als Vorbereitung der Diskussion der zentralen Begriffsbildungen dieses Abschnitts, erinnern wir zunächst an den Begriff der eigentlichen Abbildung aus der Topologie, der uns in dieser Vorlesung immer wieder begegnen wird.

Definition. Sind X und Y topologische Räume, so heißt eine Abbildung $F : X \rightarrow Y$ *eigentlich*, wenn das Urbild $F^{-1}(K)$ jeder kompakten Menge $K \subseteq Y$ kompakt ist.

Im Folgenden Lemma tragen wir einige einfache aber nützliche Kriterien zusammen, die sicherstellen, dass eine gegebene Abbildung eigentlich ist. Dazu erinnern wir noch daran, dass eine Teilmenge $A \subseteq X$ *saturiert* bezüglich einer Abbildung $F : X \rightarrow Y$ heißt, wenn $A = F^{-1}(F(A))$.

Lemma 4.1 *Es seien X und Y topologische Räume. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Ist X kompakt und Y ein Hausdorff Raum, dann ist jede stetige Abbildung $F : X \rightarrow Y$ eigentlich.*
- (b) *Ist $F : X \rightarrow Y$ eine eigentliche Abbildung und $A \subseteq X$ saturiert in Bezug auf F , dann ist $F|_A : A \rightarrow F(A)$ eigentlich.*
- (c) *Es seien X und Y Hausdorff Räume und $F : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Gibt es eine stetige Abbildung $G : Y \rightarrow X$ mit $G \circ F = \text{Id}_X$, dann ist F eigentlich.*

Beweis: ad (a): Ist $K \subseteq Y$ kompakt, dann ist K auch abgeschlossen in Y , da Y ein Hausdorff Raum ist. Aus der Stetigkeit von F folgt, dass auch $F^{-1}(K)$ abgeschlossen in X und, da X kompakt ist, damit auch kompakt ist.

ad (b): Es sei $K \subseteq F(A)$ eine beliebige kompakte Menge. Da A bezüglich F saturiert ist, gilt $(F|_A)^{-1}(K) = F^{-1}(K)$. Da F eigentlich ist, ist $F^{-1}(K)$ aber kompakt.

ad (c): Es sei $K \subseteq Y$ eine kompakte Teilmenge. Für jeden Punkt $x \in F^{-1}(K)$ gilt $x = G(F(x)) \in G(K)$. Da K abgeschlossen ist in Y , ist $F^{-1}(K)$ eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $G(K)$ und damit kompakt. ■

Für Abbildungen zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten gibt es eine weitere anschauliche Charakterisierung eigentlicher Abbildungen, die auf folgender Begriffsbildung beruht: Ist X ein topologischer Raum, so sagen wir eine Folge $p_i \in X$, $i \in \mathbb{N}$, *entflieht ins Unendliche*, wenn jede kompakte Teilmenge von X höchstens endlich viele Folgenglieder enthält.

Proposition 4.2 *Es seien M und N topologische Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $F : M \rightarrow N$ ist genau dann eigentlich, wenn für jede Folge $p_i \in M$, $i \in \mathbb{N}$, die ins Unendliche entflieht auch die Folge $F(p_i) \in N$ ins Unendliche entflieht.*

Beweis: Es sei zunächst F eigentlich und $p_i \in M$, $i \in \mathbb{N}$, eine Folge in M die ins Unendliche entflieht. Entflieht die Folge $F(p_i) \in N$, $i \in \mathbb{N}$, nicht ins Unendliche, dann gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq N$, die unendlich viele $F(p_j)$ enthält. Da F eigentlich ist, liegen damit aber unendlich viele p_j in der kompakten Menge $F^{-1}(K)$, ein Widerspruch.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass jede Folge in M die ins Unendliche entflieht durch F auf eine Folge in N abgebildet wird, die ebenfalls ins Unendliche entflieht. Wir benutzen nun, dass Folgenkompaktheit und Kompaktheit in Hausdorff Räumen, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, äquivalent sind. Es sei $K \subseteq N$ eine kompakte Menge und $L = F^{-1}(K) \subseteq M$. Wir zeigen, dass L folgenkompakt ist, d.h. jede Folge in L eine konvergente Teilfolge besitzt. Angenommen $p_i \in L$, $i \in \mathbb{N}$, besitzt keine konvergente Teilfolge, dann entflieht p_i , $i \in \mathbb{N}$, offenbar ins Unendliche, also auch die Folge $F(p_i) \in K$, $i \in \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch, da K kompakt ist. ■

Ein sehr wichtiger (wenn auch nicht schwieriger) Satz aus der Topologie besagt, dass jede stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorff Raum abgeschlossen ist. Im Hinblick auf Lemma 4.1 (a) stellt folgende Proposition eine Verallgemeinerung dieser Aussage im Kontext topologischer Mannigfaltigkeiten dar:

Proposition 4.3 *Ist $F : M \rightarrow N$ eine eigentliche stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Mannigfaltigkeiten, dann ist F abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $K \subseteq M$ eine abgeschlossene Teilmenge und $y \in \text{clos } F(K)$. Wir wollen zeigen, dass $y \in F(K)$. Dazu konstruieren wir zunächst eine Folge $y_i \in F(K)$, $i \in \mathbb{N}$ mit $y_i \rightarrow y$. Da N eine topologische Mannigfaltigkeit ist, besitzt y eine abzählbare Umgebungsbasis U_k , $k \in \mathbb{N}$. Indem wir zu Durchschnitten übergehen, können wir annehmen, dass $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$. Wir wählen nun ein y_i aus $U_i \cap F(K)$. Ist V eine beliebige Umgebung von y , dann gibt es einen Index $m \in \mathbb{N}$, sodass $U_k \subseteq V$ für alle $k \geq m$. Damit liegen aber alle $y_k \in V$ für $k \geq m$, womit $y_i \rightarrow y$. Da $y_i \in F(K)$, gibt es $x_i \in K$ mit $F(x_i) = y_i$.

Sei nun U eine relativ kompakte Umgebung von $y \in N$. Dann gilt $y_k \in U \subseteq \text{clos } U$ für hinreichend große k und damit $x_k \in F^{-1}(\text{clos } U)$. Da F eigentlich ist, ist die Menge $F^{-1}(\text{clos } U)$ kompakt. Daher besitzt die Folge x_k eine konvergente Teilfolge x_{k_j} , die, da K abgeschlossen ist, gegen ein $x \in K$ konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit von F folgt daher

$$F(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} F(x_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{k_j} = y \in F(K). \quad \blacksquare$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun den zentralen Definitionen dieses Abschnitts zuwenden.

Definition. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Der *Rang* von F bei $p \in M$ ist definiert als der Rang der linearen Abbildung $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$. Hat F denselben Rang k an jedem Punkt, so sagen wir F hat *konstanten Rang* und schreiben $\text{rank } F = k$.

Eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ heißt *Submersion*, wenn dF_p in jedem Punkt surjektiv ist (wenn also $\text{rank } F = \dim N$). Die Abbildung F heißt *Immersion*, wenn ihr Differential in jedem Punkt injektiv ist (wenn also $\text{rank } F = \dim M$). Eine *glatte Einbettung* ist eine Immersion $F : M \rightarrow N$ die auch eine topologische Einbettung ist (d.h. ein Homöomorphismus auf ihr Bild $F(M) \subseteq N$ mit der Spurtopologie).

Bemerkung.

- (a) Man beachte, dass eine *glatte Einbettung* eine Immersion und eine topologische Einbettung ist, nicht bloß eine topologische Einbettung, die auch glatt ist.

Beispiele.

- (a) Sind M_1, \dots, M_k glatte Mannigfaltigkeiten, dann ist jede der Projektionen $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ eine Submersion. Speziell ist auch die Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf die ersten n Koordinaten eine Submersion.
- (b) Seien M_1, \dots, M_k glatte Mannigfaltigkeiten und $p_i \in M_i$ beliebig fest gewählte Punkte. Jede der Abbildungen $\iota_j : M_j \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$ definiert durch

$$\iota_j(q) = (p_1, \dots, p_{j-1}, q, p_{j+1}, \dots, p_k)$$

ist eine glatte Einbettung. Speziell ist die Inklusionsabbildung $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, welche (x^1, \dots, x^n) auf $(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$ abbildet, eine glatte Einbettung.

- (c) Eine glatte Kurve $\gamma : J \rightarrow M$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist genau dann eine Immersion, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ ist für alle $t \in J$.
- (d) Ist $F : M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus, dann ist F sowohl eine Immersion als auch eine Submersion.
- (e) Die Abbildung $\gamma : (-\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t)$, ist eine injektive Immersion, da $\gamma'(t)$ stets ungleich Null ist. Es ist jedoch keine topologische Einbettung, da ihr Bild kompakt ist in der Spurtopologie, ihr Definitionsbereich jedoch nicht.
- (f) Die glatte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\gamma(t) = (t^3, 0)$, ist eine topologische Einbettung und glatt, aber keine glatte Einbettung, da $\gamma'(0) = 0$.

Da jede *abgeschlossene*, injektive, stetige Abbildung eine topologische Einbettung ist, erhalten wir aus Lemma 4.1 (a) und Proposition 4.3 sofort

Proposition 4.4 *Es sei $F : M \rightarrow N$ eine injektive Immersion. Ist M kompakt oder F eine eigentliche Abbildung, dann ist F eine glatte Einbettung mit abgeschlossenem Bild.*

Beispiel.

In Kapitel 2 haben wir gesehen, dass die Inklusionsabbildung $\iota : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ glatt ist, indem wir ihre Koordinatendarstellung in geeigneten glatten Karten angegeben haben. Bezüglich derselben Koordinaten ist es leicht nachzuweisen, dass das Differential von ι in jedem Punkt injektiv ist. Damit ist ι eine injektive Immersion und nach Proposition 4.4 daher auch eine glatte Einbettung.

Die analytischen Hilfsmittel zur Untersuchung, in wie weit das lokale Verhalten einer glatten Funktion durch das Verhalten ihres Differentials wiedergespiegelt wird, sind der Hauptsatz über implizite Funktionen und der Satz von der Umkehrabbildung:

Hauptsatz über implizite Funktionen. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge und es bezeichne $(x, y) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k)$ die Standardkoordinaten auf U . Weiters sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung, $(a, b) \in U$ und $c = \Phi(a, b)$. Ist die $k \times k$ Matrix*

$$\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial y^j}(a, b) \right)$$

nichtsingulär, dann gibt es Umgebungen $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und $W_0 \subseteq \mathbb{R}^k$ von b und eine glatte Abbildung $F : V_0 \rightarrow W_0$, sodass $\Phi^{-1}(c) \cap V_0 \times W_0$ der Graph von F ist, d.h. es gilt genau dann $\Phi(x, y) = c$ für $(x, y) \in V_0 \times W_0$, wenn $y = F(x)$.

Satz von der Umkehrabbildung. *Es seien U und V offene Teilmengen von \mathbb{R}^n und $F : U \rightarrow V$ eine glatte Abbildung. Ist $DF(p)$ nichtsingulär an einem Punkt $p \in U$, dann gibt es zusammenhängende Umgebungen $U_0 \subseteq U$ von p und $V_0 \subseteq V$ von $F(p)$, sodass $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ ein Diffeomorphismus ist.*

Die beiden Sätze sind eng miteinander verwandt, in dem Sinn, dass bei Kenntnis von einem der andere leicht hergeleitet werden kann. Die für unsere Zwecke wichtigste Konsequenz ist das folgende als Satz vom konstanten Rang bekannte Resultat:

Satz 4.5 *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $F : U \rightarrow V$ eine glatte Abbildung mit konstantem Rang k . Dann gibt es zu jedem $p \in U$ glatte Karten (U_0, φ) auf U zentriert in p und (V_0, ψ) auf V mit $F(U_0) \subseteq V_0$, sodass*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Beweis: Die Voraussetzung, dass $DF(p)$ Rang k hat, impliziert, dass die Jacobi-Matrix von F einen von Null verschiedenen k Minor besitzt. Durch Umordnen der Koordinaten (falls notwendig) können wir daher annehmen, dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{i,j=1,\dots,k}$$

nichtsingulär ist. Wir schreiben nun die Standardkoordinaten im \mathbb{R}^m in der Form $(x, y) = (x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{m-k})$ und für jene im \mathbb{R}^n verwenden wir $(v, w) = (v^1, \dots, v^k, w^1, \dots, w^{n-k})$. Durch eine Translation unserer Koordinatensysteme können wir weiters $p = (0, 0)$ und $F(p) = (0, 0)$ annehmen. Schreiben wir schließlich noch $F(x, y) = (Q(x, y), R(x, y))$ für geeignete glatte Abbildungen $Q : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $R : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, dann ist unsere Voraussetzung also nun, dass die Matrix $(\partial Q^i / \partial x^j)$ nichtsingulär in $(0, 0)$ ist.

Es sei $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$\varphi(x, y) = (Q(x, y), y).$$

Dann ist die Jacobi-Matrix von φ an $(0, 0)$ gegeben durch

$$D\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial x^j}(0, 0) & \frac{\partial Q^i}{\partial y^j}(0, 0) \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix}$$

und damit nichtsingulär. Nach dem Satz von der Umkehrabbildung gibt es daher zusammenhängende Umgebungen U_0 von $(0, 0)$ und \bar{U}_0 von $\varphi(0, 0) = (0, 0)$, sodass $\varphi : U_0 \rightarrow \bar{U}_0$ ein Diffeomorphismus ist. Schreiben wir die Inverse von φ in der Form $\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$, mit geeigneten glatten Abbildungen $A : \bar{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $B : \bar{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$, so folgt aus

$$(x, y) = \varphi(A(x, y), B(x, y)) = (Q(A(x, y), B(x, y)), B(x, y))$$

durch Vergleich der Komponenten, dass $B(x, y) = y$. Damit hat φ^{-1} die Form

$$\varphi^{-1}(x, y) = (A(x, y), y).$$

Beachten wir weiters, dass aus $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}$ noch $Q(A(x, y), y) = x$ folgt, so erhalten wir für $F \circ \varphi^{-1}$ die Form

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, \bar{R}(x, y)),$$

wobei $\bar{R} : \bar{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ definiert ist durch $\bar{R}(x, y) = R(A(x, y), y)$. Die Jacobi-Matrix von $F \circ \varphi^{-1}$ an einem beliebigen Punkt $(x, y) \in \bar{U}_0$ ist daher

$$D(F \circ \varphi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \frac{\partial \bar{R}^i}{\partial x^j}(x, y) & \frac{\partial \bar{R}^i}{\partial y^j}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Da die Zusammensetzung einer glatten Abbildung mit einem Diffeomorphismus ihren Rang nicht verändert, hat $F \circ \varphi^{-1}$ konstanten Rang k in \bar{U}_0 . Dies ist offenbar nur möglich, wenn die partiellen Ableitungen $\partial \bar{R}^i / \partial y^j$ auf \bar{U}_0 verschwinden. Das bedeutet, dass \bar{R} nicht von (y^1, \dots, y^{m-k}) abhängt. Schreiben wir $S(x) = \bar{R}(x, 0)$, so erhalten wir also

$$F \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x, S(x)). \quad (4.1)$$

Um den Beweis abzuschließen, benötigen wir noch eine glatte Karte (V_0, ψ) für \mathbb{R}^n um $(0, 0)$. Es sei $V_0 \subseteq V$ die offene Menge definiert durch

$$V_0 = \{(v, w) \in V : (v, 0) \in \bar{U}_0\}.$$

Dann ist V_0 Umgebung von $(0, 0)$, da $(0, 0) \in \bar{U}_0$. Wir definieren $\psi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\psi(v, w) = (v, w - S(v)).$$

Die Abbildung ψ ist ein Diffeomorphismus auf ihr Bild, da ihre Inverse einfach gegeben ist durch $\psi^{-1}(s, t) = (s, t + S(s))$. Damit ist (V_0, ψ) eine glatte Karte und aus (4.1) folgt wie gewünscht

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x, y) = \psi(x, S(x)) = (x, S(x) - S(x)) = (x, 0). \quad \blacksquare$$

Da wir obige Sätze nicht nur auf glatte Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n anwenden wollen, ist es nützlich diese auch für glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten zu formulieren.

Satz 4.6 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung für die $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ bijektiv ist. Dann gibt es zusammenhängende Umgebungen U_0 von p und V_0 von $F(p)$, sodass $F|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis: Die Voraussetzung, dass dF bijektiv ist in einem Punkt, impliziert, dass M und N dieselbe Dimension haben. Damit folgt die Behauptung aber aus dem Satz von der Umkehrabbildung angewandt auf die Koordinatendarstellung von F . ■

Korollar 4.7 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung.*

- (a) *F ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn F eine Immersion und eine Submersion ist.*
- (b) *Haben M und N dieselbe Dimension und ist F eine Immersion oder eine Submersion, dann ist F ein lokaler Diffeomorphismus. Ist F bijektiv, dann ist F ein Diffeomorphismus.*

Beweis: Aussage (a) ist ein Übungsbeispiel. Die Behauptung aus (b), dass F ein lokaler Diffeomorphismus ist, folgt unmittelbar aus Satz 4.6. Der Umstand, dass jeder bijektive lokale Diffeomorphismus ein Diffeomorphismus ist, liefert die zweite Behauptung. ■

Das Analogon von Satz 4.5 im Kontext glatter Mannigfaltigkeiten ist

Satz 4.8 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung mit konstantem Rang k . Dann gibt es zu jedem $p \in M$ glatte Koordinaten (x^1, \dots, x^m) zentriert in p und (v^1, \dots, v^n) zentriert in $F(p)$ bezüglich derer F die folgende Koordinatendarstellung besitzt*

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0). \quad (4.2)$$

Beweis: Ersetzen wir M und N jeweils durch glatte Kartenumgebungen $U \subseteq M$ von p und $V \subseteq N$ von $F(p)$ und F durch seine Koordinatendarstellung, so folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 4.5. ■

Das folgende Korollar zu Satz 4.8 zeigt, dass Abbildungen mit konstantem Rang genau diejenigen sind, deren lokales Verhalten mit dem ihrer Differentiale übereinstimmt.

Korollar 4.9 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist M zusammenhängend, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) *F hat konstanten Rang.*
- (b) *Zu jedem $p \in M$ gibt es glatte Karten um p und $F(p)$ bezüglich derer die Koordinatendarstellung von F linear ist.*

Beweis: Hat F konstanten Rang, dann hat F nach Satz 4.8 eine lineare Koordinatendarstellung der Form (4.2) in der Umgebung von jedem Punkt. Es besitze nun umgekehrt F eine lineare Koordinatendarstellung in einer Umgebung von jedem Punkt. Da jede lineare Abbildung konstanten Rang hat, hat F damit konstanten Rang in einer Umgebung von jedem Punkt. Da M zusammenhängend ist, hat daher F konstanten Rang auf ganz M . ■

Für den Beweis einer sehr nützlichen Konsequenz von Satz 4.8 benötigen wir Mengen von Maß Null auf Mannigfaltigkeiten.

Definition. Wir sagen eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hat *Maß Null*, wenn A für jedes $\delta > 0$ durch abzählbar viele Würfel (oder äquivalent dazu: Kugeln), deren Volumen in Summe kleiner als δ ist, überdeckt werden kann.

Ist A Teilmenge einer glatten n -Mannigfaltigkeit M , so sagen wir A hat Maß Null, wenn für jede glatte Karte (U, φ) für M die Menge $\varphi(A \cap U)$ Maß Null in \mathbb{R}^n hat.

Bemerkungen.

- (a) Wie die folgende einfache Aussage impliziert, ist der Begriff der Mengen von Maß Null auf Mannigfaltigkeiten invariant unter Diffeomorphismen:

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge von Maß Null und $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Dann hat $F(A)$ auch Maß Null.

- (b) Es sei A Teilmenge einer glatten n -Mannigfaltigkeit M . Ist $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ eine beliebige Überdeckung von A durch glatte Karten, sodass $\varphi(A \cap U_\alpha)$ Maß Null in \mathbb{R}^n hat für jedes α , dann hat A Maß Null in M .
- (c) Ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung, wobei U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^m mit $m < n$ ist, dann hat $F(U)$ Maß Null im \mathbb{R}^n .

Satz 4.10 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung mit konstantem Rang. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Ist F surjektiv, dann ist F eine Submersion.*
- (b) *Ist F injektiv, dann ist F eine Immersion.*
- (c) *Ist F bijektiv, dann ist F ein Diffeomorphismus.*

Beweis: Es sei $m = \dim M$, $n = \dim N$ und $k = \text{rank } F$. Für den Beweis von (a) nehmen wir an, dass F keine Submersion ist, dass also $k < n$. Nach Satz 4.8 besitzt daher F in der Umgebung von jedem Punkt eine Koordinatendarstellung der Form

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0). \quad (4.3)$$

Da jede offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt, können wir abzählbar viele glatte Karten $\{(U_i, \varphi_i)\}$ von M und $\{(V_i, \psi_i)\}$ von N finden, sodass die $\{U_i\}$ die Mannigfaltigkeit M überdecken, die Abbildung F die Menge U_i in V_i abbildet, und die Koordinatendarstellung von $F : U_i \rightarrow V_i$ durch (4.3) gegeben ist. Da $F(U_i)$ in einem k -dimensionalen Schnitt von V_i enthalten ist, hat $F(U_i)$ Maß Null in N . Da $F(M)$ die abzählbare Vereinigung der Mengen $F(U_i)$ ist, hat auch $F(M)$ Maß Null in N , womit F nicht surjektiv sein kann.

Für den Beweis von (b) nehmen wir an, dass F keine Immersion ist, dass also $k < m$. Auch in diesem Fall besitzt F in der Umgebung von jedem Punkt eine Koordinatendarstellung der Form (4.3). Es folgt, dass $F(0, \dots, 0, \varepsilon) = F(0, \dots, 0, 0)$ für jedes hinreichend kleine ε , womit F nicht injektiv ist.

Da eine bijektive glatte Abbildung von konstantem Rang nach (a) eine Submersion und nach (b) eine Immersion ist, haben M und N dieselbe Dimension. Korollar 4.7 impliziert nun, dass F ein Diffeomorphismus ist, was (c) beweist. ■

Mit Hilfe von Satz 4.8 wollen wir als nächstes unser Verständnis von Eigenschaften von Submersionen weiter ausbauen. Dazu benötigen wir zunächst die folgende

Definition. Es seien M und N topologische Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung. Ein *Schnitt* von π ist eine stetige Rechtsinverse für π , d.h. eine stetige Abbildung $\sigma : N \rightarrow M$, sodass

$$\pi \circ \sigma = \text{id}_N.$$

Ein *lokaler Schnitt* von π ist eine stetige Abbildung $\sigma : U \rightarrow M$ definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq N$ mit $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$.

Einige der wichtigsten Eigenschaften von Submersionen folgen aus dem Umstand, dass diese eine Vielzahl von lokalen Schnitten zulassen.

Satz 4.11 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \rightarrow N$ eine Submersion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Jeder Punkt von M ist im Bild eines lokalen glatten Schnitts von π enthalten.*
- (b) *π ist eine offene Abbildung.*

Beweis: ad (a): Es sei $p \in M$ und $q = \pi(p) \in N$. Da eine Submersion konstanten Rang hat, können wir nach Satz 4.8 glatte Koordinaten (x^1, \dots, x^m) zentriert in p und (y^1, \dots, y^k) zentriert in q so wählen, dass π die Koordinatendarstellung

$$\pi(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k)$$

besitzt. Ist nun ε hinreichend klein, so ist der Koordinatenwürfel

$$C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^m : |x^i| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, m\}$$

eine Umgebung von p deren Bild unter π der Koordinatenwürfel

$$C'_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^k : |y^i| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, k\}$$

ist. Die Abbildung $\sigma : C'_\varepsilon \rightarrow C_\varepsilon$, definiert durch ihre Koordinatendarstellung $\sigma(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$, ist daher ein glatter lokaler Schnitt von π mit $\sigma(q) = p$.

ad (b): Es sei W eine beliebige offene Teilmenge von M und $q \in \pi(W)$. Für jedes $p \in W$ mit $\pi(p) = q$, enthält W , nach dem Beweis von (a), einen offenen Koordinatenwürfel C_ε zentriert in p , sodass $\pi(C_\varepsilon)$ ein offener Koordinatenwürfel in $\pi(W)$ zentriert in $\pi(p) = q$ ist. Damit ist $\pi(W)$ offen. ■

Schließlich fassen wir mit unserem folgenden Resultat noch zwei nützliche Aussagen über die Komposition glatter Abbildungen mit Submersionen zusammen.

Proposition 4.12 *Es seien M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \rightarrow N$ eine surjektive Submersion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Eine Abbildung $F : N \rightarrow P$ ist genau dann glatt, wenn $F \circ \pi$ glatt ist.*
- (b) *Ist $F : M \rightarrow P$ eine glatte Abbildung, die konstant ist auf den Fasern von π , dann gibt es eine eindeutige glatte Abbildung $\bar{F} : N \rightarrow P$ mit $\bar{F} \circ \pi = F$.*

Beweis: ad (a): Wenn F glatt ist, ist auch die Zusammensetzung $F \circ \pi$ glatt. Nehmen wir daher umgekehrt an, dass $F \circ \pi$ glatt ist und es sei $q \in N$ beliebig. Für jedes $p \in \pi^{-1}(q)$ gibt es nach Satz 4.11 (a) eine Umgebung U von q und einen glatten lokalen Schnitt $\sigma : U \rightarrow M$ von π mit $\sigma(q) = p$. Damit impliziert $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$ aber

$$F|_U = F|_U \circ \text{Id}_U = F|_U \circ (\pi \circ \sigma) = (F \circ \pi) \circ \sigma$$

was als Zusammensetzung glatter Abbildungen glatt ist. Damit ist F in einer Umgebung von jedem Punkt glatt, und damit insgesamt glatt.

ad (b): Wenn \bar{F} existiert, muss offenbar $\bar{F}(q) = F(p)$ für $p \in \pi^{-1}(q)$ gelten. Wir verwenden diese einfache Beobachtung zur Definition von \bar{F} : Für $q \in N$ sei $\bar{F}(q) = F(p)$, wobei $p \in M$ ein beliebiger Punkt aus der Faser $\pi^{-1}(q)$ ist. Da π surjektiv ist, ist $\pi^{-1}(q)$ sicher nicht leer. Da F konstant auf den Fasern von π ist, ist \bar{F} wohldefiniert und erfüllt $\bar{F} \circ \pi = F$ nach Konstruktion. Damit ist aber \bar{F} auch glatt nach (a). ■

Zum Abschluss dieses Abschnitts kommen wir zu einer sehr wichtigen Klasse glatter Abbildungen, den glatten Überlagerungen, die vor allem für tiefere Untersuchungen glatter Mannigfaltigkeiten unerlässlich ist. Dazu erinnern wir zunächst an Überlagerungen topologischer Räume:

Definition. Sind \bar{X} und X topologische Räume, wobei \bar{X} ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum ist, so heißt eine surjektive und stetige Abbildung $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ eine *Überlagerung*, wenn es zu jedem $p \in X$ eine zusammenhängende Umgebung U gibt, sodass jede Komponente von $\pi^{-1}(U)$ homöomorph auf U abgebildet wird. Wir sagen dann, dass U *gleichmäßig überlagert* wird von π . Der Raum X heißt die *Basis der Überlagerung* und \bar{X} wird *Überlagerungsraum* genannt.

Bemerkungen.

- (a) Jede Überlagerung $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus (d.h. jedes $q \in \bar{X}$ hat eine Umgebung $U \subseteq \bar{X}$, sodass die Einschränkung von π auf U ein Homöomorphismus ist) und eine offene Abbildung.
- (b) Eine injektive Überlagerung ist ein Homöomorphismus.
- (c) Ist $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann hat jede Faser $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$, dieselbe Kardinalität, welche die Anzahl der *Blätter* der Überlagerung genannt wird.

Definition. Ist $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $F : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, so heißt eine stetige Abbildung $\bar{F} : Y \rightarrow \bar{X}$ ein *Lifting* von F , wenn

$$\pi \circ \bar{F} = F.$$

Liftings müssen im Allgemeinen weder existieren, noch eindeutig sein. Die von uns gestellten Zusammenhangsbedingungen an \bar{X} stellen allerdings sicher, dass für Wege in X stets ein Lifting existiert:

Satz 4.13 *Es sei $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *Weg-Lifting*

Ist $f : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg und $\bar{q}_0 \in \bar{X}$ mit $\pi(\bar{q}_0) = f(0)$, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Lifting $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow \bar{X}$ von f mit $\bar{f}(0) = \bar{q}_0$.

(b) *Homotopie-Lifting*

Sind $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ homotope Wege und $\bar{f}, \bar{g} : [0, 1] \rightarrow \bar{X}$ Liftings von f und g mit $\bar{f}(0) = \bar{g}(0)$, dann sind auch \bar{f} und \bar{g} homotop.

(c) *Eindeutigkeit von Liftings*

Ist Y zusammenhängend und $F : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, dann sind je zwei Liftings von F , die an einem Punkt übereinstimmen, bereits identisch.

Beweis: Siehe z.B. das Buch: J.M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 202, Springer, New York, 2000. ■

Im Kontext glatter Mannigfaltigkeiten betrachtet man restriktivere Überlagerungen:

Definition. Sind \bar{M} und M zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeiten, so heißt eine surjektive und glatte Abbildung $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ eine *glatte Überlagerung*, wenn es zu jedem $p \in M$ eine zusammenhängende Umgebung U gibt, sodass jede Komponente von $\pi^{-1}(U)$ diffeomorph auf U abgebildet wird. Wir sagen dann auch hier, dass U *gleichmäßig überlagert* wird von π . Die Mannigfaltigkeit M heißt die *Basis der glatten Überlagerung* und \bar{M} wird *Überlagerungsmannigfaltigkeit* genannt.

Grundlegende einfache Eigenschaften topologischer Überlagerungen übertragen sich sofort auf glatte Überlagerungen:

Proposition 4.14 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Jede glatte Überlagerung $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ ist ein lokaler Diffeomorphismus, eine Submersion und eine offene Abbildung.*

(b) *Eine injektive glatte Überlagerung ist ein Diffeomorphismus.*

(c) *Eine topologische Überlagerung ist genau dann eine glatte Überlagerung, wenn sie ein lokaler Diffeomorphismus ist.*

Die folgenden Resultate sind Versionen von Satz 4.11 (a) und Proposition 4.12 (a) im Kontext glatter Überlagerungen:

Proposition 4.15 *Es sei $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ eine glatte Überlagerung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Es gibt zu jedem $q \in \overline{M}$ eine Umgebung U von $p = \pi(q)$ und einen glatten lokalen Schnitt $\sigma : U \rightarrow \overline{M}$, sodass $\sigma(p) = q$. Insbesondere ist jeder Punkt von \overline{M} im Bild eines glatten lokalen Schnitts von π .*
- (b) *Es sei N eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ ist genau dann glatt, wenn die Abbildung $F \circ \pi : \overline{M} \rightarrow N$ glatt ist.*

Wie der folgende Satz zeigt, induzieren topologische Überlagerungen von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten eine glatte Struktur auf dem Überlagerungsraum.

Satz 4.16 *Es sei M eine zusammenhängende glatte n -Mannigfaltigkeit und $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ eine topologische Überlagerung. Dann ist auch \overline{M} eine topologische n -Mannigfaltigkeit, die mit einer eindeutig bestimmten glatten Struktur versehen werden kann, sodass π eine glatte Überlagerung wird.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass \overline{M} eine topologische n -Mannigfaltigkeit ist. Da π ein lokaler Homöomorphismus ist, folgt sofort, dass \overline{M} lokal Euklidisch ist.

Es seien $p, q \in \overline{M}$ verschiedene Punkte. Ist $\pi(p) = \pi(q)$ und $U \subseteq M$ eine gleichmäßig überlagerte offene Menge, die $\pi(p)$ enthält, dann sind die Komponenten von $\pi^{-1}(U)$, die p und q enthalten, disjunkte offene Mengen in \overline{M} . Ist $\pi(p) \neq \pi(q)$, dann gibt es disjunkte offene Mengen $U, V \subseteq M$, die $\pi(p)$ bzw. $\pi(q)$ enthalten, womit aber $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ offene Mengen in \overline{M} sind, die p und q trennen. Insgesamt ist daher \overline{M} ein Hausdorff Raum.

Um nachzuweisen, dass \overline{M} das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, zeigen wir zunächst, dass jede Faser $\pi^{-1}(q)$, $q \in M$, abzählbar ist. Dazu genügt es nach Satz 1.5 eine surjektive Abbildung $\beta : \pi_1(M, q) \rightarrow \pi^{-1}(q)$ zu finden. Dazu sei $\bar{q}_0 \in \pi^{-1}(q)$ beliebig und $[f] \in \pi_1(M, q)$ die Homotopieklasse einer beliebigen Schleife $f : [0, 1] \rightarrow M$ mit Basispunkt q . Nach Satz 4.13 (a) gibt es ein Lifting (nicht notwendig eine Schleife) $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow \overline{M}$ von f mit Anfangspunkt \bar{q}_0 . Nach Satz 4.13 (b) sind außerdem solche Liftings homotoper Schleifen mit Basispunkt q wieder homotop und haben daher denselben Endpunkt. Damit hängt $\bar{f}(1) \in \pi^{-1}(q)$ nur von der Homotopieklasse von f ab und wir können $\beta[f] = \bar{f}(1)$ setzen. Da \overline{M} als zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum, auch wegzusammenhängend ist (siehe 1. Übungsblatt), gibt es zu jedem $\bar{q} \in \pi^{-1}(q)$ einen Weg $\bar{g} : [0, 1] \rightarrow \overline{M}$ von \bar{q}_0 nach \bar{q} . Daher ist $\bar{q} = \beta[\pi \circ \bar{g}]$ und damit β surjektiv.

Die Vereinigung aller gleichmäßig überlagerten offenen Mengen bildet eine offene Überdeckung von M und besitzt, da M eine glatte Mannigfaltigkeit ist, daher eine abzählbare Teilüberdeckung $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. Nach dem zuvor gezeigten, besitzt $\pi^{-1}(U_i)$ höchstens abzählbar viele Komponenten. Da jede Komponente homöomorph zu U_i ist, besitzt sie eine abzählbare Basis für ihre Topologie. Die Vereinigung all dieser abzählbaren Basen bildet wiederum eine abzählbare Basis für die Topologie von \overline{M} , womit \overline{M} das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Zur Konstruktion eines glatten Atlas auf \overline{M} sei $\overline{q} \in \overline{M}$ und U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $\pi(\overline{q})$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass U auch die Koordinatenumgebung einer glatten Kartenabbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist. Bezeichnet \overline{U} die Komponente von $\pi^{-1}(U)$, die \overline{q} enthält, und setzen wir $\overline{\varphi} = \varphi \circ \pi : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, so ist $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ eine Karte auf \overline{M} und alle solche Karten überdecken \overline{M} . Überschneiden sich zwei solcher Karten $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ und $(\overline{V}, \overline{\psi})$, so ist der Kartenwechsel gegeben durch

$$\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1} = (\psi \circ \pi|_{\overline{U} \cap \overline{V}}) \circ (\varphi \circ \pi|_{\overline{U} \cap \overline{V}})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$$

und damit glatt. Damit erhalten wir einen glatten Atlas, der eine glatte Struktur auf \overline{M} bestimmt. Der Nachweis, dass es sich dabei um die eindeutig bestimmte glatte Struktur handelt bezüglich der π glatt ist, ist ein Übungsbeispiel. ■

Selbst für surjektive lokale Diffeomorphismen ist es im Allgemeinen nicht leicht nachzuweisen, dass es sich um Überlagerungen handelt. Im Folgenden werden wir ein Kriterium angeben, dass dies aber sicherstellt. Es basiert auf dem Begriff der eigentlichen Abbildung.

Satz 4.17 *Es seien \overline{M} und M zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi : \overline{M} \rightarrow M$ ein eigentlicher lokaler Diffeomorphismus. Dann ist π eine glatte Überlagerung.*

Beweis: Da π ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist π speziell auch offen, und als eigentliche Abbildung, nach Proposition 4.3 auch abgeschlossen. Damit ist $\pi(\overline{M})$ offen und abgeschlossen in M . Da M zusammenhängend ist, muss $\pi(\overline{M}) = M$ gelten, π ist also surjektiv.

Es sei $p \in M$ beliebig. Da π ein lokaler Diffeomorphismus ist, hat jeder Punkt von $\pi^{-1}(p)$ eine Umgebung auf der π injektiv ist. Das bedeutet aber, dass $\pi^{-1}(p)$ eine diskrete Menge ist, d.h. zu jedem $q \in \pi^{-1}(p)$ gibt es eine Umgebung U , sodass $U \cap \pi^{-1}(p) = \{q\}$. Da π eigentlich ist, ist die Menge $\pi^{-1}(p)$ aber auch kompakt und muss daher endlich sein, etwa $\pi^{-1}(p) = \{\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_k\}$. Zu jedem $1 \leq i \leq k$ gibt es eine Umgebung \overline{V}_i von \overline{p}_i die durch π diffeomorph auf eine Umgebung $V_i \subseteq M$ abgebildet wird. O.B.d.A. können wir $\overline{V}_i \cap \overline{V}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ annehmen.

Setzen wir $U = V_1 \cap \dots \cap V_k$, dann ist U eine Umgebung von p mit

$$U \subseteq V_i \tag{4.4}$$

für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$. Da $K = \overline{M} \setminus (\overline{V}_1 \cup \dots \cup \overline{V}_k)$ abgeschlossen ist in \overline{M} und π eine abgeschlossene Abbildung ist, ist auch $\pi(K) \subseteq M$ abgeschlossen. Wir können daher U durch $U \setminus \pi(K)$ ersetzen, sodass weiter (4.4) gilt und zusätzlich

$$\pi^{-1}(U) \subseteq \overline{V}_1 \cup \dots \cup \overline{V}_k. \tag{4.5}$$

Nun ersetzen wir noch, falls notwendig, U durch die Zusammenhangskomponente von U , die p enthält und zeigen nun, dass U gleichmäßig überlagert wird von π . Dazu sei $\overline{U}_i = \pi^{-1}(U) \cap \overline{V}_i$. Aufgrund von (4.5) ist dann $\pi^{-1}(U) = \overline{U}_1 \cup \dots \cup \overline{U}_k$. Da $\pi : \overline{V}_i \rightarrow V_i$ ein Diffeomorphismus ist, impliziert (4.4), dass auch $\pi : \overline{U}_i \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist, womit insbesondere \overline{U}_i zusammenhängend ist. Da $\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_k$ disjunkte zusammenhängende Teilmengen von $\pi^{-1}(U)$ sind, handelt es sich dabei genau um die Zusammenhangskomponenten von $\pi^{-1}(U)$. ■

5 Untermannigfaltigkeiten

Viele der bekanntesten Beispiele von Mannigfaltigkeiten, wie etwa die n -Sphäre \mathbb{S}^n oder der Torus \mathbb{T}^n , treten als Teilmengen anderer Mannigfaltigkeiten auf. In diesem Abschnitt befassen wir uns daher mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen, eine Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit selbst als glatte Mannigfaltigkeit aufgefasst werden kann. Dabei betrachten wir zwei Fälle, die eingebetteten und die immersierten Untermannigfaltigkeiten.

Im Folgenden identifizieren wir für $k < n$ den \mathbb{R}^k mit dem Unterraum von \mathbb{R}^n gegeben durch

$$\{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Glatte Untermannigfaltigkeiten werden wir durch Mengen modellieren, die lokal homöomorph zu offenen Teilmengen des \mathbb{R}^k sind.

Definition. Es seien $k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$, $c^{k+1}, \dots, c^n \in \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen eine Teilmenge von U der Form

$$S = \{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n\}$$

einen k -Schnitt von U .

Bemerkung.

- (a) Offenbar ist jeder k -Schnitt einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^k .
- (b) Wir werden manchmal auch k -Schnitte betrachten, bei denen wir andere als die letzten Koordinaten gleich einer Konstante setzen.

Definition. Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine glatte Karte auf M . Wir nennen eine Teilmenge $S \subseteq U$ einen k -Schnitt von U , wenn $\varphi(S)$ ein k -Schnitt von $\varphi(U)$ ist. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt *eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension k* , wenn es zu jedem Punkt $p \in S$ eine glatte Karte (U, φ) von M gibt, sodass $p \in U$ und $U \cap S$ ein k -Schnitt von U ist. In diesem Fall nennen wir (U, φ) eine Schnittkarte für S in M und die zugehörigen Koordinaten (x^1, \dots, x^n) nennen wir Schnittkoordinaten.

Ist S eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M , so heißt $\dim M - \dim S$ die Kodimension von S in M . Eine eingebettete Hyperfläche ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1. Offene Untermannigfaltigkeiten betrachten wir als eingebettete Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 0.

Bemerkung.

- (a) Es ist manchmal praktisch mit Schnittkoordinaten zu arbeiten bei denen $c^{k+1} = \dots = c^n = 0$. Dies kann durch Subtraktion einer Konstante von jeder Koordinatenfunktion aber leicht erreicht werden.

Wie das folgende Übungsbeispiel zeigt, ist die Definition von eingebetteten Untermannigfaltigkeiten eine lokale.

Lemma 5.1 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S eine Teilmenge von M . Besitzt jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung $U \subseteq M$, sodass $U \cap S$ eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit von U ist, dann ist auch S eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit von M .*

Unser nächstes Resultat erklärt den Namen „eingebettete“ Untermannigfaltigkeit.

Satz 5.2 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit von M . Versehen mit der Spurtopologie wird S zu einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension k , die eine eindeutige glatte Struktur trägt, sodass die Inklusionsabbildung $S \hookrightarrow M$ eine glatte Einbettung ist.*

Beweis: Da wir S mit der Spurtopologie versehen, erbt S die Hausdorff Eigenschaft von M und erfüllt auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Um zu zeigen, dass S lokal Euklidisch ist, konstruieren wir einen Atlas für S . Die Idee dabei ist es, aus den gegebenen Schnittkoordinaten (x^1, \dots, x^n) von S in M , lokale Koordinaten (x^1, \dots, x^k) für S zu erhalten.

Dazu bezeichne $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten. Ist (U, φ) eine Schnittkarte für S , dann seien

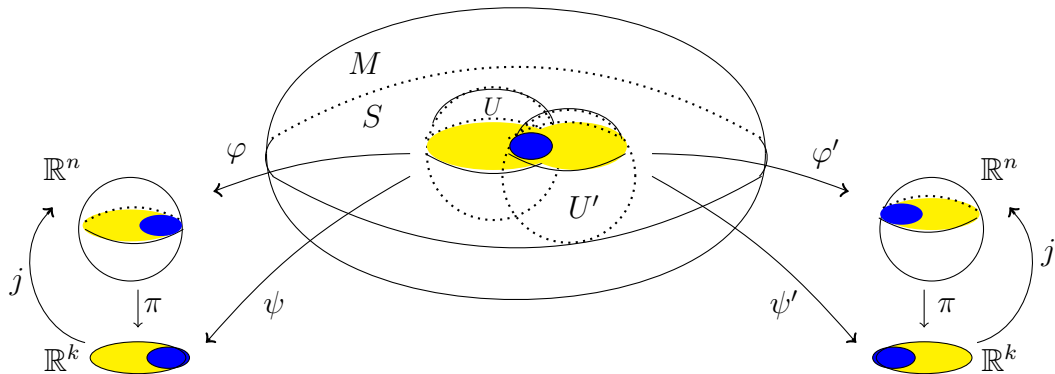
$$V = U \cap S, \quad \bar{V} = \pi \circ \varphi(V), \quad \psi = \pi \circ \varphi|_V : V \rightarrow \bar{V}.$$

Da φ und π beide offene Abbildungen sind, ist \bar{V} offen in \mathbb{R}^k . Die Abbildung ψ ist ein Homöomorphismus, da ψ die stetige Inverse $\varphi^{-1} \circ j|_{\bar{V}}$ besitzt, wobei $j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch

$$j(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, c^{k+1}, \dots, c^n).$$

Damit ist S eine topologische k -Mannigfaltigkeit und die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow M$ eine topologische Einbettung.

Um S mit einer glatten Struktur zu versehen, verwenden wir die oben konstruierten Karten und zeigen, dass diese glatt kompatibel sind. Es seien (U, φ) und (U', φ') zwei Schnittkarten für S in M und $(V, \psi), (V', \psi')$ die zugehörigen Karten für S .



Der Kartenwechsel $\psi' \circ \psi^{-1}$ ist dann gegeben durch

$$\psi' \circ \psi^{-1} = \pi \circ \varphi' \circ \varphi^{-1} \circ j,$$

was als Zusammensetzung der glatten Abbildungen π , $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ und j selbst glatt ist. Damit ist der von uns konstruierte Atlas ein glatter Atlas, der eine eindeutig bestimmte glatte Struktur auf S bestimmt.

In Bezug auf eine Schnittkarte (U, φ) und die zugehörige Karte (V, ψ) von S , hat die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow M$ die Koordinatendarstellung

$$\iota(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, c^{k+1}, \dots, c^n),$$

was offenbar eine Immersion ist. Damit ist die Inklusionsabbildung ι eine injektive Immersion und eine topologische Einbettung, also eine glatte Einbettung.

Es sei nun \mathcal{A} eine (weitere) glatte Struktur auf S für die die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow M$ eine glatte Einbettung ist. Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{A} mit der von uns konstruierten glatten Struktur übereinstimmt. Dazu genügt es nachzuweisen, dass die von uns konstruierten Karten mit den Karten aus \mathcal{A} glatt kompatibel sind. Es sei daher (U, φ) eine Schnittkarte für S in M , (V, ψ) die zugehörige Karte für S und (W, θ) eine beliebige Karte aus \mathcal{A} . Wir müssen zeigen, dass

$$\psi \circ \theta^{-1} : \theta(W \cap V) \rightarrow \psi(W \cap V)$$

ein Diffeomorphismus ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass $\psi \circ \theta^{-1}$ als Zusammensetzung von Homöomorphismen selbst ein Homöomorphismus ist. Die Abbildung ist auch glatt, da sie als Zusammensetzung der folgenden glatten Abbildungen geschrieben werden kann:

$$\theta(W \cap V) \xrightarrow{\theta^{-1}} W \cap V \xrightarrow{\iota} U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^k,$$

dabei betrachten wir $W \cap V$ als offene Teilmenge von S (mit der glatten Struktur \mathcal{A}) und U als offene Teilmenge von M . Für den Nachweis, dass $\psi \circ \theta^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, genügt es nach Korollar 4.7 zu zeigen, dass es eine Immersion ist. Es gilt offenbar

$$d(\psi \circ \theta^{-1})_{\theta(p)} = d\pi_{\varphi^{-1}(p)} \circ d\varphi_p \circ d\iota_p \circ d(\theta^{-1})_{\theta(p)}.$$

Jede der linearen Abbildungen $d\varphi_p$, $d\iota_p$ und $d(\theta^{-1})_{\theta(p)}$ ist injektiv und damit auch deren Zusammensetzung. Das Differential $d\pi_{\varphi^{-1}(p)}$ ist nicht injektiv, die Zusammensetzung $d\pi_{\varphi^{-1}(p)} \circ d\varphi_p \circ d\iota_p \circ d(\theta^{-1})_{\theta(p)}$ ist aber injektiv, wenn

$$\text{Im } d(\varphi \circ \iota \circ \theta^{-1})_{\theta(p)} \cap \text{Ker } d\pi_{\varphi^{-1}(p)} = \{0\}.$$

Da der Wertebereich von ι in S liegt, sind die Koordinaten x^{k+1}, \dots, x^n im Wertebereich von $\varphi \circ \iota \circ \theta^{-1}$ konstant:

$$\varphi \circ \iota \circ \theta^{-1}(y^1, \dots, y^k) = (x^1(y), \dots, x^k(y), c^{k+1}, \dots, c^n).$$

Damit liegt der Wertebereich des Differentials dieser Abbildung in $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$, während offenbar $\text{Ker } d\pi_{\varphi^{-1}(p)} = \text{span}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$. ■

Die Umkehrung von Satz 5.2 gilt ebenfalls:

Satz 5.3 *Das Bild jeder glatten Einbettung ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit.*

Beweis: Es sei $F : N \rightarrow M$ eine glatte Einbettung. Wir müssen zeigen, dass jeder Punkt in $F(N)$ eine Koordinatenumgebung $V \subseteq M$ besitzt, sodass $F(N) \cap V$ ein Schnitt ist. Dazu sei $p \in N$ beliebig. Da eine glatte Einbettung konstanten Rang hat, gibt es nach Satz 4.8 glatte Karten (U, φ) und (V, ψ) zentriert in p und $F(p)$ bezüglich derer $F|_U : U \rightarrow V$ die Koordinatendarstellung

$$F(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$$

hat. Indem wir V eventuell kleiner machen, folgt daraus, dass $F(U)$ ein Schnitt in V ist. Da eine glatte Einbettung ein Homöomorphismus auf ihr Bild versehen mit der Spurtopologie ist, folgt aus dem Umstand, dass $F(U)$ offen ist in $F(N)$, dass es eine offene Menge $W \subseteq M$ gibt mit $F(U) = W \cap F(N)$. Ersetzen wir daher V durch $\bar{V} := V \cap W$, so erhalten wir eine Schnittkarte $(\bar{V}, \psi|_{\bar{V}})$, die $F(p)$ enthält und für die $\bar{V} \cap F(N) = \bar{V} \cap F(U)$ ein Schnitt von \bar{V} ist. ■

Korollar 5.4 *Eingebettete Untermannigfaltigkeiten sind genau die Bilder glatter Einbettungen.*

Wie im Falle einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n möchten wir auch für allgemeine eingebettete Untermannigfaltigkeiten S den Tangentialraum $T_p S$ an einen Punkt von S als einen Unterraum des Tangentialraumes im Punkt p der umgebenden Mannigfaltigkeit ansehen. Unter geeigneten Identifikationen ist dies auch tatsächlich gerechtfertigt:

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M . Da die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow M$ eine glatte Einbettung ist, haben wir in jedem Punkt $p \in S$ eine injektive Abbildung $d\iota_p : T_p S \rightarrow T_p M$. Für einen Vektor $v \in T_p S$, wirkt das Bild $d\iota_p v \in T_p M$ auf eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ durch

$$d\iota_p(v)f = v(f \circ \iota) = v(f|_S).$$

Wir werden im Folgenden den Tangentialraum $T_p S$ stets mit seinem Bild unter $d\iota_p$ identifizieren und damit $T_p S$ als Unterraum von $T_p M$ auffassen! Das folgende Resultat enthält eine nützliche Charakterisierung von $T_p S$:

Proposition 5.5 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit und $p \in S$. Als Unterraum von $T_p M$ ist der Tangentialraum $T_p S$ gegeben durch*

$$T_p S = \{v \in T_p M : vf = 0 \text{ für alle } f \in C^\infty(M) \text{ mit } f|_S \equiv 0\}.$$

Beweis: Es sei zunächst $v \in T_p S \subseteq T_p M$. Dann gibt es ein $w \in T_p S$ mit $v = d\iota_p(w)$. Ist $f \in C^\infty(M)$ und $f|_S \equiv 0$, dann gilt $f \circ \iota \equiv 0$, also

$$vf = d\iota_p(w)f = w(f \circ \iota) = 0.$$

Es sei nun $v \in T_p M$ ein Tangentialvektor mit $vf = 0$ für alle f , die auf S verschwinden. Es seien (x^1, \dots, x^n) Schnittkoordinaten für S in einer Umgebung U von p , sodass $U \cap S$ die Teilmenge von U mit $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ ist und (x^1, \dots, x^k) die Koordinaten für $U \cap S$ sind.

Die Inklusionsabbildung $\iota : S \cap U \hookrightarrow M$ hat nun bezüglich dieser Koordinaten die Darstellung

$$\iota(x^1, \dots, x^k) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Damit folgt, dass $T_p S$ (oder genauer, $d\iota_p T_p S$) genau der Unterraum von $T_p M$ ist, der von $\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^k|_p$ aufgespannt wird. Schreiben wir daher die Koordinatendarstellung von v in der Form

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

so folgt offenbar, dass genau dann $v \in T_p S$, wenn $v^i = 0$ für $i > k$.

Es sei nun φ eine glatte Bumpfunktion mit Träger in U , die identisch 1 in einer Umgebung von p ist. Für einen Index $j > k$, definieren wir eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x)x^j & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{für } x \in M \setminus U. \end{cases}$$

Da $j > k$, verschwindet f auf S , womit

$$0 = vf = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial(\varphi(x)x^j)}{\partial x^i}(p) = v^j.$$

Damit ist wie behauptet $v \in T_p S$. ■

Beispiele.

(a) Graphen als Untermannigfaltigkeiten

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt, dann ist der Graph von F eine eingebettete n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+k} .

Beweis: Es sei $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$\varphi(x, y) = (x, y - F(x)).$$

Offenbar ist φ ein Diffeomorphismus mit der Inversen

$$\varphi^{-1}(u, v) = (u, v + F(u)).$$

Da $\varphi(\Gamma(F))$ gerade der Schnitt $\{(u, v) : v = 0\}$ von $U \times \mathbb{R}^k$ ist, folgt, dass $\Gamma(F)$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. ■

(b) Euklidische Sphären

Für jedes $n \geq 0$ ist \mathbb{S}^n eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+1} , da es lokal der Graph einer glatten Funktion ist: Der Schnitt von \mathbb{S}^n mit der offenen Menge $\{x : x^i > 0\}$ ist der Graph der Funktion

$$x^i = f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}),$$

wobei $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f(u) = \sqrt{1 - \|u\|^2}$. Analog ist der Schnitt von \mathbb{S}^n mit $\{x : x^i < 0\}$ der Graph von $-f$. Da jeder Punkt von \mathbb{S}^n in einer dieser offenen Mengen enthalten ist, folgt aus (a) und Lemma 5.1, dass \mathbb{S}^n eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. Die dadurch induzierte glatte Struktur auf \mathbb{S}^n stimmt mit der Standard glatten Struktur auf \mathbb{S}^n überein.

Eine Möglichkeit um zu zeigen, dass eine Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist, besteht darin sie als Bild einer glatten Einbettung zu identifizieren. In der Praxis kommt es aber häufiger vor, dass eine Untermannigfaltigkeit als Level Set einer glatten Abbildung repräsentiert wird.

Definition. Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \rightarrow N$ eine beliebige Abbildung. Für $c \in N$ nennt man die Menge $\Phi^{-1}(c)$ ein *Level Set* von Φ .

Beispiele.

- (a) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $\Phi(x) = \|x\|^2$. Das Level Set $\Phi^{-1}(1)$ von Φ stimmt dann gerade mit der n -Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ überein.
- (b) Es sei $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die glatte Abbildung definiert durch $\Psi(x, y) = x^2 - y^2$. Das Level Set $\Psi^{-1}(0)$ von Ψ stimmt offenbar mit der Vereinigung der beiden Geraden $x = y$ und $x = -y$ überein und ist daher (wie man leicht zeigt) keine eingebettete Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 .

Wie Beispiel (b) zeigt, ist nicht jedes Level Set einer glatten Abbildung auch eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Wir werden daher im Folgenden Kriterien suchen, die garantieren das dies immer der Fall ist. Um unser erstes Resultat zu motivieren betrachten wir eine lineare Version dieses Problems: Jeder k -dimensionale Unterraum $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kann als der Kern einer linearen Abbildung L realisiert werden. Gilt also $\dim S = \dim \text{Ker } L = k$, dann muss $\dim \text{Im } L = n - k$ sein. Eine natürliche Möglichkeit S zu spezifizieren, ist daher eine *surjektive* lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ anzugeben, deren Kern gerade S ist.

Im Kontext glatter Mannigfaltigkeiten sind die Submersionen das Analogon von surjektiven Abbildungen. Wir wie gleich sehen werden, ist in der Tat jedes Level Set einer Submersion von einer n -Mannigfaltigkeit in eine $(n - k)$ -Mannigfaltigkeit eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit. Es gilt sogar die folgende stärkere Aussage:

Satz 5.6 *Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung von konstantem Rang k , dann ist jedes Level Set von Φ eine abgeschlossene eingebettete Untermannigfaltigkeit der Kodimension k in M .*

Beweis: Es sei $c \in N$ beliebig und $S := \Phi^{-1}(c) \subseteq M$. Aufgrund der Stetigkeit von Φ ist S abgeschlossen. Um zu zeigen, dass es eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist, müssen wir zeigen, dass es zu jedem $p \in S$ eine Schnittkarte für S in M gibt, die p enthält. Nach Satz 4.8 gibt es glatte Karten (U, φ) zentriert in p und (V, ψ) zentriert in $c = \Phi(p)$, sodass die Koordinatendarstellung von Φ bezüglich dieser Karten die Form

$$\Phi(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$$

hat. Damit ist aber $S \cap U$ der Schnitt

$$\{(x^1, \dots, x^m) \in U : x^1 = \dots = x^k = 0\}. \quad \blacksquare$$

Da jede Submersion konstanten Rang hat erhalten wir aus Satz 5.6 sofort:

Korollar 5.7 Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \rightarrow N$ eine Submersion, dann ist jedes Level Set von Φ eine abgeschlossene eingebettete Untermannigfaltigkeit von M deren Kodimension mit $\dim N$ übereinstimmt.

Die beiden letzten Resultate können wir sogar noch deutlich verallgemeinern, da wir die Bedingung an den Rang ja nur auf dem gegebenen Level Set überprüfen müssen.

Definition. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \rightarrow N$ glatt. Ein Punkt $p \in M$ heißt *regulärer Punkt* von Φ , wenn $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ surjektiv ist, ansonsten heißt p *kritischer Punkt*. Ein Punkt $c \in N$ heißt ein *regulärer Wert* von Φ , wenn jeder Punkt des Level Sets $\Phi^{-1}(c)$ ein regulärer Punkt ist, ansonsten heißt c ein *kritischer Wert*. Ist c ein regulärer Wert von Φ , dann nennen wir $\Phi^{-1}(c)$ ein reguläres Level Set.

Bemerkungen.

- (a) Ist $\dim M < \dim N$, dann ist jeder Punkt von M kritisch. Jeder Punkt von M ist genau dann regulär, wenn Φ eine Submersion ist.
- (b) Ist $\Phi^{-1}(c) = \emptyset$, dann ist c regulär.
- (c) Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, dann ist $p \in M$ genau dann regulärer Punkt von f , wenn $df_p \neq 0$.
- (d) Die Menge der regulären Punkte von Φ ist eine offene Teilmenge von M .

Satz 5.8 Jedes reguläre Level Set einer glatten Abbildung ist eine abgeschlossene eingebettete Untermannigfaltigkeit deren Kodimension mit der Dimension ihres Bildes übereinstimmt.

Beweis: Es sei $\Phi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $c \in N$ ein regulärer Wert mit $\Phi^{-1}(c) \neq \emptyset$. Damit ist der Rang von $d\Phi_p$ gleich $\dim N$ in jedem Punkt von $\Phi^{-1}(c)$. Wir zeigen nun, dass die Menge U der Punkte mit $\text{rank } d\Phi_p = \dim N$ offen ist in M . Dann ist $\Phi|_U : U \rightarrow N$ eine Submersion, womit wir Korollar 5.7 anwenden können. Beachten wir dann noch, dass eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von U auch eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist, folgt die Behauptung des Satzes. Um zeigen, dass U offen ist, sei $m = \dim M$, $n = \dim N$ und $p \in U$. In Bezug auf glatte Koordinaten in der Nähe von p und $\Phi(p)$, bedeutet die Voraussetzung, dass $\text{rank } d\Phi_p = n$ in p ist, dass die $n \times m$ Matrix von $d\Phi_p$ eine $n \times n$ Untermatrix mit nicht verschwindender Determinante besitzt. Aus Stetigkeitsgründen ist diese Determinante aber dann in einer ganzen Umgebung von p ungleich Null, das bedeutet Φ hat Rang n in dieser ganzen Umgebung. ■

Nicht jede eingebettete Untermannigfaltigkeit kann als Level Set einer Submersion realisiert werden. Das nächste Resultat zeigt, dass dies jedoch zumindest lokal so ist.

Proposition 5.9 *Es sei S eine Teilmenge einer glatten n -Mannigfaltigkeit M . Dann ist S genau dann eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit von M , wenn jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung U in M hat, sodass $U \cap S$ Level Set einer Submersion $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ist.*

Beweis: Es sei zunächst S eine eingebettete k -Untermannigfaltigkeit. Sind (x^1, \dots, x^n) Schnittkoordinaten für S auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, dann ist die Abbildung $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, die in Koordinaten gegeben ist durch

$$\Phi(x) = (x^{k+1}, \dots, x^n),$$

offenbar eine Submersion, unter deren Level Sets auch $S \cap U$ ist.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass es zu jedem Punkt $p \in S$ eine Umgebung U und eine Submersion $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ gibt, sodass $S \cap U = \Phi^{-1}(c)$ für ein $c \in \mathbb{R}^{n-k}$. Nach Korollar 5.7 ist $S \cap U$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von U . Nach Lemma 5.1 ist daher auch S eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M . ■

Definition. Ist $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit, so heißt eine glatte Abbildung $\Phi : M \rightarrow N$ eine *definierende Abbildung* von S , wenn S ein reguläres Level Set von Φ ist. Ist $N = \mathbb{R}^{n-k}$ sprechen wir auch von einer *definierenden Funktion* von S . Ist allgemeiner U eine offene Teilmenge von M und $\Phi : U \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, sodass $S \cap U$ ein reguläres Level Set von Φ ist, so nennen wir Φ eine *lokale definierende Funktion* von S .

Nach Proposition 5.9 hat jede eingebettete Untermannigfaltigkeit eine lokal definierende Funktion in einer Umgebung von jedem Punkt. Das Auffinden einer (lokalen oder globalen) definierenden Funktion ist in der Praxis nicht ganz einfach. Im Folgenden besprechen wir ein etwas komplizierteres Beispiel als die Sphäre:

Beispiel.

Es sei $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ die Teilmenge des Vektorraumes $M(m \times n, \mathbb{R})$ der $m \times n$ Matrizen bestehend aus Matrizen von Rang k . Ist $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$, dann ist $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Kodimension $(m - k)(n - k)$.

Beweis: Ist $E_0 \in M_k(m \times n, \mathbb{R})$, dann besitzt E_0 eine $k \times k$ Untermatrix mit nicht verschwindender Determinante. Wir nehmen zunächst an, dass

$$E_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

wobei A_0 eine $k \times k$ Matrix mit $\det A_0 \neq 0$ ist. Es sei $U \subseteq M(m \times n, \mathbb{R})$ definiert durch

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0 \right\}.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Determinantenfunktion, ist U eine offene Teilmenge von $M(m \times n, \mathbb{R})$, die E_0 enthält. Da die Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix den Rang einer Matrix nicht verändert, hat

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U$$

genau dann Rang k , wenn auch

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Rang k hat, also wenn $D - CA^{-1}B$ die Nullmatrix ist. Wir definieren daher die Abbildung $\Phi : U \rightarrow M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R})$ durch

$$\Phi \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = D - CA^{-1}B.$$

Offenbar ist Φ glatt und $\Phi^{-1}(0) = M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U$. Um also zu zeigen, dass $M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von U ist, müssen wir nachweisen, dass $d\Phi_E$ surjektiv ist für jedes $E \in U$. Da $M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R})$ ein Vektorraum ist, können wir den Tangentialraum am Punkt $\Phi(E)$ auch wieder mit $M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R})$ identifizieren. Es ist also zu zeigen, dass es zu jedem $X \in M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R})$ einen Tangentialvektor in $T_E U$ gibt, der durch $d\Phi_E$ auf X abgebildet wird. Dazu definieren wir die glatte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U$ durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + tX \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\gamma'(0) \in T_E U$ und

$$d\Phi_E \gamma'(0) = (\Phi \circ \gamma)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (D + tX - CA^{-1}B) = X.$$

Damit ist $d\Phi_E$ eine Submersion und nach Korollar 5.7 daher $M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von U .

Ist nun $E'_0 \in M_k(m \times n, \mathbb{R})$ beliebig, so kann E'_0 durch einen (den Rang erhaltenden) linearen Isomorphismus $R : M(m \times n, \mathbb{R}) \rightarrow M(m \times n, \mathbb{R})$ in eine Matrix in U transformiert werden. Somit ist $U' = R^{-1}(U)$ aber eine Umgebung von E'_0 und

$$\Phi' := \Phi \circ R : U' \rightarrow M((m-k) \times (n-k), \mathbb{R})$$

eine Submersion mit $\Phi'^{-1}(0) = M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U'$. Damit besitzt jeder Punkt in $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ eine Umgebung U' in $M(m \times n, \mathbb{R})$, sodass $M_k(m \times n, \mathbb{R}) \cap U'$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von U' ist. Nach Lemma 5.1 ist daher $M_k(m \times n, \mathbb{R})$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $M(m \times n, \mathbb{R})$. \blacksquare

Wie das nächste Lemma zeigt, können wir mit Hilfe definierender Funktionen leicht den Tangentialraum einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit beschreiben.

Lemma 5.10 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M . Ist $\Phi : U \rightarrow N$ eine beliebige lokal definierende Abbildung für S , dann gilt für jedes $p \in S \cap U$,*

$$T_p S = \text{Ker } d\Phi_p.$$

Beweis: Wir identifizieren $T_p S$ wieder mit dem Unterraum $d\iota_p(T_p S) \subseteq T_p M$, wobei $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet. Da $\Phi \circ \iota$ konstant ist auf $S \cap U$, ist $d\Phi_p \circ d\iota_p : T_p S \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ die Nullabbildung, also $\text{Im } d\iota_p \subseteq \text{Ker } d\Phi_p$. Aus der Definition definierender Abbildungen folgt aber, dass $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ surjektiv ist, womit

$$\dim \text{Ker } d\Phi_p = \dim T_p M - \dim T_{\Phi(p)} N = \dim T_p S = \dim \text{Im } d\iota_p,$$

was insgesamt $\text{Im } d\iota_p = \text{Ker } d\Phi_p$ ergibt. ■

Eingebettete Untermannigfaltigkeiten sind zwar die am häufigsten auftretenden Typen von Untermannigfaltigkeiten, aber für manche Zwecke, insbesondere das Studium von Lie Untergruppen, ist es nützlich noch eine allgemeinere Klasse von Untermannigfaltigkeiten zu betrachten.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Unter einer *immersierten Untermannigfaltigkeit* der Dimension k von M verstehen wir eine Teilmenge $S \subseteq M$ versehen mit einer Topologie (nicht unbedingt der Spurtopologie), die S zu einer topologischen k -Mannigfaltigkeit macht, und einer glatten Struktur, sodass die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow M$ eine glatte Immersion ist.

Jede eingebettete Untermannigfaltigkeit ist offenbar auch eine immersierte Untermannigfaltigkeit. Allgemeiner treten immersierte Untermannigfaltigkeiten in folgender Weise auf:

Ist $F : N \rightarrow M$ eine injektive Immersion, dann können wir das Bild $F(N) \subseteq M$ mit einer eindeutigen Topologie und glatten Struktur versehen, sodass $F : N \rightarrow F(N)$ ein Diffeomorphismus wird: Wir legen dazu eine Menge $U \subseteq F(N)$ als offen fest, wenn $F^{-1}(U) \subseteq N$ offen ist, und verwenden als glatte Kartenabbildungen auf $F(N)$ die Abbildungen der Form $\varphi \circ F^{-1}$, wobei φ eine glatte Kartenabbildung auf N ist. Es ist dann die Inklusionsabbildung $\iota : F(N) \hookrightarrow M$ eine injektive Immersion, da sie Zusammensetzung eines Diffeomorphismus und einer injektiven Immersion ist:

$$F(N) \xrightarrow{F^{-1}} N \xrightarrow{F} M.$$

Das Analogon zu Korollar 5.4 enthält das folgende Resultat.

Proposition 5.11 *Immertierte Untermannigfaltigkeiten sind genau die Bilder von injektiven Immersionen.*

Beweis: Ist $N \subseteq M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit, dann ist die Inklusionsabbildung $\iota : N \hookrightarrow M$ eine injektive Immersion. Umgekehrt, haben wir gesehen, dass das Bild einer injektiven Immersion mit einer eindeutigen Topologie und glatten Struktur versehen werden kann, sodass es eine immersierte Untermannigfaltigkeit wird und die Immersion ein Diffeomorphismus auf ihr Bild wird. ■

Beispiel.

Die Abbildung $\gamma : (-\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t)$, ist eine injektive Immersion, womit ihr Bild versehen mit der oben besprochenen Topologie und glatten Struktur zu einer immersierten Untermannigfaltigkeit wird. Als glatte Mannigfaltigkeit ist das Bild dann diffeomorph zu \mathbb{R} .

Obwohl eine immersierte Untermannigfaltigkeit $S \subseteq M$ kein topologischer Teilraum von M sein muss, können wir den Tangentialraum an einen Punkt $p \in S$ doch mit einem Unterraum von $T_p M$ identifizieren: Die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow M$ ist eine injektive Immersion, damit ist $d\iota_p : T_p S \rightarrow T_p M$ injektiv. Wie im Falle eingebetteter Mannigfaltigkeiten, identifizieren wir daher $T_p S$ mit $d\iota_p T_p S \subseteq T_p M$.

Die Frage ob eine vorgelegte Teilmenge S einer glatten Mannigfaltigkeit M eine immersierte Untermannigfaltigkeit ist, ist schwieriger zu beantworten als die analoge Frage für eingebettete Untermannigfaltigkeiten, da weder die Topologie noch die glatte Struktur im vorhinein bekannt sind. Die Frage ist daher, ob es irgendeine Topologie und glatte Struktur auf S gibt, die S zu einer immersiierten Untermannigfaltigkeit machen.

Obwohl viele immersierte Untermannigfaltigkeiten nicht eingebettet sind, zeigt das folgende Lemma, dass zumindest lokal jede immersierte Untermannigfaltigkeit mit einer eingebetteten übereinstimmt.

Lemma 5.12 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : N \rightarrow M$ eine Immersion. Dann gibt es zu jedem $p \in N$ eine Umgebung U von p in N , sodass $F|_U : U \rightarrow M$ eine glatte Einbettung ist.*

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Bemerkung.

- (a) Man beachte, dass es nach Lemma 5.12 zu einer immersiierten Untermannigfaltigkeit $S \subseteq M$ und einem $p \in S$ stets eine Umgebung von p in S gibt, sodass U eingebettet ist, aber es nicht unbedingt eine Umgebung V von p in M gibt, sodass $V \cap S$ eingebettet ist.

Definition. Ist $S \subseteq M$ eine immersierte k -Untermannigfaltigkeit von M , so nennen wir eine glatte Einbettung $X : U \rightarrow M$ eine *lokale Parametrisierung* von S , wenn $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen ist, $X(U) \subseteq S$ offen ist und X glatt als Abbildung nach S ist.

Beispiele.

- (a) Die Inverse jeder Kartenabbildung ist eine lokale Parametrisierung von M .
 (b) Die Abbildung $F : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$F(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right),$$

ist eine lokale Parametrisierung von \mathbb{S}^2 mit der offenen oberen Halbsphäre als Bild.

Lemma 5.13 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit. Jeder Punkt $p \in S$ ist im Bild einer lokalen Parametrisierung von S enthalten. Ist $X : U \rightarrow M$ eine beliebige lokale Parametrisierung von S , dann gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Karte (V, φ) von S , sodass $X = \iota \circ \varphi^{-1}$, wobei $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung bezeichnet.*

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Bevor wir uns mit Einschränkungen von glatten Abbildungen auf Untermannigfaltigkeiten befassen, noch einige Worte zu Untermannigfaltigkeiten von Mannigfaltigkeiten mit Rand. Die meisten der bisher gegebenen Definitionen übertragen sich ohne Änderung:

Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand, so heißt eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ eine Immersion, wenn dF_p injektiv ist in jedem Punkt. Ist dF_p surjektiv in jedem Punkt, dann heißt F eine Submersion. Ist F eine Immersion und eine topologische Einbettung, dann nennen wir F eine glatte Einbettung.

Eine Teilmenge S einer glatten Mannigfaltigkeit mit Rand M ist eine immersierte Untermannigfaltigkeit mit Rand, wenn S die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit mit Rand trägt, sodass die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow M$ eine Immersion ist. Die Menge S ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit mit Rand, wenn S zusätzlich mit der Spurtopologie versehen ist.

Bemerkung.

- (a) Beachte, dass wir von einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit mit Rand nicht die Existenz von Schnittkarten verlangen.

Beispiele.

- (a) Für jedes $k \leq n$ ist die abgeschlossene k -dimensionale Einheitskugel $\text{cl } \mathbb{B}^k$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit mit Rand in $\text{cl } \mathbb{B}^n$.
- (b) Ist M eine glatte n -Mannigfaltigkeit mit Rand, dann ist ∂M eine eingebettete $(n - 1)$ -Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) von M . (Übungsbeispiel)

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob für glattes $F : M \rightarrow N$ die Einschränkung des Definitionsbereichs auf eine Untermannigfaltigkeit immer noch glatt ist.

Proposition 5.14 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist $S \subseteq M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit, dann ist $F|_S : S \rightarrow N$ glatt.*

Beweis: Die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow M$ ist nach Definition einer immersierten Untermannigfaltigkeit glatt. Damit ist aber auch $F|_S = F \circ \iota$ glatt. ■

Die Situation wird komplizierter, wenn wir nicht den Definitionsbereich sondern den Wertebereich einer glatten Abbildung einschränken. Die resultierende Abbildung muss nämlich nicht unbedingt glatt, ja nicht einmal stetig sein.

Beispiel.

Wir betrachten wieder das Bild S der Abbildung $\gamma : (-\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t)$. Versehen mit der durch γ induzierten Topologie und glatten Struktur ist S eine immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 . Betrachte nun die glatte Abbildung $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$G(t) = (\sin 2t, \cos t).$$

Das Bild von G liegt offenbar in S . Als Abbildung von \mathbb{R} nach S ist G aber unstetig, da $\gamma^{-1} \circ G$ nicht stetig ist an $t = -\pi/2$.

Wie unser nächstes Resultat zeigt, ist die Unstetigkeit aber das einzige Problem das beim Einschränken des Wertebereichs auftreten kann.

Proposition 5.15 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $S \subseteq N$ eine immensierte Untermannigfaltigkeit. Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung deren Bild in S enthalten ist, sodass F als Abbildung von M nach S stetig ist, dann ist $F : M \rightarrow S$ auch glatt.*

Beweis: Es sei $p \in M$ beliebig und $q = F(p) \in S$. Da die Inklusionsabbildung $\iota : S \hookrightarrow N$ eine Immersion ist, gibt es nach Lemma 5.12 eine Umgebung V von q in S , sodass $\iota|_V : V \hookrightarrow N$ eine glatte Einbettung ist. Das bedeutet es gibt eine Schnittkarte (W, ψ) für V in N zentriert in q . Setzen wir $V_0 = W \cap V$ und $\bar{\psi} = \pi \circ \psi$, wobei $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten $k = \dim S$ Koordinaten ist, dann ist $(V_0, \bar{\psi})$ eine glatte Karte für V . Da $V_0 = (\iota|_V)^{-1}(W)$ offen ist in V , ist es auch offen bezüglich der Topologie in S . Also ist $(V_0, \bar{\psi})$ auch eine glatte Karte für S .

Es sei $U = F^{-1}(V_0) \subseteq M$. Offenbar ist $p \in U$ und aufgrund der Stetigkeit von F ist U offen. Es sei (U_0, φ) eine glatte Karte auf M mit $p \in U_0 \subseteq U$. Dann ist die Koordinatendarstellung von $F : M \rightarrow S$ in Bezug auf die Karten (U_0, φ) und $(V_0, \bar{\psi})$ gegeben durch

$$\bar{\psi} \circ F \circ \varphi^{-1} = \pi \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$$

und daher glatt, da $F : M \rightarrow N$ glatt ist. ■

Die Situation ist einfacher im Falle von eingebetteten Untermannigfaltigkeiten.

Korollar 5.16 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $S \subseteq N$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Dann ist jede glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ deren Bild in S enthalten ist, auch als Abbildung von M nach S glatt.*

Beweis: Da $S \subseteq N$ die Spurtopologie hat, ist jede stetige Abbildung $F : M \rightarrow N$, deren Bild in S enthalten ist, automatisch stetig als Abbildung nach S . Damit folgt die Behauptung aus Proposition 5.15. ■

6 Vektorfelder

Vektorfelder sind vertraute Untersuchungsobjekte aus der reellen Analysis, wobei in diesem Setting ein Vektorfeld eine stetige Abbildung auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, die wieder in den \mathbb{R}^n abbildet. Wir wollen in diesem Abschnitt Vektorfelder auf abstrakten glatten Mannigfaltigkeiten definieren und untersuchen. Dazu greifen wir auf den Begriff des Tangentialbündels zurück:

Definition. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so heißt eine stetige Abbildung $Y : M \rightarrow TM$ ein *Vektorfeld* auf M , wenn

$$\pi \circ Y = \text{Id}_M, \quad (6.1)$$

bzw. äquivalent dazu, wenn $p \mapsto Y_p := Y(p) \in T_p M$ für jedes $p \in M$. Wir nennen eine Abbildung $Y : M \rightarrow TM$ ein *grobes Vektorfeld*, wenn Y Relation (6.1) erfüllt.

Der Träger eines Vektorfeldes $Y : M \rightarrow TM$ ist die Menge definiert durch

$$\text{supp } Y = \{p \in M : Y_p \neq 0\}.$$

Ist $Y : M \rightarrow TM$ ein grobes Vektorfeld und $(U, (x^1, \dots, x^n))$ eine glatte Karte für M , so können wir den Wert von Y an jedem Punkt $p \in U$ bezüglich der Koordinatenvektoren ausdrücken:

$$Y_p = \sum_{i=1}^n Y^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

Die auf diese Weise bestimmten Funktionen $Y_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißen die *Komponentenfunktionen* von Y bezüglich der gegebenen Karte.

Wir werden uns hauptsächlich für glatte Vektorfelder interessieren. Daher hier ein erstes Kriterium, das sicherstellt, dass ein vorgelegtes grobes Vektorfeld glatt ist.

Lemma 6.1 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $Y : M \rightarrow TM$ ein grobes Vektorfeld. Ist $(U, (x^i))$ eine glatte Karte auf M , dann ist Y genau dann glatt auf U , wenn die Komponentenfunktionen Y^i bezüglich dieser Karte glatt sind.*

Beweis: Es seien $(x^i, v^i)_{1 \leq i \leq n}$ die Standardkoordinaten auf $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ bezüglich einer Karte $(U, (x^i))$ für M . Dann ist die Koordinatendarstellung von $Y : M \rightarrow TM$ auf $\varphi(U)$ gegeben durch

$$\widehat{Y}(x) = (\overline{\varphi} \circ Y \circ \varphi^{-1})(x) = (x^1, \dots, x^n, Y^1(x), \dots, Y^n(x)),$$

wobei Y^i die i -te Komponentenfunktion von Y bezüglich der (x^i) Koordinaten bezeichnet. Damit folgt die Behauptung aber aus Lemma 2.3. ■

Beispiel.

Ist $(U, (x^i))$ eine glatte Karte auf M , dann bestimmt die Zuordnung

$$p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

ein, nach Lemma 6.1, glattes Vektorfeld auf U , genannt das *i -te Koordinatenvektorfeld*. Wir bezeichnen es symbolisch mit $\partial/\partial x^i$.

Unser nächstes Resultat zeigt, dass jeder Tangentialvektor an einem Punkt einer glatten Mannigfaltigkeit zu einem globalen glatten Vektorfeld erweitert werden kann.

Proposition 6.2 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zu jedem $p \in M$ und $v \in T_p M$ gibt es ein glattes Vektorfeld $Y : M \rightarrow TM$ mit $Y_p = v$.*

Beweis: Es seien $(U, (x^i))$ eine glatte Karte mit $p \in U$ und $\sum_i v^i \partial / \partial x^i|_p$ die entsprechende Koordinatendarstellung von v . Ist ψ eine glatte Bump Funktion mit Träger in U und $\psi(p) = 1$, dann ist das Vektorfeld $Y : M \rightarrow TM$ definiert durch

$$Y_q = \begin{cases} \psi(q) \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q & q \in U \\ 0 & q \notin \text{supp } \psi \end{cases}$$

nach Lemma 6.1 glatt. Offenbar ist auch $Y_p = v$. ■

Notation. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{X}(M)$ die Menge aller glatten Vektorfelder auf M .

Die Menge $\mathfrak{X}(M)$ wird zu einem Vektorraum versehen mit den Operationen

$$(aY + bZ)_p = aY_p + bZ_p.$$

Ist $f \in C^\infty(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(M)$, dann ist $fY : M \rightarrow TM$, definiert durch

$$(fY)_p = f(p)Y_p$$

ein glattes Vektorfeld (Übungsbeispiel).

Eine wichtige Eigenschaft glatter Vektorfelder ist, dass sie Operatoren auf glatten Funktionen definieren: Ist $Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subseteq M$, dann ist $Yf : U \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$Yf(p) = Y_p f$$

eine glatte Funktion auf U . Da der Wert eines Tangentialvektors an p bei Anwendung auf eine glatte Funktion nur von den Werten der Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung von p abhängt, folgt für offene Mengen $V \subseteq U$, dass $(Yf)|_V = Y(f|_V)$.

Diese Betrachtungsweise von Vektorfeldern als Operatoren führt auf ein weiteres Kriterium für Glattheit:

Lemma 6.3 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein grobes Vektorfeld $Y : M \rightarrow TM$ ist genau dann glatt, wenn für jede offene Menge $U \subseteq M$ und jedes $f \in C^\infty(U)$ die Funktion $Yf : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist.*

Beweis: Es sei zunächst Y ein grobes Vektorfeld für das Yf glatt ist wann immer f glatt ist. Sind (x^i) glatte Koordinaten auf $U \subseteq M$, so ist jede Koordinatenfunktion x^i eine glatte Funktion auf U . Wenden wir Y auf eine dieser Funktionen an, so erhalten wir

$$Yx^i = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} (x^i) = Y^i.$$

Da Yx^i nach Voraussetzung glatt ist, sind die Komponentenfunktionen von Y glatt und damit nach Lemma 6.1 auch Y .

Es sei nun Y glatt und f eine beliebige glatte Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$. Zu jedem $p \in U$ können wir glatte Koordinaten (x^i) in einer Umgebung $W \subseteq U$ von p wählen. Dann gilt aber für jedes $x \in W$,

$$Yf(x) = \left(\sum_j Y^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x \right) f = \sum_j Y^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x).$$

Da nach Lemma 6.1 die Komponentenfunktionen Y^j glatt sind auf W folgt, dass Yf glatt ist auf W . Da $p \in U$ beliebig war folgt, dass Yf auf U glatt ist. ■

Eine wichtige Konsequenz von Lemma 6.3 ist, dass ein glattes Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ einen linearen Operator auf $C^\infty(M)$ definiert durch

$$f \mapsto Yf.$$

Dieser Operator erfüllt darüberhinaus die Produktregel für Vektorfelder

$$Y(fg) = fYg + gYf,$$

wie man leicht sieht durch Evaluierung an einem beliebigen Punkt.

Definition. Eine lineare Abbildung $Z : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ heißt *Derivation* (im Unterschied zu Derivation an p), wenn für alle $f, g \in C^\infty(M)$ gilt

$$Z(fg) = fZg + gZf.$$

Wie die folgende Proposition zeigt, ist jede Derivation von $C^\infty(M)$ durch ein glattes Vektorfeld induziert.

Proposition 6.4 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ist genau dann eine Derivation, wenn es ein glattes Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ gibt mit $\mathcal{Y}f = Yf$.*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass es zu jeder Derivation $\mathcal{Y} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ein Vektorfeld Y gibt mit $\mathcal{Y}f = Yf$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Wenn es so ein Vektorfeld gibt, so muss offenbar für jedes $p \in M$ und jedes $f \in C^\infty(M)$ gelten

$$Y_p f = (\mathcal{Y}f)(p).$$

Da \mathcal{Y} linear ist, liefert die Produktregel für \mathcal{Y} evaluiert an p , dass $Y_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tatsächlich eine Derivation an p ist, also ein Tangentialvektor in $T_p M$.

Es bleibt zu zeigen, dass $p \mapsto Y_p$ ein glattes Vektorfeld ist. Dazu wollen wir Lemma 6.3 verwenden. Ist $f \in C^\infty(M)$ eine global definierte glatte Funktion, so ist $\mathcal{Y}f = Yf$ sicher glatt. Wir müssen die analoge Aussage für glatte Funktionen zeigen, die nur auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ definiert sind. Für jedes $p \in U$, sei dazu ψ eine glatte Bump Funktion die identisch 1 in einer Umgebung von p ist und deren Träger in U liegt. Wir definieren

$$\bar{f} = \begin{cases} \psi f & \text{auf } U, \\ 0 & \text{auf } M \setminus \text{supp } \psi. \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{Y}\bar{f} = Y\bar{f}$ glatt und stimmt nach Satz 3.6 mit Yf in einer Umgebung von p überein. Damit ist Yf glatt in einer Umgebung von jedem Punkt von U . ■

Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und Y ein Vektorfeld auf M , so erhalten wir für jedes $p \in M$ einen Tangentialvektor $dF_p(Y_p) \in T_{F(p)}N$ durch das Differential von F angewandt auf Y_p . Dies definiert im Allgemeinen aber kein Vektorfeld auf N (wenn F etwa nicht surjektiv oder nicht injektiv ist).

Definition. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Gibt es zu einem Vektorfeld Y auf M ein Vektorfeld Z auf N mit der Eigenschaft, dass für jedes $p \in M$ gilt $dF_p(Y_p) = Z_{F(p)}$, dann nennen wir Y und Z F -verwandt.

Ein nützliches Kriterium zum Überprüfen ob zwei Vektorfelder F -verwandt sind, ist enthalten im folgenden

Lemma 6.5 *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Vektorfelder $Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $Z \in \mathfrak{X}(N)$ sind genau dann F -verwandt, wenn für jede glatte Funktion f definiert auf einer offenen Teilmenge von N gilt*

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F. \quad (6.2)$$

Beweis: Für beliebiges $p \in M$ und einer beliebigen in einer Umgebung von $F(p)$ glatten Funktion f gilt einerseits

$$Y(f \circ F)(p) = Y_p(f \circ F) = dF_p(Y_p)f$$

und andererseits

$$(Zf) \circ F(p) = (Zf)(F(p)) = Z_{F(p)}f.$$

Damit gilt aber (6.2) genau dann für jedes glatte f , wenn $dF_p(Y_p) = Z_{F(p)}$ für alle $p \in M$, d.h. genau dann, wenn Y und Z tatsächlich F -verwandt sind. ■

Obwohl es im Allgemeinen zu einer gegebenen glatten Abbildung $F : M \rightarrow N$ und einem Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ kein Vektorfeld auf N geben muss, dass F -verwandt ist mit Y , gibt es einen Spezialfall wo dies tatsächlich immer der Fall ist.

Proposition 6.6 *Sind M, N glatte Mannigfaltigkeiten und ist $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, dann gibt es zu jedem Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $F_*Y \in \mathfrak{X}(N)$, den Pushforward von Y durch F , das F -verwandt ist mit Y .*

Beweis: Damit $Z \in \mathfrak{X}(N)$ F -verwandt mit Y ist, muss $dF_p(Y_p) = Z_{F(p)}$ für jedes $p \in M$ gelten. Ist nun F ein Diffeomorphismus, so definieren wir ein zu Y F -verwandtes Vektorfeld Z einfach durch

$$Z_q = dF_{F^{-1}(q)}(Y_{F^{-1}(q)}).$$

Offenbar ist Z das eindeutige grobe Vektorfeld das F -verwandt ist mit Y . Schließlich bemerken wir, dass Z als Zusammensetzung glatter Abbildungen

$$Z = dF \circ Y \circ F^{-1}$$

selbst glatt ist. ■

Ist $S \subseteq M$ eine immensierte oder eingebettete Untermannigfaltigkeit, so kann ein Vektorfeld X auf M im Allgemeinen nicht auf S eingeschränkt werden, da X_p nicht unbedingt in $T_p S \subseteq T_p M$ liegen muss für alle $p \in S$. Dieses Problem führt auf folgende Begriffsbildung:

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine immensierte oder eingebettete Untermannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld X auf M heißt *tangential* zu S , wenn $X_p \in T_p S \subseteq T_p M$ für jedes $p \in S$.

Aus Proposition 5.5 erhalten wir sofort:

Lemma 6.7 *Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $S \subseteq M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit und Y ein glattes Vektorfeld auf M . Dann ist Y genau dann tangential zu S , wenn Yf für jede Funktion $f \in C^\infty(M)$ mit $f|_S \equiv 0$ verschwindet.*

Ist $S \subseteq M$ eine immensierte Untermannigfaltigkeit und Y ein glattes Vektorfeld auf M , zu dem es ein ι -verwandtes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(S)$ gibt, dann ist Y offenbar tangential zu S , da $Y_p = d\iota_p(X_p)$ für jedes $p \in S$. Wie das folgende Resultat zeigt, gilt auch die Umkehrung dieser Aussage:

Proposition 6.8 *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine immensierte Untermannigfaltigkeit. Es bezeichne weiters $\iota : S \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Ist $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tangential zu S , dann gibt es ein eindeutig bestimmtes glattes Vektorfeld $Y|_S$ auf S , das ι -verwandt ist mit Y .*

Beweis: Da Y tangential ist zu S , gibt es nach Definition zu jedem $p \in S$ einen Vektor $X_p \in T_p S$ mit $Y_p = d\iota_p(X_p)$. Da $d\iota_p$ injektiv ist, ist X_p eindeutig bestimmt. Das definiert ein grobes Vektorfeld X auf S . Es bleibt zu zeigen, dass X glatt ist.

Es sei $p_0 \in S$ beliebig. Da eine immensierte Untermannigfaltigkeit lokal eingebettet ist, gibt es eine Umgebung V von p_0 in S , die eingebettet ist in M . Es sei U die Kartenumgebung einer Schnittkarte für V in M die p_0 enthält und $W = V \cap U$. Als Schnitt von U ist W eine abgeschlossene Teilmenge von U . Ist $f \in C^\infty(W)$, dann gibt es eine Fortsetzung $\bar{f} \in C^\infty(U)$ von f zu einer glatten Funktion auf U (Übungsbeispiel). Damit erhalten wir für jedes $p \in W$,

$$Xf(p) = X_p(f) = X_p(\bar{f}|_W) = X_p(\bar{f} \circ \iota) = d\iota_p X_p(\bar{f}) = Y_p(\bar{f}) = Y\bar{f}(p).$$

Es folgt $Xf = (Y\bar{f})|_W$, was glatt ist auf W . Da p_0 beliebig gewählt war, ist X glatt in einer Umgebung von jedem Punkt von S und damit insgesamt glatt. ■

Bevor wir zu einer der wichtigsten Operationen auf Vektorfeldern, der Lie Klammer, kommen, bemerken wir noch, dass alle (Definitionen und) Aussagen über Tangentialbündel und Vektorfelder einfach herzuleitende Entsprechungen für Mannigfaltigkeiten mit Rand besitzen.

Definition. Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder. Die *Lie Klammer* von V und W ist das Vektorfeld $[V, W] \in \mathfrak{X}(M)$ definiert durch

$$[V, W]f = VWf - WVf.$$

Bemerkungen.

- (a) Um zu sehen, dass $[V, W]$ ein Vektorfeld ist, genügt es nach Proposition 6.4 nachzuweisen, dass $[V, W]$ eine Derivation ist: Für $f, g \in C^\infty(M)$ gilt

$$\begin{aligned} [V, W](fg) &= V(W(fg)) - W(V(fg)) = V(fWg + gWf) - W(fVg + gVf) \\ &= fVWg + gVWf - fWVg - gWVf = f[V, W]g + g[V, W]f. \end{aligned}$$

- (b) Der Wert des Vektorfeldes $[V, W]$ an einem Punkt $p \in M$ ist die Derivation an p gegeben durch

$$[V, W]_p f = V_p(Wf) - W_p(Vf).$$

Diese Formel ist für praktische Berechnungen schwer zu handhaben, da sie die Berechnung zweiter Ableitungen von f erfordert, die sich am Ende aber wieder wegekürzen. Besser geeignet ist folgende Formel in lokalen Koordinaten:

Sind $V = \sum_i V^i \partial/\partial x^i$ und $W = \sum_j W^j \partial/\partial x^j$ die Koordinatendarstellungen von V und W bezüglich glatter lokaler Koordinaten (x^i) auf M , dann gilt

$$[V, W] = \sum_{i,j} \left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (6.3)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} [V, W]f &= \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_j W^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \sum_i W^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_j V^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

■

Aus der Definition der Lie Klammer folgen sofort eine Reihe (einfacher aber) grundlegender Eigenschaften:

Proposition 6.9 *Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gelten folgenden Aussagen:*

- (a) Bilinearität: Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X] \quad \text{und} \quad [X, aV + bW] = a[X, V] + b[X, W].$$

- (b) Antisymmetrie:

$$[V, W] = -[W, V].$$

- (c) Jacobi Identität:

$$[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0.$$

- (d) Für $f, g \in C^\infty(M)$ ist

$$[fV, gW] = fg[V, W] + (fVg)W - (gWf)V.$$

Beispiel.

Da die Komponentenfunktionen der Koordinatenvektorfelder $(\partial/\partial x^i)$ bezüglich einer beliebigen Karte konstant sind, folgt aus (6.3) für ihre Lie Klammern:

$$[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Lie Klammer ist ihre Verträglichkeit mit F -Verwandschaft:

Proposition 6.10 *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Sind $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(N)$ glatte Vektorfelder, sodass V_i mit W_i F -verwandt ist für $i = 1, 2$, dann ist auch $[V_1, V_2]$ mit $[W_1, W_2]$ F -verwandt.*

Beweis: Da V_i und W_i F -verwandt sind, folgt aus Lemma 6.5,

$$V_1 V_2 (f \circ F) = V_1 ((W_2 f) \circ F) = (W_1 W_2 f) \circ F$$

und analog $V_2 V_1 (f \circ F) = (W_2 W_1 f) \circ F$. Damit erhalten wir aber

$$[V_1, V_2] (f \circ F) = (W_1 W_2 f) \circ F - (W_2 W_1 f) \circ F = ([W_1, W_2] f) \circ F.$$

■

Als Spezialfälle von Proposition 6.10 notieren wir zwei wichtige Korollare.

Korollar 6.11 *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Ist $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, dann gilt*

$$F_* [V, W] = [F_* V, F_* W].$$

Korollar 6.12 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit. Sind Y_1 und Y_2 glatte Vektorfelder auf M , die tangential zu S sind, dann ist auch $[Y_1, Y_2]$ tangential zu S .*

Beweis: Nach Proposition 6.8 gibt es glatte Vektorfelder X_1, X_2 auf S , sodass X_i ι -verwandt ist mit Y_i für $i = 1, 2$. Nach Proposition 6.10 ist dann aber $[X_1, X_2]$ ι -verwandt mit $[Y_1, Y_2]$ und damit tangential zu S . ■

Ein wichtiger Anwendungsbereich von Lie Klammern liegt in der Theorie von Lie Gruppen. Darauf können wir in dieser Vorlesung leider aber nicht näher eingehen. Lie Klammern werden uns allerdings in Abschnitt 8 wieder begegnen, wo wir sie geometrisch als eine Art Richtungsableitung von Vektorfeldern interpretieren.

7 Kotangentialbündel

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit linearen Funktionalen, den Kovektoren, auf Tangentialräumen glatter Mannigfaltigkeiten. Während Tangentialvektoren eine koordinatenfreie Interpretation von Ableitungen von Kurven ermöglichen, wird sich zeigen, dass Kovektoren zu einer Art koordinatenfreiem Analogon des Gradienten einer Funktion führen. Wir beginnen zunächst mit einer kurzen Wiederholung der Grundlagen zu dualen Vektorräumen.

Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so bezeichnen wir mit V^* den zu V dualen Vektorraum aller linearen Funktionale $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ auf V . Wir nennen die Elemente von V^* *Kovektoren*.

Proposition 7.1 *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V , dann bilden die Kovektoren $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$, definiert durch*

$$\varepsilon^i(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

eine Basis von V^* , genannt die zu $\{b_1, \dots, b_n\}$ duale Basis. Insbesondere ist $\dim V^* = \dim V$.

Bemerkung.

- (a) Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V und $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ die dazu duale Basis von V^* , dann gilt für $v = \sum_i v^i b_i \in V$,

$$\varepsilon^j(v) = \sum_i v^i \varepsilon^j(b_i) = v^j.$$

Ist daher $\omega = \sum \omega_j \varepsilon^j \in V^*$, so folgt

$$\omega(v) = \sum_j \omega_j v^j.$$

Definition. Es seien V, W Vektorräume und $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Die zu A duale oder *transponierte* Abbildung $A^* : W^* \rightarrow V^*$ ist definiert durch

$$(A^* \omega)(v) = \omega(Av), \quad \omega \in W^*, v \in V.$$

Proposition 7.2 *Es seien V und W Vektorräume und $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.
 (b) $(\text{Id}_V)^* : V^* \rightarrow V^*$ ist die Identität auf V^* .

Ein sehr wichtiger Umstand betreffend dem Bidualraum $V^{**} = (V^*)^*$ enthält

Proposition 7.3 *Zu jedem endlich-dimensionalen Vektorraum V gibt es einen natürlichen (also basisunabhängigen) Isomorphismus $\xi : V \rightarrow V^{**}$, definiert durch*

$$\xi(v)(\omega) = \omega(v), \quad \omega \in V^*.$$

Bemerkung.

- (a) Wir bemerken noch einmal, dass Proposition 7.3 eine kanonische Identifikation von V und seinem Bidualraum V^{**} ermöglicht. Im Gegensatz dazu, gibt es keinen natürlichen (basisunabhängigen) Isomorphismus zwischen V und V^* .

Wir wenden uns nun wieder glatten Mannigfaltigkeiten zu.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Für $p \in M$ definieren wir den *Kotangentenraum* T_p^*M an p , als den Dualraum von T_pM :

$$T_p^*M := (T_pM)^*.$$

Die Elemente von T_p^*M nennen wir *Tangentenkovektoren* oder *Kovektoren* an p .

Bemerkungen.

- (a) Ist $(U, (x^i))$ eine glatte Karte auf M , dann gibt es für jedes $p \in U$ eine zur Koordinatenbasis $(\partial/\partial x^i|_p)$ duale Basis von T_p^*M , die wir $(\lambda^i|_p)$ bezeichnen. Damit kann jeder Kovektor $\omega \in T_p^*M$ dargestellt werden in der Form

$$\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i|_p.$$

- (b) Es seien $(U, (x^i))$ und $(V, (\bar{x}^i))$ zwei glatte Karten auf M mit $p \in U \cap V$. Bezeichnen $(\lambda^i|_p)$ und $(\bar{\lambda}^i|_p)$ die entsprechenden Koordinatenbasen von T_p^*M , so kann jeder Kovektor ω an p bezüglich beider Basen dargestellt werden. Eine einfache Rechnung zeigt, wie sich die Komponenten von ω bei einem Koordinatenwechsel verhalten:

$$\omega_i = \sum_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(p) \bar{\omega}_j. \quad (7.1)$$

Da nach der Kettenregel für das Verhalten der Koordinatenvektorfelder bei einem Koordinatenwechsel ein analoges Verhalten gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \Big|_p$$

werden Kovektoren in der Literatur auch kovariante Vektoren genannt. Da sich Tangentialvektoren nach (3.3) entgegengesetzt transformieren, nennt man sie auch kontravariante Vektoren.

Definition. Für eine glatte Mannigfaltigkeit M ist das *Kotangentenbündel* T^*M von M definiert als disjunkte Vereinigung aller Kotangentenräume an Punkte von M :

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M = \bigcup_{p \in M} \{(p, \omega) : \omega \in T_p^*M\}.$$

Die *natürliche Projektion* $\pi : T^*M \rightarrow M$ ist gegeben durch $\pi(p, \omega) = p$.

Ist $(U, (x^i))$ eine glatte Karte auf M , und bezeichnet $(\lambda^i|_p)$ für jedes $p \in U$ die zu $(\partial/\partial x^i|_p)$ duale Basis von T_p^*M , so nennen wir die Abbildung $\lambda^i : U \rightarrow T^*M$ das i -te Koordinatenkovektorfeld.

Genau wie das Tangentialbündel trägt auch das Kotangentialbündel die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit.

Satz 7.4 *Ist M eine glatte n -Mannigfaltigkeit, so trägt das Kotangentialbündel T^*M von M in natürlicher Weise die Struktur einer glatten $2n$ -Mannigfaltigkeit, sodass die Projektion $\pi : T^*M \rightarrow M$ glatt ist.*

Beweis: Unter Verwendung von Lemma 1.8 verläuft der Beweis analog zu Satz 3.8. Wir skizzieren daher nur die Konstruktion der Karten für T^*M und die Berechnung der Kartenwechsel. Ist $(U, \varphi = (x^i))$ eine glatte Karte auf M , dann sei die Abbildung $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\Phi \left(\sum_i \xi^i \lambda^i|_p \right) = (p, (\xi_1, \dots, \xi_n)),$$

wobei λ^i das i -te Koordinatenkovektorfeld in Bezug auf (x^i) ist. Ist nun $(V, \psi = (\bar{x}^i))$ eine weitere glatte Karte und $\Psi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ definiert analog zu Φ , so folgt auf $\pi^{-1}(U \cap V)$ aus (7.1) für den Kartenwechsel

$$\Phi \circ \Psi^{-1}(p, (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)) = \left(p, \left(\sum_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1}(p) \bar{\xi}_j, \dots, \sum_j \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}(p) \bar{\xi}_j \right) \right).$$

■

Ist $(U, (x^i))$ eine glatte Karte auf M , dann bildet $\pi^{-1}(U)$ zusammen mit der glatten Abbildung

$$\sum_i \xi_i \lambda^i|_p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), \xi_1, \dots, \xi_n)$$

eine glatte Karte für T^*M . Wir bezeichnen die so definierten Koordinaten (x^i, ξ^i) die Standardkoordinaten für T^*M bezüglich (x^i) .

Definition. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so heißt eine stetige Abbildung $\omega : M \rightarrow T^*M$ ein Kovektorfeld oder 1-Form, wenn

$$\pi \circ \omega = \text{Id}_M, \tag{7.2}$$

bzw. äquivalent dazu, wenn $p \mapsto \omega_p := \omega(p) \in T_p^*M$ für jedes $p \in M$. Wir nennen $\omega : M \rightarrow T^*M$ ein grobes Kovektorfeld, wenn ω Relation (7.2) erfüllt.

Bezüglich beliebiger glatter Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, kann ein Kovektorfeld ω mit Hilfe der Koordinatenkovektorfelder (λ^i) dargestellt werden

$$\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i.$$

Die n Funktionen $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißen die Komponentenfunktionen von ω und sind charakterisiert durch

$$\omega_i(p) = \omega_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right).$$

Um zu überprüfen ob ein vorgelegtes grobes Kovektorfeld glatt ist, gibt es wieder eine Reihe von Möglichkeiten. Analog zum Fall von Vektorfelder notieren wir:

Lemma 7.5 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\omega : M \rightarrow T^*M$ ein grobes Kovektorfeld auf M . Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) *Ist $\omega = \sum_i \omega_i \lambda^i$ die Koordinatendarstellung von ω bezüglich einer beliebigen glatten Karte $(U, (x^i))$ auf M , dann ist ω genau dann glatt auf U , wenn die Komponentenfunktionen ω_i glatt sind.*

(b) *Das Kovektorfeld ω ist genau dann glatt, wenn für jedes auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ glatte Vektorfeld X , die Funktion $\langle \omega, X \rangle : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\langle \omega, X \rangle(p) = \omega_p(X_p)$$

glatt ist.

Beispiel.

Ist $(U, (x^i))$ eine glatte Karte auf M , dann sind die n Koordinatenkovektorfelder $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ nach Lemma 7.5 glatt auf U .

Notation. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{X}^*(M)$ den Vektorraum aller glatten Kovektorfelder auf M .

Ist $f \in C^\infty(M)$ und $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, dann ist $f\omega : M \rightarrow T^*M$, definiert durch

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p$$

ein glattes Kovektorfeld.

Wir kommen nun zur wichtigsten Anwendung von Kovektorfeldern. Sie ermöglichen nämlich dem Gradienten einer Funktion koordinatenunabhängig Sinn zu geben.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$. Das *Differential* df von f ist das glatte Kovektorfeld auf M definiert durch

$$df_p(v) = vf, \quad v \in T_pM.$$

Bemerkung.

(a) Um zu sehen, dass df tatsächlich glatt ist, verwenden wir Lemma 7.5(b): Ist X ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, dann ist auch $\langle df, X \rangle = Xf$ glatt und damit df glatt.

Um die Verbindung zum klassischen Gradienten einer Funktion herzustellen, betrachten wir das Differential df in lokalen Koordinaten. Es sei also $(U, (x^i))$ eine glatte Karte auf M und (λ^i) die zugehörigen Koordinatenkovektorfelder auf U . Schreiben wir df in der Form

$$df_p = \sum_i A_i(p) \lambda^i|_p,$$

mit glatten Komponentenfunktionen $A_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$A_i(p) = df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Damit erhalten wir

$$df_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \lambda^i|_p. \quad (7.3)$$

Die Komponentenfunktionen von df bezüglich *jeder* glatten Karte sind also die partiellen Ableitungen von f bezüglich dieser Koordinaten. Daher können wir df als koordinatenunabhängiges Analogon des Gradienten einer Funktion ansehen.

Bestimmen wir das Differential der Koordinatenfunktionen $x^j : U \rightarrow \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$dx^j|_p = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) \lambda^i|_p = \lambda^j|_p.$$

Das bedeutet, *das i -te Koordinatenkovektorfeld ist nichts anderes als dx^i !* Wir verwenden daher von jetzt an auch die neue Notation dx^i für die Koordinatenvektorfelder. Formel (7.3) nimmt dann folgende Form an

$$df_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i|_p.$$

Proposition 7.6 *Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f, g \in C^\infty(M)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $d(af + bg) = adf + bdf$.
- (b) $d(fg) = fdf + gdf$.
- (c) Für $g \neq 0$ gilt $d(f/g) = (gdf - fdf)/g^2$.
- (d) Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, welches das Bild von f enthält, und $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, dann ist $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$.
- (e) Ist f konstant, dann ist $df = 0$.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Differentials ist die folgende Charakterisierung von glatten Funktionen deren Differential verschwindet.

Proposition 7.7 *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$, dann ist genau dann $df = 0$, wenn f auf jeder Zusammenhangskomponente von M konstant ist.*

Beweis: Wir können annehmen, dass M zusammenhängend ist und müssen dann nach Proposition 7.6 (e) nur noch zeigen, dass $df = 0$ impliziert, dass f konstant ist. Dazu sei $p \in M$ fest und $\mathcal{C} = \{q \in M : f(q) = f(p)\}$. Für einen beliebigen Punkt $q \in \mathcal{C}$ sei U eine glatte Koordinatenkugel zentriert in q . Nach (7.3) gilt dann $\partial f / \partial x^i \equiv 0$ auf U für jedes i . Damit ist aber f konstant auf U . Daraus folgt, dass die Menge \mathcal{C} offen ist und aufgrund der Stetigkeit von f ist sie auch abgeschlossen. Da M zusammenhängend ist, folgt $\mathcal{C} = M$. ■

Bemerkung.

- (a) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $f \in C^\infty(M)$. Durch die Wahl einer glatten Karte, die p enthält, können wir f als glatte Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ansehen. Die Taylor Formel zeigt dann, dass für betragsmäßig kleine $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(p+v) - f(p) \approx \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)v^i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i|_p(v) = df_p(v),$$

wobei wir hier v als Element von $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ ansehen. Das bedeutet, df_p ist das lineare Funktional, das kleine Änderungen von f in den unabhängigen Variablen in der Nähe von p am besten approximiert.

Unser nächstes Resultat ist ein Analogon zu Proposition 3.12 für Differentiale.

Proposition 7.8 *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M)$ und $\gamma : J \rightarrow M$ eine glatte Kurve, dann ist die Ableitung der Funktion $f \circ \gamma : J \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)).$$

Beweis: Aus den Definitionen folgt für jedes $t_0 \in J$,

$$df_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) = \gamma'(t_0)f = d\gamma_{t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (f \circ \gamma) = (f \circ \gamma)'(t_0).$$

■

Bemerkungen.

- (a) Für glatte $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir nun zwei Arten von „Ableitungen“ definiert, einerseits das Differential df_p als lineare Abbildung von T_pM nach $T_{f(p)}\mathbb{R}$ und andererseits das Differential df_p als lineare Abbildung von T_pM nach \mathbb{R} . Identifizieren wir \mathbb{R} mit seinem Tangentialraum in einem beliebigen Punkt, so sieht man durch Übergang zu lokalen Koordinaten, dass diese beiden Begriffe der Ableitung von f übereinstimmen: Beide werden durch die Zeilen-Matrix beschrieben, deren Komponenten die partiellen Ableitungen von f sind.
- (b) Passend zur Diskussion in (a) können wir für eine glatte Kurve γ in M und $f \in C^\infty(M)$ den Ausdruck $(f \circ \gamma)'(t)$ einerseits als Element des Tangentialraumes $T_{f \circ \gamma(t)}\mathbb{R}$ ansehen, das nach Proposition 3.12 mit $df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ übereinstimmt, und andererseits als die gewöhnliche Ableitung einer reellen Funktion, die nach Proposition 7.8 mit $df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ übereinstimmt.

Wir haben gesehen, dass jede glatte Abbildung $G : M \rightarrow N$ eine lineare Abbildung $dG_p : T_pM \rightarrow T_{G(p)}N$ auf Tangentialvektoren induziert, das Differential von G . Indem wir diese Abbildung dualisieren also zur Transponierten übergehen, erhalten wir den sogenannten *Pullback* von G auf Kovektoren

$$dG_p^* := (dG_p)^* : T_{G(p)}^*N \rightarrow T_p^*M.$$

Das Überraschende an Pullbacks ist, dass während für Vektorfelder im Allgemeinen kein Pushforward existiert, gibt es stets einen Pullback von glatten Kovektorfeldern.

Definition. Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $G : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Der Pullback $dG_p^* : T_{G(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ von G an p ist definiert durch

$$dG_p^*(\omega)(v) = \omega(dG_p(v)), \quad \omega \in T_{G(p)}^*N, v \in T_pM.$$

Ist ω ein glattes Kovektorfeld auf N , so ist der Pullback $G^*\omega$ das Kovektorfeld auf M definiert durch

$$(G^*\omega)_p = dG_p^*(\omega_{G(p)}).$$

Um zu zeigen, dass der Pullback glatter Kovektorfelder glatt ist, benötigen wir zunächst:

Lemma 7.9 *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $G : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist $f \in C^\infty(N)$ und $\omega \in \mathfrak{X}^*(N)$, dann gilt*

$$G^*df = d(f \circ G) \quad \text{und} \quad G^*(f\omega) = (f \circ G)G^*\omega.$$

Beweis: Es sei $v \in T_pM$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} (G^*df)_p(v) &= (dG_p^*(df_{G(p)}))(v) = df_{G(p)}(dG_p(v)) = dG_p(v)f \\ &= v(f \circ G) = d(f \circ G)_p(v). \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} (G^*(f\omega))_p &= dG_p^*((f\omega)_{G(p)}) = dG_p^*(f(G(p))\omega_{G(p)}) = f(G(p))dG_p^*(\omega_{G(p)}) \\ &= f(G(p))(G^*\omega)_p = ((f \circ G)G^*\omega)_p. \end{aligned}$$

■

Proposition 7.10 *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $G : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ist ω ein glattes Kovektorfeld auf N , dann ist $G^*\omega$ ein glattes Kovektorfeld auf M .*

Beweis: Es sei $p \in M$ beliebig und $(U, (x^i))$ eine glatte Karte auf M mit $p \in U$ und $(V, (y^j))$ eine glatte Karte auf N mit $G(p) \in V$. Schreiben wir ω in lokalen Koordinaten in der Form $\omega = \sum_j \omega_j dy^j$ mit glatten Funktionen $\omega_j : V \rightarrow \mathbb{R}$, so folgt aus Lemma 7.9,

$$G^*\omega = G^* \left(\sum_j \omega_j dy^j \right) = \sum_j (\omega_j \circ G) G^* dy^j = \sum_j (\omega_j \circ G) d(y^j \circ G),$$

womit $G^*\omega$ glatt ist. ■

Bemerkung.

- (a) Wir notieren noch einmal die im letzten Beweis hergeleitete Formel für die Berechnung von Pullbacks in lokalen Koordinaten:

$$G^*\omega = \sum_j (\omega_j \circ G) dG^j. \quad (7.4)$$

Hier bezeichnet G^j die j -te Komponentenfunktion von G bezüglich der gegebenen Koordinaten.

Beispiel.

Es sei $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung definiert durch

$$(u, v) = G(x, y, z) = (x^2y, y \sin z),$$

und es sei $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{R}^2)$ das Kovektorfeld

$$\omega = u \, dv + v \, du.$$

Nach (7.4) ist dann der Pullback $G^*\omega$ gegeben durch

$$\begin{aligned} G^*\omega &= (u \circ G)d(v \circ G) + (v \circ G)d(u \circ G) = (x^2y)d(y \sin z) + (y \sin z)d(x^2y) \\ &= x^2y(\sin z \, dy + y \cos z \, dz) + y \sin z(2xy \, dx + x^2 \, dy) \\ &= 2xy^2 \sin z \, dx + 2x^2y \sin z \, dy + x^2y^2 \cos z \, dz. \end{aligned}$$

Wir bemerken als nächstes, dass die Einschränkung eines Kovektorfeldes auf eine Untermannigfaltigkeit unproblematisch ist. Ist nämlich $S \subseteq M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit und ω ein glattes Kovektorfeld auf M , dann ist der Pullback $\iota^*\omega$ ein glattes Kovektorfeld auf S . Für $v \in T_pS$ gilt dann

$$(\iota^*\omega)_p(v) = \omega_p(dt_p(v)) = \omega_p(v),$$

da $dt_p : T_pS \rightarrow T_pM$ die Inklusionsabbildung ist. Das bedeutet $\iota^*\omega$ ist einfach die Einschränkung von ω auf Vektoren tangential zu S . Wir schreiben daher auch oft $\omega|_S$ anstatt $\iota^*\omega$. Es ist allerdings zu beachten, dass $\omega|_S$ identisch verschwinden kann auf S , während ω als Kovektorfeld auf M , nicht auf S verschwindet.

Beispiel.

Es sei $\omega = dy$ auf \mathbb{R}^2 und S die x -Achse aufgefasst als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 . Als Kovektorfeld auf \mathbb{R}^2 verschwindet ω in keinem Punkt, da eine seiner Komponenten stets 1 ist. Für die Einschränkung $\omega|_S$ gilt jedoch

$$\omega|_S = \iota^*dy = d(y \circ \iota) = 0,$$

da y identisch Null ist auf S .

Eine weitere wichtige Anwendung von Kovektorfeldern liegt in Kurvenintegralen auf glatten Mannigfaltigkeiten. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall:

Definition. Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und ω ein glattes Kovektorfeld auf $[a, b]$. Ist die Koordinatendarstellung von ω bezüglich der Standardkoordinaten auf $[a, b]$ gegeben durch $\omega_t = f(t) \, dt$, so definieren wir das Integral von ω über $[a, b]$ durch

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Wie das folgende Resultat zeigt, ist das so definierte Integral invariant unter Diffeomorphismen.

Proposition 7.11 *Es sei ω ein glattes Kovektorfeld auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein monoton steigender Diffeomorphismus, dann gilt*

$$\int_{[c,d]} \varphi^* \omega = \int_{[a,b]} \omega.$$

Beweis: Bezeichnen wir die Standardkoordinaten auf $[c, d]$ mit s und jene auf $[a, b]$ mit t , so folgt aus (7.4), dass die Koordinatendarstellung von $\varphi^* \omega$ gegeben ist durch $(\varphi^* \omega)_s = f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds$. Damit folgt aus der Substitutionsregel für Integrale,

$$\int_{[c,d]} \varphi^* \omega = \int_c^d f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds = \int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} \omega.$$

■

Bemerkung.

(a) Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein monoton fallender Diffeomorphismus, dann gilt

$$\int_{[c,d]} \varphi^* \omega = - \int_{[a,b]} \omega.$$

Definition. Es sei nun M eine glatte Mannigfaltigkeit. Unter einem Kurvensegment auf M verstehen wir eine stetige Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ definiert auf einem kompakten Intervall $[a, b]$. Wir nennen γ glatt, wenn es eine glatte Fortsetzung auf ein offenes Intervall, das $[a, b]$ enthält, besitzt.

Ein stückweise glattes Kurvensegment ist ein Kurvensegment $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ mit der Eigenschaft, dass es eine endliche Partition $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ von $[a, b]$ gibt, sodass $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ glatt ist für alle i .

Das folgende Hilfsresultat zeigt, dass wir durch stückweise glatte Kurvensegmente von jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit, jeden anderen erreichen können.

Lemma 7.12 *Ist M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit, dann können je zwei Punkte von M durch stückweise glatte Kurvensegmente verbunden werden.*

Beweis: Es sei $p \in M$ beliebig aber fest gewählt und es sei $\mathcal{C} \subseteq M$ die Menge aller Punkte $q \in M$, die durch ein stückweise glattes Kurvensegment mit p verbunden werden können. Da $p \in \mathcal{C}$ und M zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen, dass \mathcal{C} offen und abgeschlossen ist.

Ist $q \in \mathcal{C}$, dann gibt ein stückweise glattes Kurvensegment γ von p nach q . Ist nun U eine glatte Koordinatenkugel zentriert in q und $q' \in U$ beliebig, so kann man leicht ein stückweise glattes Kurvensegment von q' nach p wie folgt konstruieren: Wir durchlaufen zunächst γ von p nach q und folgen dann in Koordinaten einem Geradenstück von q nach q' . Damit ist auch $q' \in \mathcal{C}$ und daher \mathcal{C} offen.

Ist schließlich $q \in \partial \mathcal{C}$, so sei wieder U eine glatte Koordinatenkugel zentriert in q . Da q ein Randpunkt von \mathcal{C} ist, gibt es einen Punkt $q' \in \mathcal{C} \cap U$. Wie zuvor ist es leicht nun ein stückweise glattes Kurvensegment von p nach q zu konstruieren, womit $q \in \mathcal{C}$ und damit \mathcal{C} abgeschlossen ist. ■

Wir sind nun in der Lage das Kurvenintegral eines Kovektorfeldes zu definieren.

Definition. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ein glattes Kurvensegment und ω ein glattes Kovektorfeld auf M , dann ist das Kurvenintegral von ω über γ definiert durch

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega.$$

Ist γ stückweise glatt, so definieren wir

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{[a_{i-1}, a_i]} \gamma^* \omega,$$

wobei $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \dots, k$ die Teilintervalle sind auf denen γ glatt ist.

Proposition 7.13 Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ein stückweise glattes Kurvensegment und $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{X}^*(M)$. Dann gilt:

(a) Für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\gamma} (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2) = c_1 \int_{\gamma} \omega_1 + c_2 \int_{\gamma} \omega_2.$$

(b) Ist γ eine konstante Kurve, dann ist $\int_{\gamma} \omega = 0$.

(c) Für $a < c < b$ gilt,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega,$$

wobei $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$.

Unser nächstes Resultat gibt eine nützliche alternative Darstellung für das Kurvenintegral eines Kovektorfeldes.

Proposition 7.14 Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ein stückweise glattes Kurvensegment, dann gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass γ glatt ist und die Kurve ganz in einer glatten Kartenumgebung enthalten ist. Schreiben wir $\gamma = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ und $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$ in Koordinatendarstellung, so gilt

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_i \omega_i(\gamma(t)) dx^i(\gamma'(t)) = \sum_i \omega_i(\gamma(t)) (\gamma^i)'(t).$$

Damit erhalten wir aus (7.4),

$$(\gamma^* \omega)_t = \sum_i (\omega_i \circ \gamma)(t) d(\gamma^i)_t = \sum_i \omega_i(\gamma(t)) (\gamma^i)'(t) dt = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

und daher für das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Ist nun γ ein beliebiges glattes Kurvenstück, so gibt es aufgrund der Kompaktheit von $[a, b]$ eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$, sodass $\gamma[a_{i-1}, a_i]$ für jedes i ganz in einer glatten Kartenumgebung enthalten ist. Wir können daher das obige Argument auf die einzelnen Teilintervalle anwenden. Analog gehen wir vor, wenn γ ein stückweise glattes Kurvensegment ist. ■

Beispiel.

Es sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und ω das Kovektorfeld auf M gegeben durch

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Ist $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow M$ das glatte Kurvensegment definiert durch

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

so ist $\gamma^*\omega$ leicht zu berechnen indem wir $x = \cos t$ und $y = \sin t$ in der Definition von ω substituieren. Es folgt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[0, 2\pi]} \frac{\cos t(\cos t dt) - \sin t(-\sin t dt)}{\sin^2 t + \cos^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Kurvenintegralen ist deren Invarianz unter Parameterwechseln:

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : [a, b] \rightarrow M, \bar{\gamma} : [c, d] \rightarrow M$ zwei stückweise glatte Kurvensegmente. Wir sagen $\bar{\gamma}$ ist aus γ durch einen die Orientierung erhaltenden (umkehrenden) Parameterwechsel hervorgegangen, wenn es einen monoton steigenden (fallenden) Diffeomorphismus $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ gibt mit $\bar{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.

Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ein monoton steigender Diffeomorphismus, so folgt unmittelbar aus Proposition 7.11 für glatte Kurvensegmente,

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega = \int_{[c, d]} (\gamma \circ \varphi)^* \omega = \int_{[c, d]} \varphi^* \gamma^* \omega = \int_{[a, b]} \gamma^* \omega = \int_{\gamma} \omega.$$

Anwendung dieser Argumentation auf einzelne Teilintervalle stückweise glatter Kurvensegmente liefert das angekündigte Resultat.

Proposition 7.15 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, ω ein glattes Kovektorfeld auf M und γ ein stückweise glattes Kurvensegment in M . Ist $\bar{\gamma}$ aus γ durch einen die Orientierung erhaltenden (umkehrenden) Parameterwechsel hervorgegangen, so gilt*

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega = (-) \int_{\gamma} \omega.$$

Wie in der gewöhnlichen Analysis kann der Wert des Kurvenintegral eines „Potentialfeldes“ besonders einfach bestimmt werden.

Satz 7.16 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ein stückweise glattes Kurvensegment. Dann gilt für jedes $f \in C^\infty(M)$,*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Beweis: Es sei zunächst γ glatt. Dann gilt nach Proposition 7.14 und 7.8, sowie dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_\gamma df = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Ist γ nur stückweise glatt und sind $a = a_0 < \dots < a_k = b$ die Endpunkte der Intervalle auf denen γ glatt ist, so folgt durch Anwendung des ersten Teils des Beweises auf die einzelnen Teilintervalle

$$\int_\gamma df = \sum_{i=1}^k (f(\gamma(a_i)) - f(\gamma(a_{i-1}))) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad \blacksquare$$

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Man nennt ein glattes Kovektorfeld ω *exakt* auf M , wenn es eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ gibt mit $\omega = df$. In diesem Fall, heißt f ein Potential für ω .

Man nennt das Kovektorfeld ω *konservativ*, wenn das Kurvenintegral von ω über jedes geschlossene (d.h. mit demselben Anfangs- und Endpunkt) stückweise glatte Kurvensegment verschwindet.

Bemerkungen.

- (a) Das Potential eines exakten Kovektorfeldes ist nicht eindeutig bestimmt. Nach Proposition 7.7 ist die Differenz zweier Potentiale allerdings konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von M .
- (b) Ein glattes Kovektorfeld ω ist genau dann konservativ, wenn

$$\int_\gamma \omega = \int_{\bar{\gamma}} \omega$$

für je zwei stückweise glatte Kurvensegmente γ und $\bar{\gamma}$ mit denselben Anfangs- und Endpunkten.

Nach Satz 7.16 ist jedes exakte Kovektorfeld konservativ. Wie der nächste Satz zeigt, gilt auch die Umkehrung.

Satz 7.17 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein glattes Kovektorfeld auf M ist genau dann konservativ, wenn es exakt ist.*

Beweis: Nach Satz 7.16 genügt es zu zeigen, dass jedes konservative $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ exakt ist. Dazu nehmen wir zunächst an, dass M zusammenhängend ist. Wir bezeichnen für $p, q \in M$ mit

$$\int_p^q \omega$$

den Wert des Kurvenintegrals von ω über ein beliebiges stückweise glattes Kurvensegment γ von p nach q . Da ω konservativ ist, ist diese Notation gerechtfertigt.

Es gilt dann offenbar

$$\int_{p_1}^{p_2} \omega + \int_{p_2}^{p_3} \omega = \int_{p_1}^{p_3} \omega \quad (7.5)$$

für beliebige $p_1, p_2, p_3 \in M$. Wir wählen nun ein beliebiges $p_0 \in M$ fest und definieren $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(q) = \int_{p_0}^q \omega.$$

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass $df = \omega$. Dazu sei $q_0 \in M$ beliebig und $(U, (x^i))$ eine glatte in q_0 zentrierte Karte. Schreiben wir die Koordinatendarstellung von ω in der Form $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$, so ist also zu zeigen, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(q_0) = \omega_j(q_0)$$

für alle $j = 1, \dots, n$. Wir fixieren dazu j und definieren ein glattes Kurvensegment $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow U$ über seine Koordinatendarstellung $\gamma(t) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$, wobei t in der j -ten Koordinate läuft und ε so klein gewählt ist, dass $\gamma[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq U$. Es sei $p_1 = \gamma(-\varepsilon)$ und die Funktion $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\bar{f}(q) = \int_{p_1}^q \omega.$$

Aus (7.5) folgt dann

$$f(q) - \bar{f}(q) = \int_{p_0}^q \omega - \int_{p_1}^q \omega = \int_{p_0}^{p_1} \omega,$$

was nicht von q abhängt. Damit unterscheiden sich \bar{f} und f nur durch eine Konstante. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x^j}(q_0) = \omega_j(q_0).$$

Aus (3.4) folgt $\gamma'(t) = \partial/\partial x^j|_{\gamma(t)}$, und damit

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_i \omega_i(\gamma(t)) dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\gamma(t)} \right) = \omega_j(\gamma(t)).$$

Da die Einschränkung von γ auf $[-\varepsilon, t]$ ein glattes Kurvensegment von p_1 nach $\gamma(t)$ ist, erhalten wir aus Proposition 7.14

$$\bar{f} \circ \gamma(t) = \int_{p_1}^{\gamma(t)} \omega = \int_{-\varepsilon}^t \omega_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) ds = \int_{-\varepsilon}^t \omega_j(\gamma(s)) ds$$

und damit aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x^j}(q_0) = \gamma'(0)\bar{f} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \bar{f} \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{-\varepsilon}^t \omega_j(\gamma(s)) ds = \omega_j(\gamma(0)) = \omega_j(q_0),$$

womit $\omega = df$ für zusammenhängendes M gezeigt ist. Ist M nicht zusammenhängend und bezeichnen M_i die Komponenten von M , so gibt es nach dem ersten Teil des Beweises Funktionen $f_i \in C^\infty(M_i)$ mit $df_i = \omega$ auf M_i . Definieren wir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ als die Funktion, die auf M_i gleich f_i ist, so folgt $\omega = df$ auf M . \blacksquare

Das von uns auf Seite 79 besprochene Beispiel zeigt, dass nicht jedes Kovektorfeld exakt ist. Eine sehr einfache notwendige Bedingung enthält das folgende

Lemma 7.18 *Sei ω ein exaktes Kovektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Dann erfüllen die Komponentenfunktionen ω_k von ω bezüglich jeder glatten Karte die Relation*

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}. \quad (7.6)$$

Beweis: Es sei f ein Potential für ω . Ist $(U, (x^i))$ eine beliebige glatte Karte auf M und $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$ die Koordinatendarstellung von ω , dann sind wegen $\omega = df$ die Komponentenfunktionen von ω gegeben durch $\omega_i = \partial f / \partial x^i$. Da f glatt ist auf U gilt aber auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

und damit die Relation (7.6). ■

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ω ein glattes Kovektorfeld auf M . Man nennt ω geschlossen, wenn die Komponenten ω_k von ω bezüglich jeder Karte die Relation (7.6) erfüllen.

Wie das folgende Resultat zeigt, ist es für den Nachweis, dass ein gegebenes Kovektorfeld geschlossen ist, nicht notwendig Relation (7.6) in jeder Karte zu überprüfen. Es genügt ein glatter Atlas.

Proposition 7.19 *Es sei ω ein glattes Kovektorfeld auf M . Erfüllen die Komponentenfunktionen von ω Relation (7.6) in einer beliebigen glatten Karte um jeden Punkt, dann ist ω geschlossen.*

Wir verschieben den Beweis von Proposition 7.19 bis ans Ende dieses Abschnitts, wo wir in der Lage sein werden, einen einfachen Beweis anzugeben.

Korollar 7.20 *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $G : M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Dann bildet der Pullback $G^* : \mathfrak{X}^*(N) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ exakte Kovektorfelder auf exakte ab und geschlossene Kovektorfelder auf geschlossene.*

Beweis: Die Behauptung für exakte Kovektorfelder folgt direkt aus Lemma 7.9. Zum Beweis der Aussage für geschlossene Kovektorfelder sei (U, φ) eine beliebige glatte Karte auf N . Da G ein lokaler Diffeomorphismus ist, bildet dann $\varphi \circ G$ eine glatte Karte auf M in einer Umgebung von jedem Punkt von $G^{-1}(U)$. Bezüglich der so gewählten Koordinaten, ist die Koordinatendarstellung von G die Identität. Erfüllt daher ω die Relation (7.6) in U , dann erfüllt $G^*\omega$ Relation (7.6) in $G^{-1}(U)$. Eine Anwendung von Proposition 7.19 liefert nun die gewünschte Aussage. ■

Die naheliegende Frage ob jedes geschlossene Kovektorfeld auch exakt ist, ist subtiler als die analoge Frage für konservative Kovektorfelder. Die Antwort für geschlossene Kovektorfelder hängt nämlich, wie das folgende Beispiel illustriert, von der Form des Definitionsbereiches ab.

Beispiel.

Wir betrachten wieder auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ das Kovektorfeld gegeben durch

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass ω geschlossen ist. Wie wir bereits besprochen haben, ist ω allerdings nicht exakt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Schrenken wir den Definitionsbereich von ω jedoch auf die rechte Halbebene

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

ein, so gilt dort

$$\omega = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right).$$

Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *sternförmig*, wenn es ein $c \in U$ gibt, sodass für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke von c nach x ganz in U liegt.

Satz 7.21 *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene sternförmige Menge, dann ist jedes geschlossene Kovektorfeld auf U exakt.*

Beweis: Es sei U sternförmig in Bezug auf $c \in U$ und es sei $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$ ein geschlossenes Kovektorfeld auf U . Um ein Potential für ω zu konstruieren, bezeichnen wir für jedes $x \in U$ mit $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow U$ die Verbindungsstrecke von c nach x , parametrisiert durch

$$\gamma_x(t) = c + t(x - c).$$

Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega.$$

Um zu zeigen, dass f ein Potential von ω ist, müssen wir wieder $\partial f / \partial x^i = \omega_i$ für $i = 1, \dots, n$ nachweisen. Aus (3.4) folgt $\omega_{\gamma_x(t)}(\gamma'_x(t)) = \sum_i \omega_i(c + t(x - c))(x^i - c^i)$ und damit aus Proposition 7.14

$$f(x) = \int_0^1 \omega_{\gamma_x(t)}(\gamma'_x(t)) dt = \int_0^1 \sum_i \omega_i(c + t(x - c))(x^i - c^i) dt.$$

Da der Integrand glatt ist, dürfen wir Integration und Differentiation vertauschen, und erhalten so unter Verwendung der Voraussetzung, dass ω geschlossen ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) &= \int_0^1 \left(\sum_i t \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}(c + t(x - c))(x^i - c^i) + \omega_j(c + t(x - c)) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_i t \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}(c + t(x - c))(x^i - c^i) + \omega_j(c + t(x - c)) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t \omega_j(c + t(x - c))) dt = \omega_j(x). \end{aligned}$$

■

Korollar 7.22 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ω ein geschlossenes Kovektorfeld auf M . Dann besitzt jedes $p \in M$ eine Umgebung auf der ω exakt ist.*

Beweis: Es sei $p \in M$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es eine glatte Koordinatenkugel (U, φ) , die p enthält, auf der ω Relation (7.6) erfüllt. Da eine Kugel sternförmig ist, können wir Satz 7.21 auf die Koordinatendarstellung von ω anwenden und erhalten eine Funktion $f \in C^\infty(U)$ mit $\omega|_U = df$. ■

Da wir im obigen Beweis nur verwendet haben, dass es *eine* glatte Karte gibt auf der ω Relation (7.6) erfüllt, können wir nun auch (ohne Zirkelschluss) einen einfachen Beweis von Proposition 7.19 angeben:

Beweis von Proposition 7.19: Es sei $p \in M$ beliebig und $(U, (x^i))$ eine glatte Karte mit $p \in U$ auf der ω die Relation (7.6) erfüllt. Durch eventuelles Einschränken von U können wir annehmen, dass U eine Koordinatenkugel ist. Nach dem Beweis von Korollar 7.22 ist dann $\omega|_U$ exakt und daher geschlossen. Da $p \in M$ beliebig war, ist ω in einer Umgebung von jedem Punkt geschlossen und damit auch auf ganz M . ■

8 Integralkurven und Flüsse

Wir wenden uns nun den primären geometrischen Objekten zu, die mit einem glatten Vektorfelder assoziiert werden können, nämlich dessen Integralkurven. Dabei handelt es sich um glatte Kurven, deren Tangentialvektoren an jedem Punkt mit dem Wert des gegebenen Vektorfeldes dort übereinstimmen. Die Familie aller Integralkurven eines Vektorfeldes bestimmt wiederum eine Familie von Diffeomorphismen offener Teilmengen der Mannigfaltigkeit, welche man einen Fluss nennt. Der Hauptsatz dieses Abschnitts zeigt, dass jedes glatte Vektorfeld einen eindeutigen maximalen Fluss bestimmt. Am Ende des Kapitels führen wir schließlich noch die Lie-Ableitung ein, welche es erlaubt koordinatenunabhängig die Änderungsrate eines Vektorfeldes entlang des durch ein anderes Vektorfeld bestimmten Flusses zu berechnen.

Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und V ein glattes Vektorfeld auf M . Eine *Integralkurve* von V ist eine glatte Kurve $\gamma : J \rightarrow M$, sodass für alle $t \in J$,

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}.$$

Ist $0 \in J$, dann heißt der Punkt $p = \gamma(0)$ der *Startpunkt* von γ .

Beispiele.

- (a) Es seien (x, y) die Standardkoordinaten auf \mathbb{R}^2 und

$$V = \frac{\partial}{\partial x}$$

das erste Koordinatenvektorfeld. Offenbar sind die Integralkurven von V genau die Geraden parallel zur x -Achse mit Parametrisierungen der Form $\gamma(t) = (a + t, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Damit existiert eine eindeutige Integralkurve von V mit Startpunkt an einem beliebigen vorgegebenen Punkt und die Bilder verschiedener Integralkurven sind entweder identisch oder disjunkt.

- (b) Es sei nun W das Vektorfeld auf \mathbb{R}^2 definiert durch

$$W = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ist $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve, in Standardkoordinaten geschrieben als $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, dann bedeutet die Bedingung $\gamma'(t) = W_{\gamma(t)}$ an γ eine Integralkurve von W zu sein, dass

$$x'(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} = x(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} - y(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Vergleich der Komponenten dieser Vektoren zeigt, dass dies genau dann gilt, wenn $x(t)$ und $y(t)$ Lösungen des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen sind:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Damit sind die Integralkurven von W von der Form

$$\gamma(t) = (a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t)$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Wieder gibt es eine eindeutige Integralkurve von W mit Startpunkt an einem beliebigen vorgegebenen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und die Bilder verschiedener Integralkurven sind entweder identisch oder disjunkt.

Ist V ein glattes Vektorfeld auf M und $\gamma : J \rightarrow M$ eine glatte Kurve auf M , dann können wir γ auf einer Koordinatenumgebung $U \subseteq M$ in der Form

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$$

schreiben. Die Bedingung $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$ an γ eine Integralkurve zu sein, kann daher auf $U \subseteq M$ durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} (\gamma^1)'(t) &= V^1(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \\ &\vdots \\ (\gamma^n)'(t) &= V^n(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden, wobei die Komponentenfunktionen V^i von V auf U glatt sind. Wir erinnern daher als nächstes an den bekannten Hauptsatz über die Lösungen solcher Differentialgleichungssysteme, der garantiert, dass es zumindest für t in einem kleinen Intervall eine eindeutige Lösung gibt, die einer beliebigen Anfangsbedingung $(\gamma^1(t_0), \dots, \gamma^n(t_0)) = (x^1, \dots, x^n)$ genügt.

Satz 8.1 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Für $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x = (x^1, \dots, x^n) \in U$ betrachte das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} (\gamma^i)'(t) &= V^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), & i &= 1, \dots, n, \\ \gamma^i(t_0) &= x^i, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ gibt es ein offenes Intervall J_0 , das t_0 enthält, und eine offene Teilmenge $U_0 \subseteq U$, welche x_0 enthält, sodass es für jedes $x \in U_0$ eine glatte Kurve $\gamma : J_0 \rightarrow U$ gibt, die (8.1) löst.
- (ii) Je zwei differenzierbare Lösungen von (8.1) stimmen auf ihren gemeinsamen Definitionsbereichen überein.
- (iii) Es seien J_0 und U_0 wie in (i) und $\theta : J_0 \times U_0 \rightarrow U$ definiert durch $\theta(t, x) = \gamma(t)$, wobei $\gamma : J_0 \rightarrow U$ die eindeutige Lösung von (8.1) zur Anfangsbedingung $\gamma(t_0) = x$ bezeichnet. Dann ist θ glatt.

Wir werden in weiterer Folge eine Reihe von Konsequenzen von Satz 8.1 herleiten. Als erstes notieren wir eine direkte einfache Folgerung.

Proposition 8.2 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und V ein glattes Vektorfeld auf M . Dann gibt es zu jedem Punkt $p \in M$ ein $\varepsilon > 0$ und eine glatte Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, sodass γ eine Integralkurve von V mit Startpunkt p ist.*

Das nächste Lemma zeigt, welche Auswirkungen Reparametrisierungen einer Integralkurve durch Dilatationen bzw. Translationen haben. Aussage (ii) zeigt insbesondere, dass der Startpunkt einer Integralkurve auf einfache Weise verschoben werden kann.

Lemma 8.3 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, V ein glattes Vektorfeld auf M , $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : J \rightarrow M$ eine Integralkurve von V .*

- (i) *Bezeichnet \bar{J} für $a \in \mathbb{R}$ das Intervall $\bar{J} = \{t \in \mathbb{R} : at \in J\}$, dann ist die Kurve $\bar{\gamma} : \bar{J} \rightarrow M$, definiert durch $\bar{\gamma}(t) = \gamma(at)$, Integralkurve des Vektorfeldes aV .*
- (ii) *Bezeichnet \tilde{J} für $b \in \mathbb{R}$ das Intervall $\tilde{J} = \{t \in \mathbb{R} : t + b \in J\}$, dann ist die Kurve $\tilde{\gamma} : \tilde{J} \rightarrow M$, definiert durch $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t + b)$, auch Integralkurve des Vektorfeldes V .*

Beweis: Es sei f eine glatte Funktion in einer Umgebung eines Punktes $\bar{\gamma}(t_0)$. Dann gilt aufgrund der Kettenregel und dem Umstand, dass γ Integralkurve von V ist

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'(t_0)f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \bar{\gamma})(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(at) \\ &= a(f \circ \gamma)'(at_0) = a\gamma'(at_0)f = aV_{\bar{\gamma}(t_0)}f, \end{aligned}$$

womit (i) gezeigt ist. Der Beweis von (ii) ist ganz analog. ■

Schließlich wollen wir noch zeigen, dass Integralkurven mit F -Verwandtschaft verträglich sind.

Proposition 8.4 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann sind $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ genau dann F -verwandt, wenn für jede Integralkurve γ von X die Kurve $F \circ \gamma$ eine Integralkurve von Y ist.*

Beweis: Es seien zunächst X und Y F -verwandt und $\gamma : J \rightarrow M$ eine Integralkurve von X . Definieren wir $\sigma : J \rightarrow N$ durch $\sigma = F \circ \gamma$, dann gilt

$$\sigma'(t) = (F \circ \gamma)'(t) = dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = dF_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) = Y_{F(\gamma(t))} = Y_{\sigma(t)},$$

womit σ eine Integralkurve von Y ist.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass F Integralkurven von X auf Integralkurven von Y abbildet und es sei zu gegebenem $p \in M$ die Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine Integralkurve von X mit Startpunkt p . Da $F \circ \gamma$ eine Integralkurve von Y mit Startpunkt $F(p)$ ist, gilt

$$Y_{F(p)} = (F \circ \gamma)'(0) = dF_p(\gamma'(0)) = dF_p(X_p),$$

womit X und Y F -verwandt sind. ■

Wir wollen nun die Gesamtheit aller Integralkurven eines gegebenen Vektorfeldes betrachten. Dazu sei M wieder eine glatte Mannigfaltigkeit und $V \in \mathfrak{X}(M)$. Wir nehmen vorerst auch an, dass es zu jedem Punkt $p \in M$ eine eindeutige Integralkurve von V mit Startpunkt in p gibt, die für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist und bezeichnen diese mit $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$.

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ können wir nun eine Abbildung $\theta_t : M \rightarrow M$ definieren indem wir einen Punkt $p \in M$ auf den Punkt auf der Integralkurve $\theta^{(p)}$ zum Zeitpunkt t abbilden:

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Da nach Lemma 8.3 (ii) die Kurve $t \mapsto \theta^{(p)}(t + s)$ auch eine Integralkurve von V ist mit Startpunkt $q = \theta^{(p)}(s)$, folgt aus der Eindeutigkeit von Integralkurven, dass $\theta^{(q)}(t) = \theta^{(p)}(t + s)$. Übersetzen wir diesen Umstand in eine Aussage über die Abbildungen θ_t , so folgt

$$(\theta_t \circ \theta_s)(p) = \theta_{t+s}(p).$$

Da außerdem $\theta_0(p) = \theta^{(p)}(0) = p$, impliziert dies, dass die Abbildung $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ eine Gruppenaktion der additiven Gruppe \mathbb{R} auf M definiert. Dies motiviert nun die folgende

Definition. Ein *globaler Fluss* auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine stetige Abbildung $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, sodass für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und alle $p \in M$,

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p), \quad \theta(0, p) = p. \quad (8.2)$$

Ist $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ glatt, so sprechen wir von einem *glatten globalen Fluss*.

Durch einen (glatten) globalen Fluss θ werden die folgenden zwei Familien von Abbildungen induziert:

- Zu jedem $t \in \mathbb{R}$, sei $\theta_t : M \rightarrow M$ definiert durch

$$\theta_t(p) = \theta(t, p).$$

Die definierenden Eigenschaften (8.2) sind äquivalent zu

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}, \quad \theta_0 = \text{Id}_M.$$

Jede der Abbildungen $\theta_t : M \rightarrow M$ ist offenbar ein Homeomorphismus. Ist θ glatt, dann ist jedes θ_t ein Diffeomorphismus.

- Zu jedem $p \in M$, definieren wir die Kurve $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$ durch

$$\theta^{(p)}(t) = \theta(t, p).$$

Dann ist M disjunkte Vereinigung der Kurven $\theta^{(p)}$.

Wie das nächste Resultat zeigt, wird jeder glatte globale Fluss von den Integralkurven eines Vektorfeldes induziert.

Proposition 8.5 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein glatter globaler Fluss, dann definiert*

$$p \mapsto V_p := \theta^{(p)'}(0) \in T_p M$$

ein glattes Vektorfeld V auf M , genannt der infinitesimale Erzeuger von θ , und jede Kurve $\theta^{(p)}$ ist eine Integralkurve von V .

Beweis: Um zu zeigen, dass das grobe Vektorfeld V auch glatt ist, genügt es nach Lemma 6.3 nachzuweisen, dass Vf für jede glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ glatt ist. Dazu beachte zunächst, dass für jedes solche f und $p \in U$ gilt

$$Vf(p) = V_p f = \theta^{(p)'}(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(0,p)} f(\theta(t, p)).$$

Da $f(\theta(t, p))$ als Zusammensetzung glatter Funktionen glatt ist in (t, p) , sind auch die partiellen Ableitungen von f in Bezug auf t glatt. Damit hängt $Vf(p)$ glatt von p ab, womit V glatt ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $\theta^{(p)}$ eine Integralkurve von V ist, also dass $\theta^{(p)'}(t) = V_{\theta^{(p)}(t)}$ für alle $p \in M$ und $t \in \mathbb{R}$. Dazu sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $q = \theta^{(p)}(t_0) = \theta_{t_0}(p)$. Dann müssen wir zeigen, dass $\theta^{(p)'}(t_0) = V_q$. Es gilt zunächst für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta^{(q)}(t) = \theta_t(q) = \theta_t(\theta_{t_0}(p)) = \theta_{t+t_0}(p) = \theta^{(p)}(t + t_0),$$

womit für jede glatte Funktion f definiert in einer Umgebung von q gilt

$$V_q f = \theta^{(q)'}(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^{(q)}(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t + t_0)) = \theta^{(p)'}(t_0)f.$$

■

Beispiele.

(a) Der durch $V = \partial/\partial x$ in \mathbb{R}^2 erzeugte Fluss $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\tau_t(x, y) = (x + t, y).$$

Damit verschiebt für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung τ_t die Ebene um $|t|$ nach rechts bei $t > 0$ und nach links bei $t < 0$.

(b) Der durch $W = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$ erzeugte Fluss $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\theta_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

Damit rotiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung θ_t die Ebene um den Ursprung um den Winkel t .

Da jeder glatte globale Fluss ein Vektorfeld induziert, dessen Integralkurven genau die durch den Fluss definierten Kurven sind, ist es naheliegend zu Fragen, ob umgekehrt jedes Vektorfeld infinitesimaler Erzeuger eines glatten globalen Flusses ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist das im Allgemeinen nicht der Fall, da es Vektorfelder gibt deren Integralkurven nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

Beispiel.

Es sei $M = \mathbb{R}^2$ und $W = x^2\partial/\partial x$. Es ist leicht nachzurechnen, dass die eindeutige Integralkurve von W mit Startpunkt $(1, 0)$ gegeben ist durch

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0 \right).$$

Diese Kurve kann offenbar nicht über $t = 1$ stetig fortgesetzt werden.

Definition. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, dann nennen wir eine offene Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ einen *Flussbereich* für M , wenn für jedes $p \in M$ die Menge $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$ ein offenes Intervall ist, welches 0 enthält.

Ein (lokaler) *Fluss* auf M ist eine stetige Abbildung $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$, wobei \mathcal{D} ein Flussbereich ist, die für alle $p \in M$,

$$\theta(0, p) = p \tag{8.3}$$

erfüllt und für alle $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ und $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$, sodass $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$,

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p). \tag{8.4}$$

Ist θ ein Fluss auf M so definieren wir (wie im Falle eines globalen Flusses)

$$\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t) = \theta(t, p), \quad (t, p) \in \mathcal{D}.$$

Weiters sei für jedes $t \in \mathbb{R}$,

$$M_t = \{p \in M : (t, p) \in \mathcal{D}\},$$

sodass

$$p \in M_t \Leftrightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} \Leftrightarrow (t, p) \in \mathcal{D}.$$

Proposition 8.6 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ ein glatter Fluss, dann definiert*

$$p \mapsto V_p := \theta^{(p)'}(0)$$

ein glattes Vektorfeld V auf M , genannt der infinitesimale Erzeuger von θ , und jede Kurve $\theta^{(p)}$ ist eine Integralkurve von V .

Beweis: Übungsbeispiel ■

Definition. Man nennt eine Integralkurve eines Vektorfeldes *maximal*, wenn sie nicht zu einer Integralkurve auf einem größeren offenen Intervall fortgesetzt werden kann. Ein Fluss heißt *maximal*, wenn er keine Fortsetzung auf einen größeren Flußbereich erlaubt.

Wir sind nun in der Lage den Hauptsatz über Flüsse zu beweisen.

Satz 8.7 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten maximalen glatten Fluss $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$, dessen infinitesimaler Erzeuger V ist. Dieser Fluss hat folgende Eigenschaften:*

- (i) *Für jedes $p \in M$, ist die Kurve $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ die eindeutige maximale Integralkurve von V mit Startpunkt p .*
- (ii) *Ist $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, dann ist $\mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$ das Intervall $\mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$.*
- (iii) *Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge M_t offen in M und $\theta_t : M_t \rightarrow M_{-t}$ ist ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung θ_{-t} .*

Der Fluss θ heißt der von V erzeugte Fluss.

Beweis: Nach Proposition 8.2 gibt es zu jedem $p \in M$ eine Integralkurve von V mit Startpunkt p . Angenommen $\gamma, \bar{\gamma} : J \rightarrow M$ sind zwei Integralkurven von V definiert auf demselben Intervall J und so, dass $\gamma(t_0) = \bar{\gamma}(t_0)$ für ein $t_0 \in J$. Es sei weiters

$$\mathcal{S} = \{t \in J : \gamma(t) = \bar{\gamma}(t)\}.$$

Da $t_0 \in \mathcal{S}$ ist \mathcal{S} nicht leer. Die Menge \mathcal{S} ist außerdem abgeschlossen in J aufgrund der Stetigkeit von γ und $\bar{\gamma}$. Es sei nun $t_1 \in \mathcal{S}$ beliebig. Dann gibt es eine glatte Koordinatenumgebung um den Punkt $p = \gamma(t_1)$, sodass γ und $\bar{\gamma}$ beide Lösungen desselben Differentialgleichungssystems mit Anfangsbedingung $\gamma(t_1) = \bar{\gamma}(t_1) = p$ sind. Nach Satz 8.1 ist daher $\gamma \equiv \bar{\gamma}$ auf einem ganzen Intervall, das t_1 enthält, womit \mathcal{S} auch offen ist in J . Da J zusammenhängend ist, folgt $\mathcal{S} = J$, womit $\gamma = \bar{\gamma}$ auf ganz J . Damit stimmen je zwei Integralkurven auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.

Für jedes $p \in M$ sei $\mathcal{D}^{(p)}$ die Vereinigung aller offenen Intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$, die 0 enthalten und auf denen eine Integralkurve mit Startpunkt p definiert ist. Weiters definieren wir $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ durch $\theta^{(p)}(t) = \gamma(t)$, wobei γ eine beliebige Integralkurve mit Startpunkt p ist, die auf einem offenen Intervall definiert ist, das 0 und t enthält. Da alle solchen Integralkurven an t übereinstimmen, ist $\theta^{(p)}$ wohldefiniert und offenbar die eindeutige maximale Integralkurve von V mit Startpunkt p .

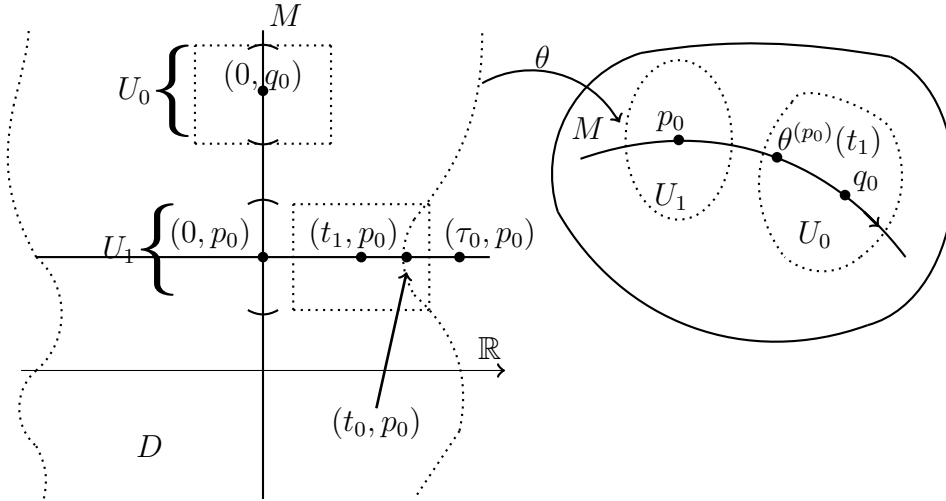
Es sei nun $\mathcal{D} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$. Weiters definieren wir $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ durch

$$\theta(t, p) = \theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Nach Definition erfüllt θ dann (i). Um zu zeigen, dass θ ein Fluss ist, seien $p \in M$ und $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ fest und $q = \theta(s, p) = \theta^{(p)}(s)$. Die Kurve $\gamma : \mathcal{D}^{(p)} - s \rightarrow M$, definiert durch $\gamma(t) = \theta^{(p)}(t + s)$ hat Startpunkt q und ist nach Lemma 8.3 eine Integralkurve von V . Daher stimmt γ mit $\theta^{(q)}$ auf deren gemeinsamen Definitionsbereich überein, was äquivalent zu (8.4) ist. Die Eigenschaft (8.3) folgt direkt aus der Definition von θ . Aufgrund der Maximalität von $\theta^{(q)}$ kann der Definitionsbereich von γ nicht größer als $\mathcal{D}^{(q)}$ sein, womit $\mathcal{D}^{(p)} - s \subseteq \mathcal{D}^{(q)}$. Da $0 \in \mathcal{D}^{(p)}$, folgt daher $-s \in \mathcal{D}^{(q)}$ und (8.4) impliziert $\theta^{(p)}(-s) = p$. Anwendung derselben Argumentation auf $(-s, q)$ anstatt auf (s, p) zeigt, dass $\mathcal{D}^{(q)} + s \subseteq \mathcal{D}^{(p)}$, oder anders ausgedrückt, $\mathcal{D}^{(q)} \subseteq \mathcal{D}^{(p)} - s$, womit (ii) gezeigt ist.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass \mathcal{D} offen ist in $\mathbb{R} \times M$ (und damit ein Flussbereich) und dass $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ glatt ist. Dazu sei $W \subseteq \mathcal{D}$ die Menge aller $(t, p) \in \mathcal{D}$, sodass θ definiert und glatt ist auf einer Produktumgebung von (t, p) der Form $J \times U \subseteq \mathcal{D}$, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, das 0 und t enthält, und $U \subseteq M$ eine Umgebung von p . Dann ist W offen in $\mathbb{R} \times M$ und die Einschränkung von θ auf W ist glatt. Es genügt also zu zeigen, dass $W = \mathcal{D}$. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es einen Punkt $(\tau_0, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$. O.B.d.A. können wir $\tau_0 > 0$ annehmen.

Es sei $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R} : (t, p_0) \notin W\}$. Nach Satz 8.1 angewandt in einer Koordinatenumgebung von p_0 ist θ in einer Produktumgebung von $(0, p_0)$ definiert und glatt, womit $t_0 > 0$. Da $t_0 \leq \tau_0$ und $\mathcal{D}^{(p_0)}$ ein offenes Intervall ist, das 0 und τ_0 enthält, folgt $t_0 \in \mathcal{D}^{(p_0)}$. Es sei nun $q_0 = \theta^{(p_0)}(t_0)$. Dann gibt es nach Satz 8.1 ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U_0 von q_0 , sodass $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \subseteq W$.



Wähle nun ein $t_1 < t_0$, sodass $t_1 + \varepsilon > t_0$ und $\theta^{(p_0)}(t_1) \in U_0$. Da $t_1 < t_0$ ist $(t_1, p_0) \in W$, womit $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times U_1 \subseteq W$ für geeignetes δ und U_1 . Nach Definition von W ist daher θ definiert und glatt auf $[0, t_1 + \delta) \times U_1$. Da $\theta(t_1, p_0) \in U_0$, können wir U_1 so klein wählen, dass θ die Menge $\{t_1\} \times U_1$ in U_0 abbildet. Es sei nun $\bar{\theta} : [0, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \rightarrow$ definiert durch

$$\bar{\theta}(t, p) = \begin{cases} \theta_t(p), & p \in U_1, 0 \leq t < t_1, \\ (\theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1})(p), & p \in U_1, t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Da θ ein Fluss ist, stimmen diese Definitionen auf gemeinsamen Bereichen überein. Aufgrund unserer Wahl von U_1 , t_1 und ε ist $\bar{\theta}$ glatt. Nach Lemma 8.3 ist jede der Abbildungen $t \mapsto \bar{\theta}(t, p)$ eine Integralkurve von V , womit aber $\bar{\theta}$ eine glatte Fortsetzung von θ auf eine Umgebung von (t_0, p_0) ist, im Widerspruch zu unserer Wahl von t_0 . Es folgt $W = \mathcal{D}$.

Es bleibt noch (iii) zu zeigen. Die Menge M_t ist offen, da die Menge \mathcal{D} offen ist. Darüber hinaus folgt aus (ii) die Implikationskette

$$p \in M_t \Rightarrow t \in \mathcal{D}^{(p)} \Rightarrow \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} = \mathcal{D}^{(p)} - t \Rightarrow -t \in \mathcal{D}^{(\theta_t(p))} \Rightarrow \theta_t(p) \in M_{-t},$$

welche zeigt, dass θ_t die Menge M_t auf M_{-t} abbildet. Da θ ein Fluss ist, folgt weiter, dass $\theta_{-t} \circ \theta_t$ die Identität auf M_t ist. Vertauschen der Rollen von t und $-t$ zeigt, dass $\theta_t \circ \theta_{-t}$ die Identität auf M_{-t} ist, womit auch (iii) bewiesen ist. ■

Das folgende Resultat zeigt, wie sich die Verträglichkeit von Integralkurven mit F -Verwandtschaft auf Flüsse überträgt.

Proposition 8.8 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Bezeichne θ den von X erzeugten Fluss und η den von Y erzeugten Fluss. Sind X und Y F -verwandt, dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $p \in M_t$,*

$$F(M_t) \subseteq N_t \quad \text{und} \quad (\eta_t \circ F)(p) = (F \circ \theta_t)(p).$$

Beweis: Nach Proposition 8.4 ist für jedes $p \in M$ die Kurve $F \circ \theta^{(p)}$ eine Integralkurve von Y mit Startpunkt $F \circ \theta^{(p)}(0) = F(p)$. Aufgrund der Eindeutigkeit von Integralkurven muss daher die maximale Integralkurve $\eta^{(F(p))}$ zumindest auf dem Intervall $\mathcal{D}^{(p)}$ definiert sein und dort muss $F \circ \theta^{(p)} = \eta^{(F(p))}$ gelten. Das bedeutet aber, dass

$$p \in M_t \quad \Rightarrow \quad t \in \mathcal{D}^{(p)} \quad \Rightarrow \quad t \in \mathcal{D}^{(F(p))} \quad \Rightarrow \quad F(p) \in N_t,$$

was äquivalent ist zu $F(M_t) \subseteq N_t$, und, dass für alle $t \in \mathcal{D}^{(p)}$,

$$F(\theta^{(p)}(t)) = \eta^{(F(p))}(t),$$

was wiederum äquivalent ist zu $(\eta_t \circ F)(p) = (F \circ \theta_t)(p)$ für alle $p \in M_t$. ■

Korollar 8.9 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und θ der von X erzeugte Fluss, dann ist der von F_*X erzeugte Fluss gegeben durch $\eta_t = F \circ \theta_t \circ F^{-1}$ und hat den Flussbereich $N_t = F(M_t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.*

Vektorfelder, die einen globalen Fluss erzeugen, sind von besonderer Bedeutung und bekommen daher einen eigenen Namen.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *vollständig*, wenn es einen globalen Fluss erzeugt bzw., äquivalent dazu, wenn jede seiner maximalen Integralkurven auf ganz \mathbb{R} definiert ist.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass jedes Vektorfeld mit kompaktem Träger vollständig ist. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Hilfsresultat.

Lemma 8.10 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und V ein glattes Vektorfeld auf M mit davon erzeugtem Fluss θ . Gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für jedes $p \in M$ der Definitionsbereich von $\theta^{(p)}$ das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ enthält, dann ist V vollständig.*

Beweis: Angenommen es gibt ein $p \in M$, sodass der Definitionsbereich $\mathcal{D}^{(p)}$ von $\theta^{(p)}$ nach oben beschränkt ist (analoge Argumentation funktioniert für nach unten beschränktes $\mathcal{D}^{(p)}$). Es seien $b = \sup \mathcal{D}^{(p)}$, $t_0 > 0$ so, dass $b - \varepsilon < t_0 < b$ und $q = \theta^{(p)}(t_0)$. Nach Voraussetzung ist $\theta^{(q)}(t)$ zumindest auf $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert. Wir definieren nun eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \theta^{(p)}(t), & -\varepsilon < t < b, \\ \theta^{(q)}(t - t_0), & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Beachte, dass die beiden Definitionen auf dem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen, da

$$\theta^{(q)}(t - t_0) = \theta_{t-t_0}(q) = (\theta_{t-t_0} \circ \theta_{t_0})(p) = \theta_t(p) = \theta^{(p)}(t).$$

Nach Lemma 8.3 ist γ eine Integralkurve mit Startpunkt p , was, wegen $t_0 + \varepsilon > b$, einen Widerspruch ergibt. ■

Satz 8.11 *Jedes glatte Vektorfeld mit kompaktem Träger auf einer glatten Mannigfaltigkeit ist vollständig.*

Beweis: Es sei V ein glattes Vektorfeld mit kompaktem Träger auf der glatten Mannigfaltigkeit M und $K = \text{supp } V$. Für jedes $p \in K$ gibt es eine Umgebung U_p von p und ein $\varepsilon_p > 0$, sodass der von V erzeugte Fluss zumindest auf $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p$ definiert ist. Aufgrund der Kompaktheit von K überdecken bereits endlich viele solcher Mengen U_{p_1}, \dots, U_{p_k} die Menge K . Setzen wir $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}\}$, so folgt, dass jede maximale Integralkurve mit Startpunkt in K zumindest auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Da $V \equiv 0$ außerhalb von K , ist jede Integralkurve von V mit Startpunkt in $M \setminus K$ konstant und kann daher auf ganz \mathbb{R} definiert werden. Damit ist die Voraussetzung von Lemma 8.10 erfüllt und es folgt, dass V vollständig ist. ■

Korollar 8.12 *Ist M eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit, dann ist jedes glatte Vektorfeld auf M vollständig.*

Flüsse sind *das* technische Hilfsmittel für viele geometrische Konstruktionen auf Mannigfaltigkeiten. Die meisten dieser Konstruktionen basieren auf unserem nächsten Resultat, welches beschreibt, wie sich Flüsse in der Umgebung gewisser Untermannigfaltigkeiten verhalten.

Satz 8.13 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine eingebettete k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Weiters seien $V \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld, welches nirgends tangential zu S ist, $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ der von V erzeugte Fluss und*

$$\mathcal{O} = (\mathbb{R} \times S) \cap \mathcal{D} \quad \text{und} \quad \Phi = \theta|_{\mathcal{O}}.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow M$ ist eine Immersion.
- (ii) $\partial/\partial t \in \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ ist Φ -verwandt mit V .
- (iii) Es gibt eine glatte positive Funktion $\delta : S \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die Einschränkung von Φ auf den Flussbereich

$$\mathcal{O}_\delta = \{(t, p) \in \mathcal{O} : |t| < \delta(p)\}$$

injektiv ist. Insbesondere, ist $\Phi(\mathcal{O}_\delta)$ eine immensierte Untermannigfaltigkeit von M , die S enthält und V ist tangential zu $\Phi(\mathcal{O}_\delta)$.

- (iv) Hat S Kodimension 1, dann ist $\Phi|_{\mathcal{O}_\delta}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Untermannigfaltigkeit von M .

Beweis: Wir beginnen mit dem Beweis von (ii). Dazu sei $p \in S$ fest gewählt und $\sigma : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow \mathbb{R} \times S$ die Kurve $\sigma(t) = (t, p)$. Dann ist $(\Phi \circ \sigma)(t) = \theta(t, p)$ eine Integralkurve von V , womit für jedes $t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ gilt

$$d\Phi_{(t_0, p)} \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(t_0, p)} \right) = (\Phi \circ \sigma)'(t_0) = V_{\Phi(t_0, p)}.$$

Als nächstes zeigen wir (i). Die Einschränkung von Φ auf $\{0\} \times S$ stimmt mit der Hintereinanderausführung des Diffeomorphismus $\{0\} \times S \rightarrow S$ und der Einbettung $S \hookrightarrow M$ überein und ist daher einer Einbettung. Daher stimmt die Einschränkung von $d\Phi_{(0,p)}$ auf $T_p S$ (aufgefasst als Unterraum von $T_{(0,p)}\mathcal{O} \cong T_0\mathbb{R} \oplus T_p S$) mit der Inklusionsabbildung $T_p S \hookrightarrow T_p M$ überein. Ist (E_1, \dots, E_k) eine Basis von $T_p S$ so folgt, dass $d\Phi_{(0,p)}$ die Basis $(\partial/\partial t|_{(0,p)}, E_1, \dots, E_k)$ für $T_{(0,p)}\mathcal{O}$ auf (V_p, E_1, \dots, E_k) abbildet. Da V_p nicht tangential zu S ist, ist dieses $(k+1)$ -Tupel linear unabhängig und daher $d\Phi_{(0,p)}$ injektiv.

Um zu zeigen, dass $d\Phi$ an anderen Punkten auch injektiv ist, sei für $(t_0, p_0) \in \mathcal{O}$ die Translation $\tau_{t_0} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \times S$ definiert durch $\tau_{t_0}(t, p) = (t + t_0, p)$. Da θ ein Fluss ist, ist

$$\tau_{t_0} \circ \Phi = \Phi \circ \theta_{t_0}$$

als Abbildung von \mathcal{O} nach M . Da τ_{t_0} und θ_{t_0} beide lokale Diffeomorphismen sind, erhalten wir durch Differentiation, dass

$$d(\tau_{t_0})_{(0,p_0)} \circ d\Phi_{(t_0,p_0)} = d\Phi_{(0,p_0)} \circ d(\theta_{t_0})_{p_0}$$

als Abbildungen von $T_{(0,p_0)}\mathcal{O}$ nach $T_{\Phi(t_0,p_0)}M$. Da aber $d(\tau_{t_0})_{(0,p_0)}$ und $d(\theta_{t_0})_{p_0}$ beide Isomorphismen sind, müssen $d\Phi_{(t_0,p_0)}$ und $d\Phi_{(0,p_0)}$ denselben Rang haben, womit (i) gezeigt ist.

Nun kommen wir zum Beweis von (iii). Zu gegebenem $p_0 \in S$ seien $(U, (x^i))$ Schnittkoordinaten für S in M zentriert in p_0 , sodass $U \cap S$ gerade die Menge $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ ist (hier ist $n = \dim M$). Da V nicht tangential zu S ist, ist zumindest eine der letzten $n - k$ Komponenten von V_{p_0} , etwa $V^j(p_0)$, von Null verschieden. Indem wir U falls notwendig verkleinern, können wir annehmen, dass für alle $p \in U$,

$$|V^j(p)| \geq c \tag{8.5}$$

für ein geeignetes $c > 0$. Da weiters $\Phi^{-1}(U)$ offen ist in $\mathbb{R} \times S$, können wir eine Zahl $\varepsilon_{p_0} > 0$ und eine Umgebung W_{p_0} von p_0 in S wählen, sodass $(-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0}) \times W_{p_0} \subseteq \mathcal{O}$ und $\Phi((-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0}) \times W_{p_0}) \subseteq U$. Schreiben wir die Komponentenfunktionen von Φ in diese Koordinaten als

$$\Phi(t, p) = (\Phi^1(t, p), \dots, \Phi^n(t, p)).$$

dann erfüllt, da Φ die Einschränkung eines Flusses ist, die Funktion Φ^j die Beziehung

$$\frac{\partial \Phi^j}{\partial t}(t, p) = V^j(\Phi(t, p)), \quad V^j(0, p) = 0.$$

Aus (8.5) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daher $|\Phi^j(t, p)| \geq c|t|$ und damit ist für $(t, p) \in (-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0}) \times W_{p_0}$ genau dann $\Phi(t, p) \in S$, wenn $t = 0$ ist.

Es sei $\{\psi_p : p \in S\}$ eine glatte Zerlegung der Eins, die der offenen Überdeckung $\{W_p : p \in S\}$ untergeordnet ist. Weiters definiere $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(q) = \sum_{p \in S} \varepsilon_p \psi_p(q).$$

Dann ist f glatt und positiv. Für jedes $q \in S$ gibt es nur endlich viele $p \in S$, sodass $\psi_p(q) > 0$. Ist p_0 einer dieser Punkte, sodass ε_{p_0} maximal unter allen ε_p ist, dann folgt

$$f(q) \leq \varepsilon_{p_0} \sum_{p \in S} \psi_p(q) = \varepsilon_{p_0}.$$

Ist daher $(t, q) \in \mathcal{O}$ so, dass $|t| < f(q)$, dann ist $(t, q) \in (-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0}) \times W_{p_0}$ und damit genau dann $\Phi(t, q) \in S$, wenn $t = 0$ ist.

Es sei nun $\delta = \frac{1}{2}f$. Angenommen $\Phi|_{\mathcal{O}_\delta}$ ist nicht injektiv, also $\Phi(t, q) = \Phi(t', q')$ für $(t, q), (t', q') \in \mathcal{O}_\delta$. O.B.d.A. können wir $f(q') \leq f(q)$ annehmen. Unsere Annahme bedeutet, dass $\theta_t(q) = \theta_{t'}(q')$, womit $\theta_{t-t'}(q) = q' \in S$. Da (t, q) und (t', q') beide in \mathcal{O}_δ liegen, gilt außerdem

$$|t - t'| \leq |t| + |t'| < \frac{1}{2}f(q) + \frac{1}{2}f(q') \leq f(q),$$

woraus $t = t'$ und $q = q'$ folgt.

Es bleibt nun nur noch (iv) zu zeigen. Hat S Kodimension 1, dann ist $\Phi|_{\mathcal{O}_\delta}$ eine injektive glatte Immersion zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension also ein lokaler Diffeomorphismus nach Korollar 4.7 (b). Als lokaler Diffeomorphismus ist $\Phi|_{\mathcal{O}_\delta}$ aber eine offene Abbildung und daher eine Einbettung. Das Bild dieser Einbettung ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0 und daher eine offene Untermannigfaltigkeit (Übungsbeispiel). ■

Bevor wir uns mit Lie-Ableitungen von Vektorfeldern befassen können, benötigen wir noch die folgende Begriffsbildung.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und V ein glattes Vektorfeld auf M . Ein Punkt $p \in M$ heißt ein *singulärer Punkt* von V , wenn $V_p = 0$ ist, und sonst ein *regulärer Punkt*.

Das Verhalten von Integralkurven, die an regulären Punkten starten, ist grundlegend verschieden von solchen die an singulären Punkten starten.

Proposition 8.14 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und V ein glattes Vektorfeld auf M mit davon erzeugtem Fluss $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$. Ist $p \in M$ ein singulärer Punkt von V , dann ist $\mathcal{D}^{(p)} = \mathbb{R}$ und $\theta^{(p)}$ die konstante Kurve $\theta^{(p)}(t) \equiv p$. Ist $p \in M$ ein regulärer Punkt von V , dann ist $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ eine glatte Immersion.*

Beweis: Ist $V_p = 0$, dann ist die konstante Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, gegeben durch $\gamma(t) \equiv p$, offenbar die eindeutige maximale Integralkurve von V mit Startpunkt p und damit gleich $\theta^{(p)}$.

Angenommen für ein $p \in M$ ist $\theta^{(p)}$ keine Immersion. Wir wollen zeigen, dass dann p ein singulärer Punkt von V ist. Dazu beachte zunächst, dass die Voraussetzung, dass $\theta^{(p)}$ keine Immersion ist bedeutet, dass $\theta^{(p)'}(s) = 0$ für ein $s \in \mathcal{D}^{(p)}$. Es sei $q = \theta^{(p)}(s)$. Wie im ersten Absatz folgt dann $\mathcal{D}^{(q)} = \mathbb{R}$ und $\theta^{(q)}(t) = q$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Satz 8.7 (ii) ist dann aber auch $\mathcal{D}^{(p)} = \mathbb{R}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\theta^{(p)}(t) = \theta_t(p) = \theta_{t-s}(\theta_s(p)) = \theta_{t-s}(q) = q.$$

Setzen wir $t = 0$, folgt $p = q$ und damit $\theta^{(p)}(t) \equiv p$ und $V_p = \theta^{(p)'}(0) = 0$. ■

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ ein Fluss. Ein Punkt $p \in M$ heißt *Gleichgewichtspunkt* von θ , wenn $\theta(t, p) = p$ für alle $t \in \mathcal{D}^{(p)}$.

Nach Proposition 8.14 sind die Gleichgewichtspunkte eines glatten Flusses genau die singulären Punkte seines infinitesimalen Erzeugers.

Der folgende Satz beschreibt vollständig, bis auf Diffeomorphie, wie ein Vektorfeld in der Umgebung eines regulären Punktes aussieht.

Satz 8.15 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, V ein glattes Vektorfeld auf M und $p \in M$ ein regulärer Punkt von V . Dann gibt es glatte Koordinaten (s^i) auf einer Umgebung von p für die V die Koordinatendarstellung $\partial/\partial s^1$ hat.*

Beweis: Wir wählen glatte Koordinaten $(U, (x^i))$ zentriert in p und definieren die Hyperfläche $S \subseteq U$ durch $x^j = 0$, wobei j so gewählt wird, dass $V^j(p) \neq 0$. Dies ist möglich, da p ein regulärer Punkt ist.

Da $V_p \notin T_p S$, können wir S falls notwendig so verkleinern, dass V nirgends tangential ist zu S . Nach Satz 8.13 gibt es dann einen Flussbereich $\mathcal{O}_\delta \subseteq \mathbb{R} \times S$, sodass die Einschränkung des von V erzeugten Flusses ein Diffeomorphismus Φ von \mathcal{O}_δ auf eine offene Menge $W \subseteq M$ ist, die S enthält. Für eine geeignete Produktumgebung $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W_0$ von $(0, p)$ in \mathcal{O}_δ wählen wir nun eine glatte lokale Parametrisierung $X : \Omega \rightarrow S$, deren Bild in W_0 enthalten ist, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen ist mit Koordinaten (s^2, \dots, s^n) . Dann ist die Abbildung $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega \rightarrow M$ gegeben durch

$$\Psi(t, s^2, \dots, s^n) = \Phi(t, X(s^1, \dots, s^n))$$

ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung von p in M . Da der Pushforward von $\partial/\partial t$ unter dem Diffeomorphismus $(t, s^1, \dots, s^n) \mapsto (t, X(s^2, \dots, s^n))$ wieder $\partial/\partial t$ ist und $\Phi_*(\partial/\partial t) = V$, folgt $\Psi_*(\partial/\partial t) = V$. Damit ist Ψ^{-1} eine glatte Koordinatenabbildung bezüglich der V die Koordinatendarstellung $\partial/\partial t$ hat. Wenn wir nun t zu s^1 umbenennen, ist die Behauptung gezeigt. ■

Wir haben Tangentialvektoren v in einem Punkt p einer glatten Mannigfaltigkeit M als Operatoren eingeführt, die einer glatten Funktion f eine Zahl vf zuordnen, die wir als Richtungsableitung der Funktion f im Punkt p interpretiert haben. Wir wollen uns jetzt mit der Frage befassen, wie man „Richtungsableitungen“ von Vektorfeldern definieren kann. Im Euklidischen Raum ist das kein Problem, man definiert die Richtungsableitung eines glatten Vektorfeldes W in Richtung $v \in T_p \mathbb{R}^n$ einfach als den Vektor

$$D_v W(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} W_{p+tv} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_{p+tv} - W_p}{t}.$$

Eine kurze Rechnung zeigt dann, dass $D_v W(p)$ einfach durch Anwendung von D_v auf jede Komponente von W berechnet werden kann:

$$D_v W(p) = \sum_{i=1}^n D_v W^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p.$$

Leider hängt diese Definition sehr von der Vektorraumstruktur des \mathbb{R}^n ab, welche es erlaubt W_{p+tv} und W_p beide als Elemente von \mathbb{R}^n zu interpretieren. Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit liegen diese beiden Vektoren allerdings nicht in demselben Vektorraum. In der Tat gibt es keine koordinatenunabhängige Möglichkeit Richtungsableitungen eines Vektorfeldes in Richtung eines Vektors auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit einzuführen. Ersetzt man den Vektor $v \in T_pM$ allerdings durch ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(M)$, kann der von V erzeugte Fluss verwendet werden, um Werte von W auf den Punkt p zurückzuziehen und dort zu differenzieren.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, V ein glattes Vektorfeld auf M und θ der von V erzeugte Fluss. Für jedes glatte Vektorfeld W auf M , definieren wir ein grobes Vektorfeld $\mathcal{L}_V W$, genannt die *Lie Ableitung* von W in Bezug auf V , durch

$$(\mathcal{L}_V W)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) - W_p}{t} \quad (8.6)$$

Das folgende Hilfsresultat zeigt, dass die Ableitung in (8.6) tatsächlich stets existiert und $\mathcal{L}_V W$ auch glatt ist.

Lemma 8.16 *Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder auf M . Dann existiert $(\mathcal{L}_V W)_p$ für jedes $p \in M$ und $\mathcal{L}_V W$ ist ein glattes Vektorfeld.*

Beweis: Es sei θ der von V erzeugte Fluss. Für beliebiges $p \in M$ sei $(U, (x^i))$ eine glatte Karte, die p enthält. Weiters wähle ein offenes Intervall J_0 , welches 0 enthält, und eine offene Teilmenge $U_0 \subseteq U$, die p enthält, sodass θ die Menge $J_0 \times U_0$ in U abbildet. Für $(t, x) \in J_0 \times U_0$, schreiben wir die Komponentenfunktionen von θ in der Form $(\theta^1(t, x), \dots, \theta^n(t, x))$. Dann ist für jedes $(t, x) \in J_0 \times U_0$ die Matrix von $d(\theta_{-t})_{\theta_t(x)} : T_{\theta_t(x)}M \rightarrow T_xM$ gegeben durch

$$\left(\frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t, x)) \right).$$

Damit ist

$$d(\theta_{-t})_{\theta_t(x)}(W_{\theta_t(x)}) = \sum_{i,j} \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t, x)) W^j(\theta(t, x)) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x. \quad (8.7)$$

Da die Funktionen θ^i und W^j glatt sind, hängt der Koeffizient von $\partial/\partial x^i|_x$ glatt von (t, x) ab. Es folgt, dass $(\mathcal{L}_V W)_x$, welches man durch Ableitung von (8.7) an $t = 0$ erhält, existiert und für jedes $x \in U_0$ glatt von x abhängt. ■

Definition (8.6) von $\mathcal{L}_V W$ ist für praktische Berechnungen nicht brauchbar. Wie der folgende Satz gibt es aber eine viel einfachere Methode zur Bestimmung von $\mathcal{L}_V W$.

Satz 8.17 *Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder auf M . Dann gilt*

$$\mathcal{L}_V W = [V, W].$$

Beweis: Es sei $\mathcal{R}(V) \subseteq M$ die Menge der regulären Punkte von V . Beachte, dass $\mathcal{R}(V)$ offen ist in M aufgrund der Stetigkeit von V und, dass der Abschluss von $\mathcal{R}(V)$ gerade der Träger von V ist.

Wir wollen zeigen, dass $(\mathcal{L}_V W)_p = [V, W]_p$ für alle $p \in M$. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

- $p \in \mathcal{R}(V)$

Nach Satz 8.15, gibt es Koordinaten (u^i) in einer Umgebung von p , sodass V die Koordinatendarstellung $V = \partial/\partial u^1$ hat. In diesen Koordinaten ist der von V erzeugte Fluss θ gegeben durch

$$\theta_t(u) = (u^1 + t, u^2, \dots, u^n).$$

Für jedes feste t ist die Matrix von $d(\theta_{-t})_{\theta_t(u)}$ in diesen Koordinaten also die Identität an jedem Punkt. Damit ist für jedes $u \in U$,

$$\begin{aligned} d(\theta_{-t})_{\theta_t(u)}(W_{\theta_t(u)}) &= d(\theta_{-t})_{\theta_t(u)} \left(\sum_j W^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n) \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\theta_t(u)} \right) \\ &= \sum_j W^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n) \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_u. \end{aligned}$$

Nach Definition (8.6) gilt daher

$$(\mathcal{L}_V W)_u = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sum_j W^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n) \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_u = \sum_j \frac{\partial W^j}{\partial u^1}(u^1, \dots, u^n) \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_u.$$

Aufgrund von Formel (6.3) für die Lie Klammer in Koordinaten stimmt dieser Ausdruck mit $[V, W]_u$ überein.

- $p \in \text{supp } V$

Da $\text{supp } V$ der Abschluss von $\mathcal{R}(V)$ ist, folgt $(\mathcal{L}_V W)_p = [V, W]_p$ aufgrund der Stetigkeit der Vektorfelder auf beiden Seiten aus dem ersten Fall.

- $p \in M \setminus \text{supp } V$

In diesem Fall ist $V \equiv 0$ in einer Umgebung von p . Daraus folgt einerseits, dass θ_t die Identität in einer Umgebung von p für alle t ist, sodass $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(W_{\theta_t(p)}) = W_p$, womit $(\mathcal{L}_V W)_p = 0$. Andererseits ist auch $[V, W]_p = 0$ nach (6.3). ■

Satz 8.17 ermöglicht uns nun eine geometrische Interpretation der Lie Klammer zweier Vektorfelder zu geben: Es handelt sich dabei um die Richtungsableitung des zweiten Vektorfeldes entlang des vom ersten Vektorfeld erzeugten Flusses. Aus Satz 8.17 folgen schließlich auch eine Reihe nicht-trivialer Eigenschaften der Lie Ableitung aus den entsprechenden Eigenschaften der Lie Klammer.

Korollar 8.18 *Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder auf M . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\mathcal{L}_V W = -\mathcal{L}_W V$.

(ii) $\mathcal{L}_V[W, X] = [\mathcal{L}_V W, X] + [W, \mathcal{L}_V X]$.

(iii) $\mathcal{L}_{[V, W]} X = \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W X - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V X$.

(iv) Für $g \in C^\infty(M)$ gilt $\mathcal{L}_V(gW) = (Vg)W + g\mathcal{L}_V W$.

(v) Ist $F : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus, dann ist $F_*(\mathcal{L}_V X) = \mathcal{L}_{F_* V} F_* X$.

9 Tensoren und Differentialformen

Wie wir bereits in früheren Kapiteln gesehen haben, stellt die lineare Algebra viele Begriffe und Hilfsmittel bereit, die in der Analysis auf Mannigfaltigkeiten unverzichtbar sind. Im folgenden Abschnitt gehen wir einen Schritt weiter und betrachten multilineare Objekte, genauer werden wir uns mit Tensoren und Tensorfeldern, und speziell, mit alternierenden Tensorfeldern, den Differentialformen, beschäftigen.

Definition. Seien V_1, \dots, V_k, W Vektorräume. Eine Abbildung $F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ heißt *multilinear*, wenn F linear in jedem Argument ist:

$$F(v_1, \dots, av_i + a'v'_i, \dots, v_k) = aF(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + a'F(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k).$$

Beispiele.

- (a) Das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n ist eine skalarwertige bilineare Funktion.
- (b) Die Determinante ist eine reellwertige multilineare Funktion von n Vektoren in \mathbb{R}^n .
- (c) Das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 ist eine vektorwertige bilineare Abbildung.

Definition. Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Ein *kovarianter Tensor* vom Rang k , oder kurz ein kovarianter k -Tensor, ist eine multilineare Funktion

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ein 0-Tensor ist einfach eine reelle Zahl. Die Menge $T^k(V^*)$ aller kovarianten k -Tensoren auf V ist ein Vektorraum mit den Operationen

$$\begin{aligned} (aT)(v_1, \dots, v_k) &= aT(v_1, \dots, v_k), \\ (T + T')(v_1, \dots, v_k) &= T(v_1, \dots, v_k) + T'(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Beispiele.

- (a) Jeder Kovektor $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein kovarianter 1-Tensor. Damit können wir auf natürliche Weise $T^1(V^*)$ mit V^* identifizieren.
- (b) Kovariante 2-Tensoren auf V sind reellwertige bilineare Funktionen und werden deshalb auch Bilinearformen genannt. Jedes innere Produkt auf V ist ein kovarianter 2-Tensor.
- (c) Die Determinante ist ein kovarianter n -Tensor auf \mathbb{R}^n .
- (d) Es seien $\omega, \eta \in V^*$. Definiere eine Abbildung $\omega \otimes \eta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\omega \otimes \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2).$$

Die Linearität von ω und η impliziert, dass $\omega \otimes \eta$ ein kovarianter 2-Tensor ist.

Das letzte Beispiel können wir auch auf Tensoren beliebigen Ranges verallgemeinern.

Definition. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $S \in T^k(V^*)$, $T \in T^l(V^*)$. Definieren wir eine Abbildung

$$S \otimes T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{(k+l)\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$S \otimes T(v_1, \dots, v_{k+l}) = S(v_1, \dots, v_k)T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}),$$

dann ist $S \otimes T$ offenbar ein kovarianter Tensor vom Rang $k + l$, genannt das *Tensorprodukt* von S und T .

Bemerkung.

(a) Das Tensorprodukt ist bilinear und assoziativ.

Proposition 9.1 *Es sei V ein reeller n -dimensionaler Vektorraum und $\{E_1, \dots, E_n\}$ eine beliebige Basis von V . Ist $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ die dazu duale Basis, dann bildet die Menge der k -Tensoren*

$$\mathcal{B} = \{\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$$

eine Basis von $T^k(V^*)$, womit $\dim T^k(V^*) = n^k$.

Beweis: Es sei $T \in T^k(V^*)$ beliebig. Für ein beliebiges k -Tupel natürlicher Zahlen (i_1, \dots, i_k) mit $1 \leq i_j \leq n$, definiere die Zahl $T_{i_1 \dots i_k}$ durch

$$T_{i_1 \dots i_k} = T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

Wir wollen nun zeigen, dass dann

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k} T_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}, \quad (9.1)$$

womit $\text{span } \mathcal{B} = T^k(V^*)$. Aufgrund der Multilinearität ist ein kovarianter Tensor, durch seine Werte auf Basisvektoren bestimmt. Damit folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_k} T_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k}(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) &= \sum_{i_1, \dots, i_k} T_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{i_1}(E_{j_1}) \cdots \varepsilon^{i_k}(E_{j_k}) \\ &= T_{j_1 \dots j_k} = T(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Tensoren in \mathcal{B} linear unabhängig sind. Angenommen

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} T_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_k} = 0.$$

Anwendung auf eine beliebige Folge $(E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$ liefert dann mit derselben Rechnung wie oben $T_{j_1 \dots j_k} = 0$ für jeden Koeffizienten. ■

Bemerkung.

(a) Der Beweis von Proposition 9.1 zeigt auch, dass die Komponenten $T_{i_1 \dots i_k}$ eines Tensors T bezüglich der Basis \mathcal{B} gegeben sind durch $T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})$.

Der Umstand, dass jeder kovariante k -Tensor als Linearkombination von Tensorprodukten von Kovektoren geschrieben werden kann, legt die Notation

$$T^k(V^*) = V^* \otimes \dots \otimes V^*$$

nahe, wobei wir die rechte Seite mit dem Vektorraum aller Linearkombinationen von Tensorprodukten von Elementen aus V^* identifizieren. Wir geben im Folgenden eine Konstruktion an, die dieser Notation allgemeiner Sinn gibt.

Definition. Es sei S eine Menge. Der von S erzeugte *freie Vektorraum* $\mathbb{R}\langle S \rangle$, ist die Menge aller endlichen formalen Linearkombinationen von Elementen von S mit reellen Koeffizienten. Dabei verstehen wir unter einer endlichen formalen Linearkombination eine Funktion $\mathcal{F} : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{F}(s) = 0$ für alle bis auf endlich viele $s \in S$. Versehen mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, wird $\mathbb{R}\langle S \rangle$ zu einem reellen Vektorraum. Identifizieren wir jedes Element $s \in S$ mit der Funktion, die den Wert 1 an s und Null sonst annimmt, dann kann jedes Element $\mathcal{F} \in \mathbb{R}\langle S \rangle$ eindeutig in der Form $\mathcal{F} = \sum_{i=1}^m a_i s_i$ geschrieben werden, wobei genau für $s_1, \dots, s_m \in S$ dann $\mathcal{F}(s_i) \neq 0$ und $a_i = \mathcal{F}(s_i)$. Damit bildet S eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}\langle S \rangle$, der offenbar genau dann endlich-dimensional ist, wenn S endlich ist.

Bemerkung.

(a) *Charakteristische Eigenschaft freier Vektorräume*

Es sei S eine Menge und W ein Vektorraum. Jede Abbildung $F : S \rightarrow W$ besitzt eine eindeutige *lineare Fortsetzung* $\bar{F} : \mathbb{R}\langle S \rangle \rightarrow W$.

Definition. Es seien V und W endlich-dimensionale reelle Vektorräume und \mathcal{R} der Unterraum des freien Vektorraumes $\mathbb{R}\langle V \times W \rangle$, der von allen Elementen der Form

$$\begin{aligned} a(v, w) - (av, w), \\ a(v, w) - (v, aw), \\ (v, w) + (v', w) - (v + v', w), \\ (v, w) + (v, w') - (v, w + w'), \end{aligned}$$

für $a \in \mathbb{R}$, $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$, aufgespannt wird. Das *Tensorprodukt* $V \otimes W$ der Vektorräume V und W ist der Quotientenraum $\mathbb{R}\langle V \times W \rangle / \mathcal{R}$. Die Äquivalenzklasse eines Elements (v, w) in $V \otimes W$ bezeichnen wir mit $v \otimes w$ und sprechen vom Tensorprodukt von v und w .

Bemerkungen.

(a) Aus der Definition von $V \otimes W$ folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} a(v \otimes w) &= av \otimes w = v \otimes aw, \\ v \otimes w + v' \otimes w &= (v + v') \otimes w, \\ v \otimes w + v \otimes w' &= v \otimes (w + w'). \end{aligned}$$

(b) Nach Definition kann jedes Element von $V \otimes W$ als Linearkombination von Elementen der Form $v \otimes w$ mit $v \in V$, $w \in W$ geschrieben werden. Es ist jedoch nicht jedes Element von $V \otimes W$ von der Form $v \otimes w$.

Satz 9.2 Seien V, W endlich-dimensionale reelle Vektorräume. Ist $A : V \times W \rightarrow X$ eine bilineare Abbildung in einen beliebigen Vektorraum X , dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\bar{A} : V \otimes W \rightarrow X$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{A} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{A} & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

wobei $\pi(v, w) = v \otimes w$.

Beweis: Aufgrund der charakteristischen Eigenschaft freier Vektorräume, gibt es zu jeder Abbildung $A : V \times W \rightarrow X$ eine eindeutig bestimmte lineare Fortsetzung $\tilde{A} : \mathbb{R}\langle V \times W \rangle \rightarrow X$. Diese Fortsetzung ist charakterisiert durch $\tilde{A}(v, w) = A(v, w)$ wann immer $(v, w) \in V \times W \subseteq \mathbb{R}\langle V \times W \rangle$.

Die Voraussetzung, dass A bilinear ist, impliziert, dass der Unterraum \mathcal{R} im Kern von \tilde{A} liegt. Daher induziert \tilde{A} eine lineare Abbildung $\bar{A} : V \otimes W = \mathbb{R}\langle V \times W \rangle / \mathcal{R} \rightarrow X$ mit $\bar{A} \circ \Pi = \tilde{A}$, wobei $\Pi : \mathbb{R}\langle V \times W \rangle \rightarrow V \otimes W$ die natürliche Projektion bezeichnet. Dies ist offenbar äquivalent dazu, dass $\bar{A} \circ \pi = A$.

Die Eindeutigkeit von \bar{A} folgt aus dem Ustand, dass jedes Element von $V \otimes W$ als Linearkombination von Elementen der Form $v \otimes w$ geschrieben werden kann, und \bar{A} eindeutig durch ihre Werte auf solchen Elementen $\bar{A}(v \otimes w) = \tilde{A}(v, w) = A(v, w)$ bestimmt ist. ■

Bemerkung.

- (a) Die Eigenschaft aus Satz 9.2 charakterisiert das Tensorprodukt $V \otimes W$ bis auf Isomorphie (Übungsbeispiel).

Proposition 9.3 Es seien V, W und X endlich-dimensionale reelle Vektorräume. Dann gelten folgende Aussagen:

- (a) Das Tensorprodukt $V^* \otimes W^*$ ist kanonisch isomorph zum Raum $B(V, W)$ aller bilinearen Funktionen von $V \times W$ nach \mathbb{R} .
- (b) Ist $\{E_i\}$ eine Basis von V und $\{F_j\}$ eine Basis von W , dann bildet die Menge aller Elemente der Form $E_i \otimes F_j$ eine Basis von $V \otimes W$, womit offenbar $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$.
- (c) Es gibt einen eindeutigen Isomorphismus $(V \otimes W) \otimes X \rightarrow V \otimes (W \otimes X)$, der $(v \otimes w) \otimes x$ auf $v \otimes (w \otimes x)$ abbildet.

Beweis: Zum Beweis von (a) definieren wir eine Abbildung $\Phi : V^* \times W^* \rightarrow B(V, W)$ durch

$$\Phi(\omega, \eta)(v, w) = \omega(v)\eta(w).$$

Da Φ offenbar bilinear ist, gibt es nach Satz 9.2 eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{\Phi} : V^* \otimes W^* \rightarrow B(V, W)$ mit $\bar{\Phi} \circ \pi = \Phi$. Um zu zeigen, dass $\bar{\Phi}$ ein Isomorphismus ist, konstruieren wir eine Inverse. Dazu seien $\{E_i\}$ und $\{F_j\}$ Basen von V bzw. W und $\{\varepsilon^i\}$ und $\{\varphi^j\}$ die dazu dualen Basen. Da $V^* \otimes W^*$ durch Elemente der Form $\omega \otimes \eta$ mit $\omega \in V^*$ und $\eta \in W^*$ aufgespannt wird, können wir jeden Tensor $\tau \in V^* \otimes W^*$ in der Form

$$\tau = \sum_{i,j} \tau_{ij} \varepsilon^i \otimes \varphi^j$$

darstellen. Wir definieren nun eine Abbildung $\Psi : B(V, W) \rightarrow V^* \otimes W^*$ durch

$$\Psi(b) = \sum_{k,l} b(E_k, F_l) \varepsilon^k \otimes \varphi^l.$$

Wir behaupten, dass $\Psi = \bar{\Phi}^{-1}$. Um das zu sehen, seien $\tau = \sum_{i,j} \tau_{ij} \varepsilon^i \otimes \varphi^j \in V^* \otimes W^*$, $b \in B(V, W)$, $v \in V$ und $w \in W$, dann gilt einerseits

$$\begin{aligned} \Psi \circ \bar{\Phi}(\tau) &= \sum_{k,l} \bar{\Phi}(\tau)(E_k, F_l) \varepsilon^k \otimes \varphi^l = \sum_{i,j,k,l} \tau_{ij} \bar{\Phi}(\varepsilon^i \otimes \varphi^j)(E_k, F_l) \varepsilon^k \otimes \varphi^l \\ &= \sum_{i,j,k,l} \tau_{ij} \Phi(\varepsilon^i, \varphi^j)(E_k, F_l) \varepsilon^k \otimes \varphi^l = \sum_{i,j,k,l} \tau_{ij} \varepsilon^i(E_k) \varphi^j(F_l) \varepsilon^k \otimes \varphi^l \\ &= \sum_{i,j} \tau_{ij} \varepsilon^i \otimes \varphi^j = \tau \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} \circ \Psi(b)(v, w) &= \sum_{k,l} b(E_k, F_l) \bar{\Phi}(\varepsilon^k \otimes \varphi^l)(v, w) = \sum_{k,l} b(E_k, F_l) \varepsilon^k(v) \varphi^l(w) \\ &= \sum_{k,l} b(E_k, F_l) v^k w^l = b(v, w). \end{aligned}$$

Damit ist $\Psi = \bar{\Phi}^{-1}$ gezeigt. Beachte, dass wir zwar für den Beweis, dass $\bar{\Phi}$ invertierbar ist, Basen verwendet haben, $\bar{\Phi}$ aber kanonisch definiert war.

Da die Tensoren der Form $\varepsilon^i \otimes \varphi^j$ den Vektorraum $V^* \otimes W^*$ aufspannen und $\dim B(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ ist, folgt aus (a), dass $\{\varepsilon^i \otimes \varphi^j\}$ eine Basis von $V^* \otimes W^*$ bilden. Anwendung dieser Beobachtung auf $V = (V^*)^*$ und $W = (W^*)^*$ liefert Behauptung (b).

Um schließlich (c) zu zeigen, definieren wir für jedes $x \in X$ eine Abbildung $\alpha_x : V \times W \rightarrow V \otimes (W \otimes X)$ durch

$$\alpha_x(v, w) = v \otimes (w \otimes x).$$

Für jedes $x \in X$ ist α_x offensichtlich bilinear, damit gibt es nach Satz 9.2 eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{\alpha}_x : V \otimes W \rightarrow V \otimes (W \otimes X)$ mit $\bar{\alpha}_x(v \otimes w) = v \otimes (w \otimes x)$. Analog bestimmt die Abbildung $\beta : (V \otimes W) \times X \rightarrow V \otimes (W \otimes X)$ definiert durch

$$\beta(\tau, x) = \bar{\alpha}_x(\tau)$$

eine lineare Abbildung $\bar{\beta} : (V \otimes W) \otimes X \rightarrow V \otimes (W \otimes X)$ mit

$$\bar{\beta}((v \otimes w) \otimes x) = v \otimes (w \otimes x).$$

Da $V \otimes (W \otimes X)$ von Elementen der Form $v \otimes (w \otimes x)$ aufgespannt wird, ist $\bar{\beta}$ offenbar surjektiv und damit aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Umstand, dass jeder Isomorphismus $(V \otimes W) \otimes X \rightarrow V \otimes (W \otimes X)$, der $(v \otimes w) \otimes x$ auf $v \otimes (w \otimes x)$ abbildet auf Elementen der Form $(v \otimes w) \otimes x$ mit $\bar{\beta}$ übereinstimmen muss. Diese Elemente spannen aber ganz $(V \otimes W) \otimes X$ auf. ■

Als Konsequenz von Proposition 9.3 erhalten wir nun auch die gewünschte Beziehung zwischen abstrakten Tensorprodukten von Vektorräumen und den zuvor definierten konkreteren kovarianten k -Tensoren.

Korollar 9.4 *Ist V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, dann ist der Raum $T^k(V^*)$ aller kovarianten k -Tensoren auf V kanonisch isomorph zum k -fachen Tensorprodukt $V^* \otimes \dots \otimes V^*$.*

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Das abstrakte Tensorprodukt von Vektorräumen erlaubt auch die folgende Verallgemeinerung des Begriffes der kovarianten Tensoren:

Definition. Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Der Raum $T^k(V)$ der *kontravarianten Tensoren* vom Rang k ist definiert durch

$$T^k(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}}.$$

Allgemeiner ist für $k, l \in \mathbb{N}$, der Raum der *gemischten Tensoren* auf V vom Typ (k, l) definiert durch

$$T^{(k,l)}(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{l\text{-mal}}.$$

Bemerkung.

- (a) Aufgrund der kanonischen Identifikation $V = V^{**}$ und Korollar 9.4, kann ein Element von $T^k(V)$ als multilineare Funktion von $V^* \times \dots \times V^*$ nach \mathbb{R} aufgefasst werden. Analog, können gemischte Tensoren aus $T^{(k,l)}(V)$ als reellwertige multilineare Funktionen von k Kovektoren und l Vektoren angesehen werden.

Wir kommen nun zur natürlichen Verallgemeinerung von Vektor- und Kovektorfeldern auf glatten Mannigfaltigkeiten.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Das *Tensorbündel kovarianter k -Tensoren* auf M ist definiert durch

$$T^k T^* M = \coprod_{p \in M} T^k(T_p^* M).$$

Das *Tensorbündel kontravarianter k -Tensoren* auf M ist definiert durch

$$T^k TM = \coprod_{p \in M} T^k(T_p M)$$

und das *Tensorbündel gemischter Tensoren vom Typ (k, l)* auf M ist

$$T^{(k,l)} TM = \coprod_{p \in M} T^{(k,l)}(T_p M).$$

Bemerkungen.

- (a) Wie die folgenden natürlichen Identifikationen zeigen, sind das Tangential- und Kotangentialbündel Spezialfälle von Tensorbündeln:

$$T^0 T^* M = T^0 TM = M \times \mathbb{R}, \quad T^1 T^* M = T^* M, \quad T^1 TM = TM.$$

- (b) Genau wie das Tangential- und Kotangentialbündel tragen die Tensorbündel $T^k T^* M$, $T^k TM$ und $T^{(k,l)} TM$ die Struktur glatter Mannigfaltigkeiten:

Ist M eine glatte n -Mannigfaltigkeit, so tragen die Tensorbündel $T^k T^ M$, $T^k TM$ und $T^{(k,l)} TM$ in natürlicher Weise die Struktur glatter Mannigfaltigkeiten, sodass die Projektionen auf M glatt sind.*

Definition. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so heißt eine stetige Abbildung $\sigma : M \rightarrow T^k T^* M$ ein *kovariantes Tensorfeld*, wenn

$$\pi \circ \sigma = \text{Id}_M, \tag{9.2}$$

wobei $\pi : T^k T^* M \rightarrow M$ die natürliche Projektion bezeichnet. Ist die Abbildung σ glatt, so sprechen wir von einem glatten kovarianten Tensorfeld. Wir nennen eine Abbildung $\sigma : M \rightarrow T^k T^* M$ ein *grobes kovariantes Tensorfeld*, wenn σ (9.2) erfüllt.

Die Definitionen von kontravarianten und gemischten Tensorfeldern sind analog. Wir bezeichnen die Vektorräume der glatten kontravarianten bzw. gemischten Tensorfelder mit $\Gamma(T^k TM)$ bzw. $\Gamma(T^{(k,l)} TM)$ und schreiben für den Vektorraum der glatten kovarianten Tensorfelder $\mathcal{T}^k(M) := \Gamma(T^k T^* M)$.

Genau wie Vektor- und Kovektorfelder besitzen Tensorfelder bezüglich beliebiger glatter lokaler Koordinaten (x^i) Standarddarstellungen:

$$\sigma = \begin{cases} \sum_{i_1, \dots, i_k} \sigma_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}, & \sigma \in \mathcal{T}^k(M); \\ \sum_{j_1, \dots, j_l} \sigma^{j_1 \dots j_l} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}, & \sigma \in \Gamma(T^k TM); \\ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_l}} \sigma_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}, & \sigma \in \Gamma(T^{(k,l)} TM). \end{cases}$$

Die Funktionen $\sigma_{i_1 \dots i_k}$, $\sigma^{j_1 \dots j_l}$ bzw. $\sigma_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ heißen die *Komponentenfunktionen* von σ bezüglich der gegebenen Koordinaten.

Das folgende Lemma stellt ein Analogon zu Lemma 7.5 dar. Da der Beweis sehr ähnlich zu den entsprechenden Resultaten für Vektorfelder aus Kapitel 3 verläuft führen wir ihn nicht aus.

Lemma 9.5 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\sigma : M \rightarrow T^k T^* M$ ein grobes kovariantes Tensorfeld. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) σ ist glatt.
- (b) Die Komponentenfunktionen von σ sind bezüglich beliebiger glatter Karten auf M glatt.
- (c) Sind X_1, \dots, X_k glatte Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, dann ist die Funktion $\sigma(X_1, \dots, X_k) : U \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\sigma(X_1, \dots, X_k)(p) = \sigma_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p),$$

glatt.

Tensorfelder können, analog zu Vektor- und Kovektorfelder, mit glatten Funktionen (also 0-Tensorfeldern) multipliziert werden. Allgemeiner ist das Tensorprodukt von Tensorfeldern punktweise definiert und wie man leicht zeigt, gilt:

Lemma 9.6 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\sigma \in \mathcal{T}^k(M)$, $\tau \in \mathcal{T}^l(M)$ und $f \in C^\infty(M)$. Dann sind $f\sigma$ und $\sigma \otimes \tau$ auch glatte Tensorfelder, deren Komponenten bezüglich einer beliebigen glatten Karte gegeben sind durch*

$$\begin{aligned} (f\sigma)_{i_1 \dots i_k} &= f \sigma_{i_1 \dots i_k}, \\ (\sigma \otimes \tau)_{i_1 \dots i_{k+l}} &= \sigma_{i_1 \dots i_k} \tau_{i_{k+1} \dots i_{k+l}}. \end{aligned}$$

Definition. Es seien M und N Mannigfaltigkeiten. Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $p \in M$ der *punktweise Pullback* durch F die Abbildung $dF_p^* : T^k(T_{F(p)}^* N) \rightarrow T^k(T_p^* M)$ definiert durch

$$(dF_p^* S)(X_1, \dots, X_k) = S(dF_p(X_1), \dots, dF_p(X_k)).$$

Die Eigenschaften des Pullbacks von Kotangentialvektoren haben natürliche Verallgemeinerungen im Kontext von kovarianten Tensoren auf Tangentialräumen.

Proposition 9.7 *Es seien M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, $p \in M$, $S \in T^k(T_{F(p)}^* N)$ und $T \in T^l(T_{F(p)}^* N)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) $dF_p^* : T^k(T_{F(p)}^* N) \rightarrow T^k(T_p^* M)$ ist linear.
- (b) $dF_p^*(S \otimes T) = dF_p^* S \otimes dF_p^* T$.
- (c) $d(G \circ F)_p^* = dF_p^* \circ dG_{F(p)}^* : T^k(T_{G \circ F(p)}^* P) \rightarrow T^k(T_p^* M)$.
- (d) $d(\text{Id}_N)_p^* S = S$.

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Genau wie im Falle von Kovektorfeldern, ist auch der Pullback von kovarianten Tensorfeldern wohldefiniert.

Definition. Es seien M und N Mannigfaltigkeiten. Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und $\sigma \in \mathcal{T}^k(N)$, dann ist der Pullback $F^*\sigma$ von σ das glatte kovariante k -Tensorfeld auf M definiert durch

$$(F^*\sigma)_p = dF_p^*(\sigma_{F(p)}).$$

Sind $X_1, \dots, X_k \in T_pM$, dann gilt also

$$(F^*\sigma)_p(X_1, \dots, X_k) = \sigma_{F(p)}(dF_p(X_1), \dots, dF_p(X_k)).$$

Die folgende Proposition fasst einige einfache Eigenschaften des Pullbacks von Tensorfeldern zusammen.

Proposition 9.8 *Es seien M, N, P glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \rightarrow N$ und $G : N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, $\sigma \in \mathcal{T}^k(N)$, $\tau \in \mathcal{T}^l(N)$ und $f \in C^\infty(N)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) $F^*(f\sigma) = (f \circ F)F^*\sigma$.
- (b) $F^*(\sigma \otimes \tau) = F^*\sigma \otimes F^*\tau$.
- (c) $F^*\sigma$ ist ein glattes Tensorfeld.
- (d) $F^* : \mathcal{T}^k(N) \rightarrow \mathcal{T}^k(M)$ ist linear.
- (e) $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.
- (f) $(\text{Id}_N)^*\sigma = \sigma$.

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Bemerkung.

- (a) Ist $f \in C^\infty(M)$, und damit ein 0-Tensorfeld, und σ ein glattes k -Tensorfeld, dann können wir $f \otimes \sigma$ mit $f\sigma$ und F^*f mit $f \circ F$ identifizieren. Damit ist Eigenschaft (a) aus Proposition 9.8 nur ein Spezialfall von (b).

Korollar 9.9 *Es seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $\sigma \in \mathcal{T}^k(N)$. Ist $p \in M$ und sind (y^j) glatte Koordinaten für N in einer Umgebung von $F(p)$, dann hat $F^*\sigma$ die folgende Koordinatendarstellung in einer Umgebung von p :*

$$F^* \left(\sum_{j_1, \dots, j_k} \sigma_{j_1 \dots j_k} dy^{j_1} \otimes \dots \otimes dy^{j_k} \right) = \sum_{j_1, \dots, j_k} (\sigma_{j_1 \dots j_k} \circ F) d(y^{j_1} \circ F) \otimes \dots \otimes d(y^{j_k} \circ F).$$

Bemerkungen.

- (a) Korollar 9.9 zeigt, dass der Pullback $F^*\sigma$ mit derselben Technik berechnet werden kann, die wir schon für Kovektorfelder in (7.4) kennengelernt haben.
- (b) Im Allgemeinen ist weder ein Pushforward noch ein Pullback von gemischten Tensorfeldern definiert; im Spezialfall eines Diffeomorphismus, jedoch schon.

Wir wenden uns nun Tensoren, die invariant unter Permutationen ihrer Argumente sind, zu. Diese spielen in der Differentialgeometrie eine besonders wichtige Rolle.

Definition. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Ein kovarianter k -Tensor T auf V heißt *symmetrisch*, wenn für beliebige $1 \leq i < j \leq k$

$$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k).$$

Wir bezeichnen den Unterraum von $T^k(V^*)$ aller symmetrischen kovarianten k -Tensoren mit $\Sigma^k(V^*)$. Die natürliche Projektion $\text{Sym} : T^k(V^*) \rightarrow \Sigma^k(V^*)$, genannt *Symmetrisierung*, ist wie folgt definiert: Sei S_k die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \dots, k\}$. Für $T \in T^k(V^*)$ und $\sigma \in S_k$, sei ${}^\sigma T \in T^k(V^*)$ definiert durch

$${}^\sigma T(X_1, \dots, X_k) = T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}).$$

Beachte, dass dann $\tau({}^\sigma T) = {}^{\tau\sigma} T$. Der Tensor $\text{Sym } T$ ist nun definiert durch

$$\text{Sym } T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^\sigma T.$$

Bemerkung.

- (a) Ist T ein kovarianter k -Tensor, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
 - (i) T ist symmetrisch.
 - (ii) Für $X_1, \dots, X_k \in V$ ist $T(X_1, \dots, X_k)$ unabhängig von der Reihenfolge der Argumente.
 - (iii) Die Komponenten $T_{i_1 \dots i_k}$ von T in Bezug auf eine beliebige Basis sind invariant unter beliebigen Permutationen der Indizes.

Lemma 9.10 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) Für jeden kovarianten Tensor T ist $\text{Sym } T$ symmetrisch.
- (b) T ist genau dann symmetrisch, wenn $\text{Sym } T = T$.

Beweis: Es sei $T \in T^k(V^*)$ und $\tau \in S_k$ eine beliebige Permutation. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\text{Sym } T)(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(k)}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^\sigma T(X_{\tau(1)}, \dots, X_{\tau(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} {}^{\tau\sigma} T(X_1, \dots, X_k) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\eta \in S_k} {}^\eta T(X_1, \dots, X_k) = (\text{Sym } T)(X_1, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Zum Beweis von (b) beachte, dass einerseits für jedes symmetrische T nach der letzten Bemerkung ${}^\sigma T = T$ für alle $\sigma \in S_k$, womit sofort $\text{Sym } T = T$ folgt. Ist andererseits $\text{Sym } T = T$, dann ist T symmetrisch nach (a). ■

Sind S und T symmetrische Tensoren auf V , dann ist ihr Tensorprodukt $S \otimes T$ im Allgemeinen nicht symmetrisch. Mit Hilfe der Symmetrisierung können wir jedoch ein Produkt definieren, das symmetrische Tensoren auf symmetrische abbildet.

Definition. Sind $S \in \Sigma^k(V^*)$ und $T \in \Sigma^l(V^*)$, so ist ihr *symmetrisches Produkt* $ST \in \Sigma^{k+l}(V^*)$ definiert durch

$$ST = \text{Sym}(S \otimes T).$$

Proposition 9.11 *Das symmetrische Produkt ist kommutativ und bilinear. Sind S, T kovariante 1-Tensoren, dann gilt*

$$ST = \frac{1}{2}(S \otimes T + T \otimes S).$$

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Ein *symmetrisches Tensorfeld* auf einer Mannigfaltigkeit ist einfach ein kovariantes Tensorfeld, dessen Wert an jedem Punkt ein symmetrischer Tensor ist. Auch das symmetrische Produkt zweier symmetrischer Tensorfelder ist punktweise definiert.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik auf M ist ein glattes symmetrisches 2-Tensorfeld, das in jedem Punkt positiv definit ist. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, g) , wobei M eine glatte Mannigfaltigkeit und g eine Riemannsche Metrik auf M ist.

Die wichtigsten Beispiele symmetrischer Tensoren auf Vektorräumen sind die Inneren Produkte. Sie erlauben es Längen von Vektoren und Winkel zwischen ihnen zu definieren und bilden damit die Grundlage der Euklidischen Geometrie. Die Übertragung dieser Ideen auf Mannigfaltigkeiten führt in natürlicher Weise auf die Klasse der Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Leider können wir uns aus Zeitgründen nicht eingehender mit diesen sehr wichtigen Typen von Mannigfaltigkeiten auseinandersetzen, sondern kommen jetzt zu alternierenden Tensoren. Diese bilden ein Gegenstück zu den symmetrischen Tensoren und spielen eine zentrale Rolle in der Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten.

Die zentrale Frage im Folgenden ist: Wie können wir Integrale auf Mannigfaltigkeiten koordinatenunabhängig definieren? Offenbar gibt es keine Möglichkeit das Integral reellwertiger Funktionen koordinatenunabhängig auf Mannigfaltigkeiten (beliebiger Dimension) zu definieren. Ist zum Beispiel $C \subseteq \mathbb{R}^n$ der n -dimensionale Würfel und $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ konstant $f(x) \equiv 1$, dann gilt

$$\int_C f \, dx = \text{vol}(C),$$

was nicht einmal unter linearen Koordinatentransformationen invariant ist.

In Kapitel 8 haben wir allerdings gesehen, dass wir Kovektorfelder über Kurven auf Mannigfaltigkeiten integrieren können. Wir suchen also jetzt eine Art „Feld“, das wir in koordinatenunabhängiger Weise über Untermannigfaltigkeiten der Dimension $k > 1$ integrieren können. Der Wert dieses Feldes an einem Punkt sollte ein Funktional sein, das k Tangentialvektoren $\{X_1, \dots, X_k\}$ an einem Punkt eine Art signiertes Volumen zuordnet. Ein Beispiel im \mathbb{R}^n wäre die Determinante. Dabei handelt es sich um einen kovarianten n -Tensor, der außerdem die Eigenschaft hat, das Vorzeichen zu wechseln, wenn zwei seiner Argumente vertauscht werden. Dies motiviert folgende

Definition. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Ein kovarianter k -Tensor T auf V heißt *alternierend*, wenn für beliebige $1 \leq i < j \leq k$,

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Wir bezeichnen den Unterraum von $T^k(V^*)$ aller alternierenden kovarianten k -Tensoren mit $\Lambda^k(V^*)$. Die natürliche Projektion $\text{Alt} : T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$, genannt *alternierende Projektion*, ist definiert durch

$$\text{Alt } T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) (\sigma T).$$

Bemerkungen.

(a) Ist T ein kovarianter k -Tensor, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) T ist alternierend.
- (ii) Für $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\sigma \in S_k$ ist

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) T(v_1, \dots, v_k).$$

- (iii) $T(v_1, \dots, v_k) = 0$ wann immer die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$ linear abhängig sind.
- (iv) Die Komponenten $T_{i_1 \dots i_k}$ von T in Bezug auf eine beliebige Basis wechseln das Vorzeichen, wann immer zwei Indizes vertauscht werden.

Nach (iii) gibt es keine von Null verschiedenen alternierenden k -Tensoren auf V , wenn $k > \dim V$ ist.

- (b) Offenbar ist jeder 0-Tensor und jeder 1-Tensor alternierend. Ein alternierender 2-Tensor ist eine schief-symmetrische Bilinearform auf V .
- (c) Jeder 2-Tensor T kann geschrieben werden als Summe eines alternierenden und eines symmetrischen Tensors:

$$T(v, w) = \frac{1}{2}(T(v, w) - T(w, v)) + \frac{1}{2}(T(v, w) + T(w, v)).$$

Eine entsprechende Aussage für Tensoren höheren Ranges gilt nicht!

Das folgende Lemma (und dessen Beweis) sind ein Analogon zu Lemma 9.10.

Lemma 9.12 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Für jeden kovarianten Tensor T ist $\text{Alt } T$ alternierend.*
- (b) *T ist genau dann alternierend, wenn $\text{Alt } T = T$.*

Wir wollen nun eine Basis von $\Lambda^k(V^*)$ konstruieren. Dazu nennen wir ein k -Tupel $I = (i_1, \dots, i_k)$ natürlicher Zahlen einen *Multiindex* der Länge k . Ist I ein solcher Multiindex und $\sigma \in S_k$, dann schreiben wir I_σ für den Multiindex

$$I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}).$$

Beachte, dass $I_{\sigma\tau} = (I_\sigma)_\tau$ für $\sigma, \tau \in S_k$. Sind I und J zwei Multiindizes der Länge k , so definieren wir

$$\delta_I^J = \begin{cases} \text{sgn } \sigma & I \text{ und } J \text{ haben keinen Index doppelt und } J = I_\sigma \text{ für ein } \sigma \in S_k; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei nun V ein n -dimensionaler Vektorraum und $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ eine Basis für V^* . Für jeden Multiindex $I = (i_1, \dots, i_k)$ der Länge k mit $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, sei ε^I der kovariante k -Tensor definiert durch

$$\varepsilon^I(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon^{i_1}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_1}(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon^{i_k}(v_1) & \cdots & \varepsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_k^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{i_k} & \cdots & v_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Da Determinanten das Vorzeichen wechseln, wenn zwei Spalten vertauscht werden, ist ε^I alternierend. Wir nennen ε^I einen *elementaren alternierenden k -Tensor*.

Lemma 9.13 *Es sei $\{E_i\}$ eine Basis von V , $\{\varepsilon^i\}$ die dazu duale Basis von V^* und ε^I definiert wie oben. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Hat I einen Index, der zweimal auftritt, dann ist $\varepsilon^I = 0$.*
- (b) *Ist $J = I_\sigma$ für ein $\sigma \in S_k$, dann gilt $\varepsilon^I = (\text{sgn } \sigma)\varepsilon^J$.*
- (c) *Ist $J = (j_1, \dots, j_k)$, dann gilt $\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \delta_J^I$.*

Beweis: Hat I einen Index der doppelt auftritt, dann hat für beliebige v_1, \dots, v_k die Determinante aus der Definition von $\varepsilon^I(v_1, \dots, v_k)$ zwei gleiche Zeilen und ist daher Null, womit (a) folgt. Entsteht J aus I durch Transposition zweier Indizes, dann tauschen die entsprechenden Determinanten in der Definition von ε^I und ε^J das Vorzeichen, was Aussage (b) impliziert.

Zum Beweis von (c) unterscheiden wir vier Fälle. Hat I einen Index doppelt, dann gilt $\varepsilon^I = \delta_J^I = 0$ nach (a). Hat J einen Index doppelt, dann ist $\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = 0$ da ε^I alternierend ist. Besitzt weder I noch J einen Doppelindex und ist J keine Permutation von I , dann hat die Matrix deren Determinante in der Definition von $\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$ berechnet wird, mindestens eine Zeile bestehend aus Nullen, womit $\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = 0$. Ist $J = I$, dann ist $\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k})$ die Determinante der Einheitsmatrix, also 1. Ist daher $J = I_\sigma$, dann gilt nach (b)

$$\varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = (\text{sgn } \sigma)\varepsilon^J(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \text{sgn } \sigma = \delta_J^I. \quad \blacksquare$$

Die elementaren alternierenden k -Tensoren ε^I bilden noch keine Basis von $\Lambda^k(V^*)$, da sie nicht linear unabhängig sind (einige von ihnen sind sogar Null). Indem wir uns auf *aufsteigende Multiindizes* $I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_1 < \dots < i_k$, beschränken, erhalten wir jedoch eine Basis, wie das nächste Resultat zeigt. Es ist im Folgenden praktisch für die Summation über aufsteigende Multiindizes, ein eigenes Summationssymbol zu verwenden:

$$\sum_I' T_I \varepsilon^I = \sum_{\{I: 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}} T_I \varepsilon^I.$$

Proposition 9.14 *Es sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Ist $\{\varepsilon^i\}$ eine Basis von V^* , dann bildet für jedes $k \leq n$ die Menge*

$$\mathcal{E} = \{\varepsilon^I : I \text{ ist aufsteigender Multiindex der Länge } k\}$$

eine Basis von $\Lambda^k(V^*)$, womit

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}.$$

Ist $k > n$, dann gilt $\Lambda^k(V^*) = 0$.

Beweis: Die Behauptung $\Lambda^k(V^*) = 0$ für $k > n$, folgt aus dem Umstand, dass $k > n$ Vektoren in einem n -dimensionalen Vektorraum stets linear abhängig sind. Für $k \leq n$ müssen wir nun zeigen, dass die Menge \mathcal{E} den Raum $\Lambda^k(V^*)$ aufspannt und aus linear unabhängigen Tensoren besteht. Dazu bezeichne $\{E_i\}$ die zu $\{\varepsilon^i\}$ duale Basis von V .

Es sei $T \in \Lambda^k(V^*)$ beliebig. Zu jedem Multiindex $I = (i_1, \dots, i_k)$ sei T_I die Zahl definiert durch

$$T_I = T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k}).$$

Da T alternierend ist, ist $T_I = 0$, wenn I einen doppelten Index besitzt und $T_J = (\text{sgn } \sigma)T_I$, wenn $J = I_\sigma$ für $\sigma \in S_k$. Unter Verwendung von Lemma 9.13 erhalten wir daher für einen beliebigen Multiindex J ,

$$\sum_I' T_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = \sum_I' T_I \delta_J^I = T_J = T(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}),$$

womit $\sum_I' T_I \varepsilon^I = T$. Damit ist $\text{span } \mathcal{E} = \Lambda^k(V^*)$. Angenommen es gilt

$$\sum_I' T_I \varepsilon^I = 0$$

für geeignete Koeffizienten T_I . Ist J ein beliebiger aufsteigender Multiindex, dann erhalten wir aus Lemma 9.13,

$$0 = \sum_I' T_I \varepsilon^I(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}) = T_J,$$

womit jeder der Koeffizienten T_J Null ist, also die Menge der Tensoren \mathcal{E} linear unabhängig ist. ■

Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum, dann ist $\Lambda^n(V^*)$ nach Proposition 9.14 ein 1-dimensionaler Vektorraum, der von $\varepsilon^{1\dots n}$ aufgespannt wird. Eine sehr nützliche Konsequenz dieses Umstandes ist die folgende Beschreibung des Verhaltens eines alternierenden n -Tensors unter linearen Abbildungen.

Korollar 9.15 *Es sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $\omega \in \Lambda^n(V^*)$. Ist $A : V \rightarrow V$ eine beliebige lineare Abbildung und $v_1, \dots, v_n \in V$, dann gilt*

$$\omega(Av_1, \dots, Av_n) = (\det A)\omega(v_1, \dots, v_n). \quad (9.3)$$

Beweis: Es sei $\{E_i\}$ eine Basis von V und $\{\varepsilon^i\}$ die dazu duale Basis von V^* . Weiters bezeichne (A_i^j) die Matrix von A in Bezug auf $\{E_i\}$ und es seien $A_i = AE_i$. Nach Proposition 9.14 ist $\omega = c\varepsilon^{1\dots n}$ für eine geeignete Zahl c .

Da beide Seiten von (9.3) multilinear sind in v_1, \dots, v_n , genügt es die Behauptung für $v_i = E_i$, $i = 1, \dots, n$ nachzuweisen. Die rechte Seite von (9.3) ergibt dann

$$(\det A)c\varepsilon^{1\dots n}(E_1, \dots, E_n) = c \det A$$

und die linke Seite

$$\omega(AE_1, \dots, AE_n) = c\varepsilon^{1\dots n}(A_1, \dots, A_n) = c \det(\varepsilon^j(A_i)) = c \det(A_i^j) = c \det A. \quad \blacksquare$$

Wir führen nun, analog zum symmetrischen Produkt von symmetrischen Tensoren, ein Produkt auf alternierenden Tensoren ein.

Definition. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^l(V^*)$. Das Keil- oder äußere Produkt von ω und η ist der alternierende $(k+l)$ -Tensor definiert durch

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Der zunächst merkwürdig anmutende Normierungsfaktor ist motiviert durch

Lemma 9.16 *Es sei $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ eine Basis von V^* . Für beliebige Multiindizes $I = (i_1, \dots, i_k)$ und $J = (j_1, \dots, j_l)$ ist*

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ},$$

wobei IJ der Multiindex ist gegeben durch $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$.

Beweis: Aufgrund der Multilinearität von ε^I und ε^J genügt es zu zeigen, dass

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = \varepsilon^{IJ}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) \quad (9.4)$$

für jede Folge $\{E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}\}$ von Basisvektoren. Dazu unterscheiden wir:

- $P = (p_1, \dots, p_{k+l})$ hat einen doppelten Index
In diesem Fall sind beide Seiten von (9.4) Null, da sowohl $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J$ als auch ε^{IJ} alternierende Tensoren sind.

- P enthält einen Index, der weder in I noch in J vorkommt.

Die rechte Seite von (9.4) ist dann nach Lemma 9.13 (c) Null. Die linke Seite von (9.4) ist auch Null nach Lemma 9.13 (c), da jeder Term in der Entwicklung der linken Seite entweder ε^I oder ε^J ausgewertet an einer Folge von Basisvektoren, die weder durch eine Permutation von I noch J indiziert ist, enthält.

- $P = IJ$ und P hat keinen doppelten Index.

In diesem Fall ist die rechte Seite von (9.4) gleich 1 nach Lemma 9.13 (c), es bleibt also zu zeigen, dass auch die linke Seite von (9.4) gleich 1 ist. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J)(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\text{sgn } \sigma) \varepsilon^I(E_{p_{\sigma(1)}}, \dots, E_{p_{\sigma(k)}}) \varepsilon^J(E_{p_{\sigma(k+1)}}, \dots, E_{p_{\sigma(k+l)}}).\end{aligned}$$

Nach Lemma 9.13 sind die einzigen von Null verschiedenen Summanden in dieser Summe, die für welche σ die ersten k Indizes und die letzten l Indizes von P separat permutiert. Anders ausgedrückt, σ muss von der Form $\sigma = \tau\eta$, wobei $\tau \in S_k$ die Menge $\{1, \dots, k\}$ permutiert und $\eta \in S_l$ die Menge $\{k+1, \dots, k+l\}$. Da $\text{sgn}(\tau\eta) = (\text{sgn } \tau)(\text{sgn } \eta)$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) &= \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\tau \in S_k, \eta \in S_l} (\text{sgn } \tau)(\text{sgn } \eta) \varepsilon^I(E_{p_{\tau(1)}}, \dots, E_{p_{\tau(k)}}) \varepsilon^J(E_{p_{\eta(k+1)}}, \dots, E_{p_{\eta(k+l)}}) \\ &= \left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (\text{sgn } \tau) \varepsilon^I(E_{p_{\tau(1)}}, \dots, E_{p_{\tau(k)}}) \right) \left(\frac{1}{l!} \sum_{\eta \in S_l} (\text{sgn } \eta) \varepsilon^J(E_{p_{\eta(k+1)}}, \dots, E_{p_{\eta(k+l)}}) \right) \\ &= (\text{Alt } \varepsilon^I)(E_{p_1}, \dots, E_{p_k}) (\text{Alt } \varepsilon^J)(E_{p_{k+1}}, \dots, E_{p_{k+l}}) \\ &= \varepsilon^I(E_{p_1}, \dots, E_{p_k}) \varepsilon^J(E_{p_{k+1}}, \dots, E_{p_{k+l}}) = 1.\end{aligned}$$

- P ist eine Permutation von IJ und P hat keinen doppelten Index

In diesem Fall bringt uns eine Permutation von P zurück auf den letzten Fall. Da durch die Permutation beide Seiten von (9.4) mit demselben Vorzeichen multipliziert werden, folgt die Behauptung. \blacksquare

Proposition 9.17 *Das äußere Produkt hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Bilinearität:*

$$\begin{aligned}(a\omega + a'\omega') \wedge \eta &= a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta), \\ \eta \wedge (a\omega + a'\omega') &= a(\eta \wedge \omega) + a'(\eta \wedge \omega').\end{aligned}$$

(b) *Assoziativität:*

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi.$$

(c) *Antikommutativität: Für $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ gilt*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

(d) Ist $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ eine Basis von V^* und $I = (i_1, \dots, i_k)$ ein beliebiger Multiindex, dann gilt

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k} = \varepsilon^I.$$

(e) Für beliebige Kovektoren $\omega^1, \dots, \omega^k$ und Vektoren v_1, \dots, v_k , gilt

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega^j(v_i)). \quad (9.5)$$

Beweis: Die Bilinearität des äußeren Produkts folgt aus der Definition, da das Tensorprodukt bilinear und Alt linear ist. Zum Beweis der Assoziativität, bemerken wir, dass nach Lemma 9.16,

$$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{JK} = \varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K).$$

Der allgemeine Fall folgt nun aus der Bilinearität. Analog folgt aus Lemma 9.16,

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (\operatorname{sgn} \tau) \varepsilon^{JI} = (\operatorname{sgn} \tau) \varepsilon^J \wedge \varepsilon^I,$$

wobei τ die Permutation ist, die IJ auf JI abbildet. Offenbar gilt $\operatorname{sgn} \tau = (-1)^{kl}$, da τ als Zusammensetzung von kl Transpositionen geschrieben werden kann (jeder Index von I muss an jedem Index von J vorbei). Die Antikommutativität folgt nun aus der Bilinearität. Aussage (d) folgt durch Induktion aus Lemma 9.16. Es bleibt (e) zu zeigen. Ist jedes ω^j ein Basiskovektor ε^{i_j} , dann folgt die Behauptung aus (d). Da beide Seiten von (9.5) multilinear sind in $(\omega^1, \dots, \omega^k)$ folgt (e) allgemein. ■

Bemerkungen.

- (a) Das äußere Produkt ist die eindeutig bestimmte assoziative, bilineare und antikommutative Abbildung $\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) \rightarrow \Lambda^{k+l}(V^*)$, die (9.5) erfüllt.
- (b) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Definiere den Vektorraum $\Lambda(V^*)$ durch

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V^*).$$

Aus Proposition 9.14 folgt, dass $\dim \Lambda(V^*) = 2^n$. Proposition 9.17 zeigt, dass das äußere Produkt $\Lambda(V^*)$ zu einer assoziativen, graduierten und antikommutativen Algebra macht. $\Lambda(V^*)$ heißt die *äußere Algebra* von V .

Wir wenden uns nun alternierenden Tensorfeldern, den Differentialformen, zu.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Teilmenge von $T^k T^* M$ bestehend aus alternierenden Tensoren bezeichnen wir mit $\Lambda^k T^* M$:

$$\Lambda^k T^* M = \prod_{p \in M} \Lambda^k(T_p^* M).$$

Das Tensorbündel $\Lambda^k T^* M$ trägt in natürlicher Weise die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, sodass die Projektion $\pi : \Lambda^k T^* M \rightarrow M$ glatt ist.

Eine stetige Abbildung $\omega : M \rightarrow \Lambda^k T^* M$ heißt *k-Differentialform* (kurz *k-Form*), wenn

$$\pi \circ \omega = \operatorname{Id}_M,$$

Die Zahl k heißt der *Grad* der Form ω . Wir bezeichnen den Vektorraum aller glatten k -Formen mit $\Omega^k(M)$.

Bezüglich einer beliebigen glatten Karte auf M , kann eine k -Form ω lokal in der Form

$$\omega = \sum_I' \omega_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizientenfunktionen ω_I stetig auf der Koordinatenumgebung sind. Da nach Lemma 9.13 (c) gilt

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) = \delta_J^I,$$

sind die Komponentenfunktionen ω_I bestimmt durch

$$\omega_I = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right).$$

Beispiele.

- (a) Eine 0-Form ist eine stetige reellwertige Funktion auf M .
- (b) Eine 1-Form ist ein Kovektorfeld auf M .
- (c) Jede n -Form auf \mathbb{R}^n ist eine stetige reellwertige Funktion multipliziert mit $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Das äußere Produkt zweier Differentialform ist auch wieder punktweise definiert: $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$. Damit ist das äußere Produkt einer k -Form mit einer l -Form eine $(k+l)$ -Form. Ist f eine 0-Form und η eine k -Form, so identifizieren wir das äußere Produkt $f \wedge \eta$ mit $f\eta$. Durch das äußere Produkt wird daher der Vektorraum

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M),$$

zu einer assoziativen, graduierten und antikommutativen Algebra.

Ist $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und ω eine glatte Differentialform auf N , dann ist der *Pullback* $F^*\omega$ eine glatte Differentialform auf M , definiert genau wie für allgemeine glatte Tensorfelder durch

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)).$$

Ist speziell $\iota : N \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung einer immersierten Untermannigfaltigkeit, dann schreiben wir $\omega|_N$ anstatt $\iota^*\omega$.

Lemma 9.18 *Es sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ ist linear.
- (b) $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$.
- (c) *Bezüglich beliebiger glatter Koordinaten gilt*

$$F^* \left(\sum_I' \omega_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \right) = \sum_I' (\omega_I \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F).$$

Beweis: Übungsbeispiel. ■

Die Regel zur Berechnung von Pullbacks von Differentialformen in Koordinaten kann auch dazu verwendet werden, die Darstellungen einer Differentialform bezüglich unterschiedlicher Koordinaten zu berechnen.

Beispiel.

Es sei ω die 2-Form gegeben durch $dx \wedge dy$ im \mathbb{R}^2 . Indem wir die Transformation auf Polarkoordinaten $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ als eine Darstellung der Identität in Bezug auf verschiedene Koordinaten betrachten, folgt

$$\begin{aligned} \omega &= dx \wedge dy = d(r \cos \theta) \wedge d(r \sin \theta) \\ &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr = r dr \wedge d\theta, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $dr \wedge dr = d\theta \wedge d\theta = 0$ und $d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta$.

Die Analogie der im letzten Beispiel hergeleiteten Transformationsregel mit der Substitutionsregel für Doppelintegrale beim Wechsel von kartesischen zu Polarkoordinaten ist kein Zufall, wie das folgende Resultat zeigt.

Proposition 9.19 *Es sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten n -Mannigfaltigkeiten. Sind (x^i) und (y^j) glatte Koordinaten auf offenen Teilmengen $U \subseteq M$ bzw. $V \subseteq N$ und ist $u \in C^\infty(V)$, dann gilt auf $U \cap F^{-1}(V)$,*

$$F^*(u dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (u \circ F)(\det DF) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (9.6)$$

wobei DF die Matrix der partiellen Ableitungen der Koordinatendarstellung von F bezeichnet.

Beweis: Da die Faser von $\Lambda^n T^*M$ an jedem Punkt durch $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ aufgespannt wird, genügt es zu zeigen, dass beide Seiten von (9.6) dasselbe ergeben, wenn sie auf $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ angewandt werden. Nach Lemma 9.18 gilt

$$F^*(u dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n) = (u \circ F) dF^1 \wedge \dots \wedge dF^n.$$

Proposition 9.17 (e) zeigt weiters, dass

$$dF^1 \wedge \dots \wedge dF^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = \det \left(dF^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right) = \det \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i} \right).$$

Damit ergibt sich die linke Seite von (9.6) nach Anwendung auf $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ also zu $(u \circ F) \det DF$. Die rechte Seite von (9.6) ergibt dasselbe Ergebnis, da $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n) = 1$. ■

Korollar 9.20 *Sind $(U, (x^i))$ und $(\bar{U}, (\bar{x}^j))$ überlappende glatte Karten auf M , dann gilt auf $U \cap \bar{U}$,*

$$d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^n = \det \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Beweis: Anwendung von Proposition 9.19, wobei F die Identität auf $U \cap \bar{U}$ ist, und wir die Koordinaten (x^i) im Definitionsbereich und (\bar{x}^j) im Wertebereich verwenden, liefert die Behauptung. ■

Als nächstes wollen wir einen sehr wichtigen Differentialoperator auf glatten Formen, die äußere Ableitung, definieren, die eine Verallgemeinerung des Differentials einer Funktion ist. Als Motivation erinnern wir zunächst an die notwendige Bedingung dafür, dass zu einer gegebenen 1-Form ω eine Funktion existiert, sodass $\omega = df$: Es muss in jedem glatten Koordinatensystem

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = 0 \quad (9.7)$$

gelten, d.h. ω muss geschlossen sein. Um zu einer koordinatenfreien Interpretation dieser Bedingung zu kommen, verwenden wir, dass (9.7) antisymmetrisch in den Indizes i und j ist und daher als ij -Komponente einer 2-Form $d\omega$ interpretiert werden kann

$$d\omega = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j. \quad (9.8)$$

Damit ist ω also geschlossen, wenn $d\omega = 0$.

Wir wollen nun Formel (9.7) auf allgemeine k -Formen verallgemeinern und zeigen, dass es zu jeder Mannigfaltigkeit einen Differentialoperator $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ gibt mit $d(d\omega) = 0$ für alle ω . Damit ist bei gegebener k -Form ω eine notwendige Bedingung für die Existenz einer $(k-1)$ -Form η mit $\omega = d\eta$, dass $d\omega = 0$.

Die Definition des Operators d in Koordinaten ist leicht anzugeben:

$$d \left(\sum_J \omega_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \right) = \sum_J d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}. \quad (9.9)$$

Bemerkungen.

- (a) Unter Verwendung von $dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$ folgt, dass sich für eine 1-Form ω Formel (9.9) zu (9.8) reduziert.
- (b) Ist f eine glatte 0-Form, also eine reellwertige glatte Funktion, dann reduziert sich (9.9) genau zum Differential von f :

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Der Beweis, dass die Definition (9.9) koordinatenunabhängig ist, benötigt etwas Arbeit und ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 9.21 *Für jede glatte Mannigfaltigkeit M gibt es eindeutig bestimmte lineare Abbildungen $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ definiert für jedes $k \geq 0$, die die folgenden Eigenschaften haben:*

- (i) *Ist $f \in C^\infty(M)$, dann ist df das Differential von f , also*

$$df(X) = Xf.$$

- (ii) *Sind $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega^l(M)$, dann gilt*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

- (iii) $d \circ d = 0$.

Der Operator d heißt äußere Ableitung und hat außerdem folgende Eigenschaften:

- (a) Bezüglich beliebiger glatter Koordinaten, ist d gegeben durch (9.9).
- (b) d ist lokal definiert, d.h. ist $\omega = \omega'$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$, dann ist $d\omega = d\omega'$ auf U .
- (c) d vertauscht mit Einschränkungen: Ist $U \subseteq M$ eine offene Menge, dann gilt

$$d(\omega|_U) = (d\omega)|_U.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass M durch eine einzelne glatte Karte überdeckt wird. Es seien (x^1, \dots, x^n) globale glatte Koordinaten auf M . Wir definieren nun $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ durch (9.9). Die so definierte Abbildung ist offenbar linear und erfüllt (i). Zum Beweis von (ii) und (iii) müssen wir zunächst zeigen, dass d die Beziehung $d(f dx^I) = df \wedge dx^I$ für jeden Multiindex nicht bloß aufsteigende erfüllt. Hier und im Folgenden verwenden wir die Abkürzung $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Hat I einen doppelten Index, dann ist offenbar $d(f dx^I) = df \wedge dx^I = 0$. Ansonsten, sei σ die Permutation, die I zu einem aufsteigenden Multiindex macht. Dann gilt

$$d(f dx^I) = (\text{sgn } \sigma) d(f dx^J) = (\text{sgn } \sigma) df \wedge dx^J = df \wedge dx^I.$$

Für den Beweis von (ii) genügt es aufgrund der Linearität von d , Formen der Gestalt $\omega = f dx^I$ und $\eta = g dx^J$ zu betrachten. Es gilt dann

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d((f dx^I) \wedge (g dx^J)) = d(fg dx^I \wedge dx^J) = (g df + f dg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (df \wedge dx^I) \wedge (g dx^J) + (-1)^k (f dx^I) \wedge (dg \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \end{aligned}$$

wobei $(-1)^k$ aus der Gleichung $dg \wedge dx^I = (-1)^k dx^I \wedge dg$ folgt. Hier verwenden wir, dass dg eine 1-Form und dx^I eine k -Form ist.

Eigenschaft (iii) beweisen wir zunächst für den Spezialfall einer 0-Form. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall einer k -Form verwenden wir nun den Fall $k = 0$ und (ii) zur Berechnung von

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_J' d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}\right) \\ &= \sum_J' d(d\omega_J) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} + \sum_J' \sum_{i=1}^k (-1)^i d\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge d(dx^{j_i}) \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, dass für Mannigfaltigkeiten die durch eine einzelne Karte überdeckt werden ein Operator d existiert, der die Eigenschaften (i), (ii), und (iii) hat. Die Eigenschaften (a), (b), (c) folgen unmittelbar aus der Definition, zusammen mit der Bemerkung, dass jede offene Teilmenge von M durch eine einzelne Karte überdeckt werden kann, wenn dies für M möglich ist.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit von d zu beweisen. Angenommen es existiert ein weiterer Operator $\bar{d} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, der (i), (ii) und (iii) erfüllt. Es sei $\omega = \sum_J' \omega_J dx^J \in \Omega^k(M)$ beliebig. Aus der Linearität von \bar{d} und (ii) folgt dann,

$$\begin{aligned} \bar{d}\omega &= \bar{d} \left(\sum_J' \omega_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \right) \\ &= \sum_J' \bar{d}\omega_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} + (-1)^0 \sum_J' \omega_J \bar{d}(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}). \end{aligned}$$

Anwendung von (ii) zeigt, dass der letzte Term in eine Summe entwickelt werden kann, bei der jeder Summand einen Faktor der Form $\bar{d}(dx^{j_i})$ enthält. Nach (i) sind diese Faktoren gleich $\bar{d}(\bar{d}x^{j_i})$ und damit Null nach (iii). Da jede Komponentenfunktion ω_J glatt ist, folgt aus (i), dass $\bar{d}\omega_J = d\omega_J$ und daher $\bar{d}\omega = d\omega$ ist. Dies beweist den Satz für Mannigfaltigkeiten, die durch eine globale Karte überdeckt werden.

Sei nun M eine beliebige glatte Mannigfaltigkeit. Auf jeder Koordinatenumgebung $U \subseteq M$, liefert der erste Teil des Beweises einen eindeutig bestimmten linearen Operator d_U der glatte k -Formen auf glatte $(k+1)$ -Formen abbildet und (i)-(iii) erfüllt. Auf der Menge $U \cap U'$ wo zwei Karten überlappen, erfüllen nach (c) die Einschränkungen von $d_U\omega$ und $d_{U'}\omega$ auf $U \cap U'$ die Beziehung

$$(d_U\omega)|_{U \cap U'} = d_{U \cap U'}\omega = (d_{U'}\omega)|_{U \cap U'}.$$

Wir können daher $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ definieren, indem wir für beliebiges $p \in M$ den Wert von $d\omega$ an p gleich $(d\omega)_p = d_U(\omega|_U)_p$ setzen, wobei U eine beliebige glatte Kartenumgebung ist, die p enthält. Der so definierte Operator erfüllt dann (i)-(iii) und (a)-(c). Es bleibt also nur noch die Eindeutigkeit von d zu beweisen.

Wir nehmen wieder an $\bar{d} : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ sei ein weiterer linearer Operator, der (i)-(iii) erfüllt. Als erstes zeigen wir, dass \bar{d} dann lokal definiert ist, d.h. Eigenschaft (b) besitzt. Dazu sei $\eta = \omega - \omega'$. Wir wollen zeigen, dass $\bar{d}\eta = 0$ auf U , wenn η auf U verschwindet. Es sei $p \in U$ beliebig und $\varphi \in C^\infty(M)$ eine glatte Bumpfunktion, die in einer Umgebung von p identisch 1 ist und deren Träger in U enthalten ist. Dann ist $\varphi\eta \equiv 0$ auf M und daher

$$0 = \bar{d}(\varphi\eta)_p = d\varphi_p \wedge \eta_p + \varphi(p)\bar{d}\eta_p = \bar{d}\eta_p,$$

da $\varphi \equiv 1$ in einer Umgebung von p . Da $p \in U$ beliebig war, folgt $\bar{d}\eta = 0$ auf U .

Es sei nun U eine beliebige Koordinatenumgebung einer glatten Karte für M . Für jedes k , definieren wir einen Operator $\bar{d}_U : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ wie folgt: Für eine k -Form $\omega \in \Omega^k(U)$ und beliebiges $p \in U$ wähle eine Fortsetzung von ω zu einer globalen k -Form $\bar{\omega} \in \Omega^k(M)$, die mit ω in einer Umgebung von p übereinstimmt (Existenz einer solchen Fortsetzung ist ein Übungsbeispiel) und definiere

$$(\bar{d}_U\omega)_p = (\bar{d}\bar{\omega})_p.$$

Da \bar{d} lokal definiert ist, ist diese Definition unabhängig von der gewählten Fortsetzung. Da \bar{d} Eigenschaften (i)-(iii) hat, folgt unmittelbar, dass auch \bar{d}_U diese Eigenschaften besitzt. Nach der im ersten Teil des Beweises gezeigten Eindeutigkeit folgt aber nun $\bar{d}_U = d_U$. Ist daher speziell ω die Einschränkung auf U einer glatten k -Form $\bar{\omega}$ auf M , dann folgt

$$d_U(\bar{\omega}|_U) = \bar{d}_U(\bar{\omega}|_U) = (\bar{d}\bar{\omega})|_U,$$

womit \bar{d} mit dem Operator d übereinstimmt. ■

Bemerkung.

- (a) Ist $A = \bigoplus_k A^k$ eine graduierte Algebra, so sagen wir eine lineare Abbildung $T : A \rightarrow A$ hat Grad m , wenn $T(A^k) \subseteq A^{k+m}$ für jedes k . T heißt eine Antiderivation, wenn $T(xy) = (Tx)y + (-1)^k xT(y)$ wann immer $x \in A^k$ und $y \in A^l$. Die Aussage von Satz 9.21 kann daher wie folgt zusammengefasst werden: Das Differential kann auf eindeutige Weise zu einer Antiderivation auf $\Omega^*(M)$ fortgesetzt werden, deren Grad 1 ist und deren Quadrat verschwindet.

Beispiele.

- (a) Es sei ω eine allgemeine glatte 1-Form auf \mathbb{R}^3 , also

$$\omega = P dx + Q dy + R dz$$

mit glatten Funktionen P, Q, R . Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz. \end{aligned}$$

- (b) Für eine allgemeine 2-Form auf \mathbb{R}^3

$$\omega = \alpha dx \wedge dy + \beta dx \wedge dz + \gamma dy \wedge dz$$

ergibt sich

$$d\omega = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Man nennt eine glatte Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$. Die k -Form ω heißt *exakt*, wenn es eine glatte $(k-1)$ -Form η auf M gibt mit $\omega = d\eta$.

Bemerkung.

- (a) Da $d \circ d = 0$, ist jede exakte Form auch geschlossen. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht!

Eine weitere wichtige Eigenschaft der äußeren Ableitung ist ihre Verträglichkeit mit Pullbacks.

Lemma 9.22 *Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Ist $G : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, dann gilt für alle $\omega \in \Omega^k(N)$*

$$G^*(d\omega) = d(G^*\omega). \quad (9.10)$$

Beweis: Es sei $\omega \in \Omega^k(N)$ beliebig. Da d lokal definiert ist, genügt es (9.10) in einer Umgebung eines beliebigen Punktes auf M zu beweisen. Bezüglich glatter Koordinaten können wir ω als Summe von Termen der Form $f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ darstellen. Aufgrund der Linearität des Pullbacks und der äußeren Ableitung genügt es daher (9.10) für solche Formen nachzuweisen. Es gilt dann einerseits

$$\begin{aligned} G^*d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= G^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= d(f \circ G) \wedge d(x^{i_1} \circ G) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ G) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} dG^*(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) &= d((f \circ G)d(x^{i_1} \circ G) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ G)) \\ &= d(f \circ G) \wedge d(x^{i_1} \circ G) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ G). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Zusätzlich zur Koordinatendarstellung (9.9) der äußeren Ableitung gibt es noch eine weitere oft nützliche Darstellung von d die koordinatenunabhängig ist.

Proposition 9.23 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^k(M)$. Für beliebige glatte Vektorfelder X_1, \dots, X_{k+1} auf M gilt*

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq k+1} (-1)^{i-1} X_i \left(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega \left([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1} \right), \end{aligned}$$

wobei die 'Dächer' ausgelassene Argumente andeuten.

Da der Beweis von Proposition 9.23 technisch mühsam ist, werden wir aus Zeitgründen nur den wichtigsten Spezialfall für 1-Formen beweisen:

Korollar 9.24 *Für eine glatte 1-Form ω und glatte Vektorfelder X und Y gilt*

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Beweis: Da jede glatte 1-Form lokal als Summe von Termen der Form $u dv$ dargestellt werden kann, mit glatten Funktionen u und v , genügt es diesen Fall zu betrachten. Es seien daher $\omega = u dv$ und X, Y glatte Vektorfelder. Dann gilt einerseits

$$d(udv)(X, Y) = du \wedge dv(X, Y) = du(X)dv(Y) - dv(X)du(Y) = XuYv - XvYu$$

und andererseits

$$\begin{aligned} X(u \, dv(Y)) - Y(u \, dv(X)) - u \, dv([X, Y]) &= X(u Y v) - Y(u X v) - u [X, Y] v \\ &= (X u Y v + u X Y v) - (Y u X v + u Y X v) - u (X Y v - Y X v) = X u Y v - X v Y u. \end{aligned}$$

■

Als eine erste Anwendung von Korollar 9.24, zeigen wir, dass die äußere Ableitung in gewissem Sinn dual zur Lie Klammer ist. Dazu benötigen wir noch die folgende

Definition. Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen. Ein geordnetes Tupel (E_1, \dots, E_n) von Vektorfeldern auf U heißt ein *lokaler Frame* für M über U , wenn $\{E_i|_p\}$ eine Basis von $T_p M$ in jedem Punkt $p \in U$ bildet. Ist $U = M$, dann spricht man von einem *globalen Frame*. Ein geordnetes Tupel $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ heißt ein *lokaler Koframe*, wenn $\{\varepsilon^i|_p\}$ eine Basis von $T_p^* M$ in jedem Punkt $p \in U$ bildet. Zu jedem lokalen Frame (E_i) gibt es einen eindeutig bestimmten *dualen Koframe* (ε^i) mit $\varepsilon^i(E_j) = \delta_j^i$.

Korollar 9.25 *Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit, $\{E_i\}$ ein glatter lokaler Frame für M und $\{\varepsilon^i\}$ der dazu duale Koframe. Es seien c_{jk}^i , $i = 1, \dots, n$, die Komponentenfunktionen der Lie Klammer $[E_j, E_k]$ dieses Frames, also*

$$[E_j, E_k] = \sum_i c_{jk}^i E_i.$$

Dann ist die äußere Ableitung jeder 1-Form ε^i gegeben durch

$$d\varepsilon^i = - \sum_{j < k} c_{jk}^i \varepsilon^j \wedge \varepsilon^k.$$

Beweis: Übungsbeispiel.

■

10 Orientierungen

Wir haben im letzten Kapitel schon angedeutet, dass Differentialformen die Objekte sind, die wir auf eine invariante Art und Weise auf Mannigfaltigkeiten integrieren können. Bevor wir dies näher ausführen, müssen wir uns noch um ein technisches Problem kümmern, das auftritt, wenn wir den Wert von k -Formen als ein „signiertes Volumen“ auffassen. Die auftretenden Vorzeichen bereiten nämlich im Allgemeinen Schwierigkeiten aus dem einfachen Grund, dass die Transformationsregel für n -Formen bei einem Koordinatenwechsel die Determinante der Jacobi-matrix enthält, während die Substitutionsregel von gewöhnlichen Integralen den Absolutbetrag dieser Determinante involviert. Das Hilfsmittel um dieses Problem zu beheben ist der Begriff der Orientierung, der es erlaubt uns auf Koordinaten-transformationen mit positiver Determinante zu beschränken.

Definition. Es sei V ein Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geordneten Basen von V , indem wir sagen (E_1, \dots, E_n) ist äquivalent mit $(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n)$ wenn die beiden Basen *gleichorientiert* sind, wenn also die Transformationsmatrix (B_i^j) , definiert durch $E_i = \sum_j B_i^j \bar{E}_j$, positive Determinante besitzt. Offenbar gibt es für diese Relation genau zwei Äquivalenzklassen auf der Menge aller geordneten Basen von V .

Wir definieren eine *Orientierung* von V als eine Äquivalenzklasse geordneter Basen. Ist (E_1, \dots, E_n) eine beliebige geordnete Basis von V , so bezeichnen wir die dadurch bestimmte Orientierung mit $[E_1, \dots, E_n]$. Ist V ein orientierter Vektorraum, dann heißt jede geordnete Basis (E_1, \dots, E_n) in der gewählten Orientierung, *positiv orientiert* und jede Basis, die nicht in der gewählten Orientierung liegt, *negativ orientiert*.

Bemerkung und Beispiel.

- (a) Ist V ein 0-dimensionaler Vektorraum, dann definiert man eine Orientierung auf V einfach als eine Wahl von $+1$ oder -1 .
- (b) Die Orientierung $[e_1, \dots, e_n]$ von \mathbb{R}^n , die durch die Standardbasis bestimmt wird, heißt die Standardorientierung.

Das folgende Lemma stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen Orientierungen und alternierenden Tensoren her.

Lemma 10.1 *Es sei V ein Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ und ω ein von Null verschiedenes Element von $\Lambda^n(V^*)$. Dann ist die Menge der geordneten Basen (E_1, \dots, E_n) mit $\omega(E_1, \dots, E_n) > 0$ eine Orientierung von V .*

Beweis: Es sei \mathcal{O}_ω die Menge aller geordneten Basen von V auf denen ω positiv ist. Wir müssen zeigen, dass \mathcal{O}_ω genau eine der beiden Äquivalenzklassen ist. Dazu seien (E_i) und (\bar{E}_j) zwei beliebige geordnete Basen von V und $B : V \rightarrow V$ die Transformationsmatrix mit $BE_j = \bar{E}_j$. Nach Korollar 9.15 gilt dann

$$\omega(\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n) = \omega(BE_1, \dots, BE_n) = \det(B)\omega(E_1, \dots, E_n).$$

Es folgt, dass (E_i) und (\overline{E}_j) genau dann gleichorientiert sind, wenn $\omega(E_1, \dots, E_n)$ und $\omega(\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_n)$ dasselbe Vorzeichen haben. Damit ist aber \mathcal{O}_ω genau eine der beiden Äquivalenzklassen. ■

Ist V ein orientierter Vektorraum und ω ein n -Kovektor, der die Orientierung von V bestimmt, so nennen wir ω einen *positiv orientierten n -Kovektor*.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir definieren eine *punktweise Orientierung* von M als eine Wahl einer Orientierung in jedem Tangentialraum. Dieses Konzept ist für sich genommen natürlich noch nicht besonders nützlich, da die Orientierungen von Tangentialräumen von nahe beieinander liegenden Punkten nichts miteinander zu tun haben müssen. Damit eine punktweise Orientierung von M eine Beziehung zur glatten Struktur hat, benötigen wir noch eine zusätzliche Bedingung.

Definition. Es sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit versehen mit einer punktweisen Orientierung. Wir sagen ein lokaler Frame (E_i) für M über einer offenen Menge $U \subseteq M$ ist *positiv orientiert*, wenn $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ eine positiv orientierte Basis von $T_p M$ in jedem Punkt $p \in U$ bilden. Ein *negativ orientierter* Frame ist analog definiert.

Eine punktweise Orientierung von M heißt *stetig*, wenn jeder Punkt von M im Definitionsbereich eines positiv orientierten lokalen Frames liegt. Eine *Orientierung* von M ist eine stetige punktweise Orientierung. Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* ist eine glatte Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung. Wir nennen M *orientierbar*, wenn es eine Orientierung für M gibt und sonst *nicht orientierbar*.

Bemerkungen und Beispiele.

- (a) Ist M eine null-dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist eine Orientierung von M einfach eine Wahl von ± 1 für jeden Punkt von M . Die Stetigkeitsforderung ist in diesem Fall überflüssig. Damit ist jede null-dimensionale Mannigfaltigkeit orientierbar.
- (b) Ist M eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$, dann ist jeder lokale Frame mit zusammenhängendem Definitionsbereich entweder positiv oder negativ orientiert.
- (c) Nicht jede Mannigfaltigkeit ist orientierbar.
- (d) Jede nicht orientierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine orientierbare 2-blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit, die sogenannte Orientierungsüberlagerung.

Die folgenden beiden Resultate geben nützliche Kriterien an, um Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten zu spezifizieren. Dazu benötigen wir noch folgende

Definition. Eine glatte Karte auf einer orientierten Mannigfaltigkeit heißt *positiv orientiert*, wenn der Koordinatenframe $(\partial/\partial x^i)$ positiv orientiert ist und *negativ orientiert*, wenn der Koordinatenframe negativ orientiert ist. Eine Familie glatter Karten $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ heißt *gleichorientiert*, wenn für alle α, β die Jacobimatrix des Kartenwechsels $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ positive Determinante auf $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ hat.

Proposition 10.2 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit positiver Dimension. Ist $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M durch gleichorientierte glatte Karten, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Orientierung von M mit der Eigenschaft, dass jede Karte orientiert ist. Ist umgekehrt M orientiert, dann bildet die Menge aller orientierten glatten Karten eine gleichorientierte Überdeckung von M .*

Beweis: Es sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ eine offene Überdeckung von M durch gleichorientierte glatte Karten. Dann hat für jedes $p \in M$ die Transformationsmatrix zwischen Koordinatenbasen bezüglich je zwei beliebiger Karten positive Determinante. Das heißt aber, dass die Koordinatenbasen bezüglich aller gegebenen Karten dieselbe Orientierung auf $T_p M$ haben. Dies definiert eine punktweise Orientierung auf M . Da jeder Punkt von M im Definitionsbereich von mindestens einer Karte liegt und der zugehörige Koordinatenframe positiv orientiert ist, ist diese punktweise Orientierung auch stetig. Für den Beweis der Umkehrung argumentiert man analog. ■

Proposition 10.3 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$. Jede nicht-verschwindende n -Form ω auf M bestimmt eine eindeutige Orientierung von M , sodass ω positiv orientiert ist in jedem Punkt. Ist umgekehrt M orientiert, dann gibt es eine glatte nicht-verschwindende n -Form auf M , die in jedem Punkt positiv orientiert ist.*

Beweisskizze: Wir beweisen nur eine Richtung. Es sei ω eine nicht-verschwindende n -Form auf M . Nach Lemma 10.1 bestimmt ω eine punktweise Orientierung auf M . Es bleibt zu zeigen, dass diese stetig ist. Dazu seien (x^i) beliebige glatte lokale Koordinaten auf einer zusammenhängenden Umgebung $U \subseteq M$. Dann hat ω auf U die Koordinatendarstellung $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ für eine geeignete stetige Funktion f . Da ω nicht verschwindet, ist auch f stets ungleich Null und daher

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = f \neq 0$$

für alle Punkte aus U . Da U zusammenhängend ist, folgt, dass dieser Ausdruck entweder stets positiv oder stets negativ ist auf U . Damit ist aber die Karte entweder positiv oder negativ orientiert. Im Falle, dass sie negativ orientiert ist, können wir x^1 durch $-x^1$ ersetzen, um neue Koordinaten zu erhalten für die der Koordinatenframe positiv orientiert ist. Insgesamt ist dann die durch ω bestimmte punktweise Orientierung stetig. ■

Bemerkungen.

- (a) Jede offene Teilmenge einer orientierbaren Mannigfaltigkeit ist orientierbar und das Produkt von orientierbaren Mannigfaltigkeiten ist auch orientierbar.
- (b) Eine nicht-verschwindende n -Form auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension n wird Orientierungsform genannt. Ist M eine orientierte Mannigfaltigkeit und ω eine Orientierungsform auf M , die die gegebene Orientierung bestimmt, so sagen wir ω ist positiv orientiert. Sind ω und $\bar{\omega}$ zwei positiv orientierte glatte n -Formen auf derselben orientierten Mannigfaltigkeit M , dann gilt $\bar{\omega} = f \omega$ für eine strikt positive glatte Funktion f .

Definition. Es seien M und N orientierte glatte Mannigfaltigkeiten positiver Dimension und $F : M \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Wir nennen F eine Orientierung erhaltende Abbildung, wenn dF_p positiv orientierte Basen von T_pM auf positiv orientierte Basen in $T_{F(p)}N$ abbildet für jedes $p \in M$. Die Abbildung F ist eine die Orientierung umkehrende Abbildung, wenn positiv orientierte Basen von T_pM auf negativ orientierte Basen von $T_{F(p)}N$ abgebildet werden.

Bemerkung.

- (a) Eine glatte Abbildung $F : M \rightarrow N$ ist genau dann eine die Orientierung erhaltende (umkehrende) Abbildung, wenn ihre Jacobi-Matrix bezüglich beliebiger orientierter glatter Karten für M und N positive (negative) Determinante hat.

Proposition 10.4 *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit für die es einen glatten globalen Frame gibt, dann ist M orientierbar.*

Beweis: Es sei (E_1, \dots, E_n) ein globaler glatter Frame von M . Wir definieren eine punktweise Orientierung von M indem wir $(E_1|_p, \dots, E_n|_p)$ an jedem Punkt $p \in M$ als positiv orientiert deklarieren. Diese punktweise Orientierung ist stetig, da jeder Punkt von M im Definitionsbereich des globalen orientierten Frames (E_i) liegt. ■

Beispiele.

- (a) Nach Proposition 10.4 sind der \mathbb{R}^n , die Sphäre \mathbb{S}^1 und damit auch der n -Torus \mathbb{T}^n orientierbar.
- (b) Jede Lie Gruppe ist nach Proposition 10.4 orientierbar.

Ist M eine orientierte Mannigfaltigkeit dann muss eine Untermannigfaltigkeit N von M nicht unbedingt orientierbar sein. Im Folgenden beschränken wir unsere Betrachtungen auf immersierte oder eingebettete Hyperflächen S , die zusätzliche Information mitführen, welche wir nutzen können, damit eine Orientierung von M auch eine Orientierung von S induziert.

Definition. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Wir definieren zu jedem $v \in V$ eine lineare Abbildung $i_v : \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{k-1}(V^*)$, genannt *innere Multiplikation* oder *Kontraktion*, durch

$$i_v \omega(w_1, \dots, w_{k-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{k-1}).$$

Ist ω ein 0-Kovektor, so setzen wir $i_v \omega = 0$. Anstatt $i_v \omega$ schreibt man auch $v \lrcorner \omega$.

Die innere Multiplikation teilt zwei wesentliche Eigenschaften mit der äußeren Ableitung: Beide sind Antiderivationen deren Quadrat identisch verschwindet.

Lemma 10.5 *Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $v \in V$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) $i_v \circ i_v = 0$.
- (b) i_v ist eine Antiderivation, d.h. für $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ gilt

$$i_v(\omega \wedge \eta) = (i_v \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_v \eta).$$

Beweis: Auf k -Kovektoren mit $k \geq 2$ folgt Eigenschaft (a) aus dem Umstand, dass alternierende Tensoren verschwinden, wenn zwei ihrer Argumente identisch sind. Auf 1-Kovektoren und 0-Kovektoren folgt (a), da $i_v \equiv 0$ auf 0-Kovektoren.

Da jeder alternierende Tensor als Linearkombination von äußeren Produkten von 1-Kovektoren dargestellt werden kann, genügt es zum Beweis von (b) den Fall zu behandeln, dass ω und η von dieser einfachen Bauart sind. Die Aussage (b) folgt dann unmittelbar aus der folgenden Formel für 1-Kovektoren $\omega^1, \dots, \omega^k$:

$$v \lrcorner (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v) \omega^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^k,$$

wobei das Dach wieder andeutet, dass ω^i auszulassen ist. Schreiben wir für $v = v_1$ und wenden beide Seiten auf Vektoren (v_2, \dots, v_k) an, so ist also zu beweisen, dass

$$(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) \left(\omega^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega^i} \wedge \dots \wedge \omega^k \right)(v_2, \dots, v_k).$$

Die linke Seite dieses Ausdrucks ist gerade die Determinante der Matrix \mathbb{V} deren (i, j) -Eintrag gegeben ist durch $\omega^i(v_j)$. Um die rechte Seite zu vereinfachen, sei \mathbb{V}_j^i die $(k-1) \times (k-1)$ Untermatrix von \mathbb{V} welche man erhält, indem die i te Zeile und j te Spalte gestrichen werden. Dann ist die rechte Seite

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) \det \mathbb{V}_1^i$$

und daher gleich $\det \mathbb{V}$, wie man durch Entwicklung nach der ersten Spalte sieht. ■

Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so kann die innere Multiplikation in natürlicher Weise auf Vektorfelder und Differentialformen punktweise fortgesetzt werden: Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$, so definieren wir eine $(k-1)$ -Form $X \lrcorner \omega = i_X \omega$ durch

$$(X \lrcorner \omega)_p = X_p \lrcorner \omega_p.$$

i_X ist eine Antiderivation auf $\Omega^*(M)$ vom Grad -1 deren Quadrat verschwindet.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine immersierte oder eingebettete Untermannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld *entlang* S ist eine stetige Abbildung $X : S \rightarrow TM$ mit der Eigenschaft, dass $X_p \in T_p M$ (nicht unbedingt $X_p \in T_p S$!) für jedes $p \in S$. Ein Vektor $v \in T_p M$ an einem Punkt $p \in S$ heißt *transversal* zu S , wenn $T_p M$ von v und $T_p S$ aufgespannt wird. Analog heißt ein Vektorfeld X entlang S transversal zu S , wenn X_p transversal zu S ist in jedem Punkt $p \in S$.

Proposition 10.6 *Es sei M eine orientierte glatte n -Mannigfaltigkeit, S eine immersierte Hyperfläche in M und X ein transversales Vektorfeld entlang S . Dann hat S eine eindeutig bestimmte Orientierung, sodass für jedes $p \in S$, (E_1, \dots, E_{n-1}) genau dann eine orientierte Basis von $T_p S$ ist, wenn $(X_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ eine orientierte Basis von $T_p M$ ist. Ist ω eine Orientierungsform für M , dann ist $(X \lrcorner \omega)|_S$ eine Orientierungsform für S in Bezug auf diese Orientierung.*

Beweis: Es sei ω eine Orientierungsform für M . Dann ist $\sigma = (X \lrcorner \omega)|_S$ eine $(n-1)$ -Form auf S . Um zu zeigen, dass σ eine Orientierungsform für S ist, müssen wir nachweisen, dass σ auf S nirgends verschwindet. Ist (E_1, \dots, E_{n-1}) eine beliebige Basis von $T_p S$, dann ist $(X_p, E_1, \dots, E_{n-1})$ eine Basis von $T_p M$, da X transversal ist zu S . Da ω nirgends verschwindet folgt

$$\sigma_p(E_1, \dots, E_{n-1}) = \omega_p(X_p, E_1, \dots, E_{n-1}) \neq 0.$$

Da $\sigma_p(E_1, \dots, E_{n-1}) > 0$ genau dann wenn $\omega_p(X_p, E_1, \dots, E_{n-1}) > 0$, stimmt die durch σ bestimmte Orientierung mit der in der Aussage angegebenen überein. ■

Beispiel und Bemerkung.

- (a) Die Sphäre \mathbb{S}^n ist eine Hyperfläche im \mathbb{R}^{n+1} . Das Vektorfeld $X = \sum_i x^i \partial / \partial x^i$ entlang \mathbb{S}^n ist offenbar transversal zu \mathbb{S}^n und induziert daher eine Orientierung auf \mathbb{S}^n . Diese Orientierung heißt die Standardorientierung von \mathbb{S}^n .
- (b) Nicht jede Hyperfläche besitzt ein transversales Vektorfeld. Ist die Hyperfläche $S \subseteq M$ allerdings ein reguläres Level Set einer glatten Funktion, dann ist S stets orientierbar.

Als eine wichtige Anwendung von Proposition 10.6 definieren wir im Folgenden eine kanonische Orientierung des Randes einer orientierten glatten Mannigfaltigkeit mit Rand. Dazu bemerken wir zunächst, dass eine Orientierung einer glatten Mannigfaltigkeit mit Rand genau so definiert wird, wie im Fall glatter Mannigfaltigkeiten.

Ist M eine glatte n -Mannigfaltigkeit, so heißt eine glatte, kompakte, eingebettete n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $D \subseteq M$ ein *regulärer Bereich* in M . Eine Orientierung von M induziert sofort eine Orientierung von D , indem etwa eine Orientierungsform für M auf D eingeschränkt wird. Beispiele hierfür sind die abgeschlossene Einheitskugel im \mathbb{R}^n oder die abgeschlossene obere Halbsphäre in \mathbb{S}^n .

Bevor wir uns Randorientierungen zuwenden, erinnern wir an den in den Übungen bewiesenen Umstand, dass für eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand M ihr Rand ∂M eine eingebettete Hyperfläche in M ist und jedes $p \in \partial M$ im Definitionsbereich einer glatten Randkarte (U, φ) liegt, sodass $\varphi(U \cap \partial M)$ der Schnitt $\varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n$ ist.

Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und $p \in \partial M$. Wir sagen ein Vektor $X \in T_p M$ *weist nach innen*, wenn $X \notin T_p \partial M$ und es für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ ein glattes Kurvensegment $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ gibt, sodass $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = X$. Wir sagen X *weist nach außen*, wenn $-X$ nach innen weist.

Das folgende leicht zu beweisende Lemma enthält eine einfach zu überprüfende alternative Charakterisierung von nach innen weisenden Vektoren.

Lemma 10.7 *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, $p \in \partial M$ und (x^i) beliebige glatte Randkoordinaten in einer Umgebung von p . Dann sind die nach innen weisenden Vektoren in $T_p M$ genau die Vektoren mit positiver x^n -Komponente und die nach außen weisenden Vektoren, jene mit negativer x^n -Komponente.*

Wir nennen ein Vektorfeld entlang ∂M *nach innen* oder *nach außen weisend*, wenn sein Wert diese Eigenschaft in jedem Punkt hat.

Lemma 10.8 *Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, dann gibt es ein glattes nach außen weisendes Vektorfeld entlang ∂M .*

Beweis: Wir wählen zunächst eine Überdeckung einer Umgebung von ∂M durch glatte Randkarten $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. In jeder dieser Karten ist $X_\alpha = -\partial/\partial x^n|_{\partial M \cap U_\alpha}$ ein glattes Vektorfeld entlang $\partial M \cap U_\alpha$, welches nach Lemma 10.7 nach außen weist. Es sei $\{\psi_\alpha\}$ eine der Überdeckung $\{U_\alpha \cap \partial M\}$ von ∂M untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Wir definieren ein globales Vektorfeld X entlang ∂M durch

$$X = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} X_{\alpha}.$$

Offenbar ist X ein glattes Vektorfeld entlang ∂M . Um zu zeigen, dass X nach außen weist, seien (y^1, \dots, y^n) beliebige glatte Randkoordinaten in einer Umgebung von $p \in \partial M$. Da jedes X_α nach außen weist, gilt $dy^n(X_\alpha) < 0$. Die y^n -Komponente von X an p erfüllt daher

$$dy^n(X_p) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} dy^n(X_{\alpha}|_p).$$

Diese Summe ist echt negativ, da jeder Summand nicht positiv und zumindest ein Summand negativ ist. ■

Wir können nun das für uns wichtigste Resultat über Orientierungen beweisen:

Satz 10.9 *Es sei M eine orientierte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist ∂M orientierbar und, die durch ein beliebiges nach außen weisendes Vektorfeld entlang ∂M bestimmte Orientierung, ist unabhängig von der Wahl des Vektorfeldes. Die so bestimmte Orientierung heißt die induzierte oder Stokes Orientierung von ∂M .*

Beweis: Es sei $n = \dim M$ und ω eine Orientierungsform für M . Nach Lemma 10.8 gibt es ein glattes nach außen weisendes Vektorfeld X entlang ∂M . Die $(n-1)$ -Form $(X \lrcorner \omega)|_{\partial M}$ ist daher eine Orientierungsform für ∂M nach Proposition 10.6. Damit ist ∂M orientierbar. Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Orientierung nicht von der Wahl von X abhängt. Dazu seien (x^1, \dots, x^n) glatte Randkoordinaten für M in einer Umgebung von $p \in \partial M$. Indem wir falls notwendig x^1 durch $-x^1$ ersetzen, können wir annehmen, dass die Koordinaten orientiert sind, d.h. die Form ω kann lokal dargestellt werden durch $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ für eine geeignete echt positive Funktion f . Da $x^n = 0$ entlang ∂M , zeigt man leicht, dass $dx^n|_{\partial M} \equiv 0$. Verwenden wir daher, dass i_X eine Antiderivation ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (X \lrcorner \omega)|_{\partial M} &= f \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} dx^i(X) dx^1|_{\partial M} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i}|_{\partial M} \wedge \dots \wedge dx^n|_{\partial M} \\ &= (-1)^{n-1} f dx^n(X) dx^1|_{\partial M} \wedge \dots \wedge dx^{n-1}|_{\partial M}. \end{aligned}$$

Da $dx^n(X) = X^n < 0$ ist dieser Ausdruck ein positives Vielfaches der $(n-1)$ -Form $(-1)^n dx^1|_{\partial M} \wedge \dots \wedge dx^{n-1}|_{\partial M}$. Ist \bar{X} ein beliebiges anderes nach außen weisendes Vektorfeld, dann liefert dieselbe Rechnung, dass $(\bar{X} \lrcorner \omega)|_{\partial M}$ ein positives Vielfaches derselben $(n-1)$ -Form ist und damit ein positives Vielfaches von $(X \lrcorner \omega)|_{\partial M}$. Damit bestimmen aber X und \bar{X} dieselbe Orientierung von ∂M . ■

Beispiele.

- (a) Da \mathbb{S}^n der Rand der abgeschlossenen Einheitskugel ist, liefert Satz 10.9 einen weiteren Beweis dafür, dass \mathbb{S}^n orientierbar ist. Die induzierte Orientierung von \mathbb{S}^n stimmt mit der Standardorientierung überein.
- (b) Wie oben beschrieben bestimmt die Standardorientierung des \mathbb{R}^n eine Orientierung der abgeschlossenen oberen Halbebene \mathbb{H}^n . Wir wollen nun die dadurch induzierte Orientierung von $\partial\mathbb{H}^n$ bestimmen. Dabei können wir $\partial\mathbb{H}^n$ mit \mathbb{R}^{n-1} identifizieren, wobei wir $(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \cong (x^1, \dots, x^{n-1})$ verwenden. Da das Vektorfeld $-\partial/\partial x^n$ entlang $\partial\mathbb{H}^n$ nach außen weist, ist der Standardkoordinatenframe von \mathbb{R}^{n-1} genau dann positiv orientiert für $\partial\mathbb{H}^n$, wenn $[-\partial/\partial x^n, \partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^{n-1}]$ die Standardorientierung von \mathbb{R}^n ist. Diese Orientierung erfüllt offenbar

$$[-\partial/\partial x^n, \partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^{n-1}] = (-1)^n [\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^{n-1}, \partial/\partial x^n].$$

Damit stimmt die induzierte Orientierung von $\partial\mathbb{H}^n$ genau dann mit der Standardorientierung von \mathbb{R}^{n-1} überein, wenn n gerade ist. Speziell sind die Standardkoordinaten von $\partial\mathbb{H}^n \approx \mathbb{R}^{n-1}$ genau dann positiv orientiert, wenn n gerade ist. Dieser Umstand wird beim Beweis des Satzes von Stokes eine wichtige Rolle spielen.

Das nächste Resultat liefert ein Kriterium, um zu überprüfen ob eine lokale Parametrisierung des Randes einer Mannigfaltigkeit mit Rand die Orientierung erhält.

Lemma 10.10 *Es sei M eine glatte orientierte n -Mannigfaltigkeit mit Rand und $F : U \rightarrow M$ eine glatte lokale Parametrisierung von ∂M , wobei U eine zusammenhängende offene Teilmenge des \mathbb{R}^{n-1} ist. Erlaubt für geeignetes $b < c \in \mathbb{R}$ die Abbildung F eine Fortsetzung zu einer glatten Einbettung $\bar{F} : (b, c] \times U \rightarrow M$ mit $\bar{F}(c, x) = F(x)$, dann ist F genau dann eine die Orientierung von ∂M erhaltende Abbildung (mit induzierter Orientierung), wenn \bar{F} die Orientierung von M erhält.*

Beweis: Es sei $a \in U$ beliebig und $p = F(a) = \bar{F}(c, a) \in \partial M$. Die Voraussetzung, dass \bar{F} eine Einbettung ist, impliziert, dass $d\bar{F}_{(c,a)} : (T_c\mathbb{R} \oplus T_a\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow T_p M$ bijektiv ist. Da die Einschränkung von $d\bar{F}_{(c,a)}$ auf $T_a\mathbb{R}^{n-1}$ mit $dF_x : T_a\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow T_p\partial M$ übereinstimmt, ist dF_x selbst injektiv und es folgt, dass $d\bar{F}(\partial/\partial s|_{(c,a)}) \notin T_p\partial M$. Hier bezeichnet s die Koordinate für $(b, c]$.

Wir definieren nun eine Kurve $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ durch

$$\gamma(t) = \bar{F}(c - t, a).$$

Diese Kurve erfüllt offenbar $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = -d\bar{F}(\partial/\partial s|_{(c,a)}) \notin T_p\partial M$. Es folgt, dass $-d\bar{F}(\partial/\partial s|_{(c,a)})$ nach innen weist und daher $d\bar{F}(\partial/\partial s|_{(c,a)})$ nach außen weist an p , und daher aus Stetigkeitsgründen auf ganz $F(U)$.

Nach Definition der induzierten Orientierung für ∂M haben wir damit folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
 & \bar{F} \text{ erhält die Orientierung von } M \\
 \iff & (d\bar{F}(\partial/\partial s), d\bar{F}(\partial/\partial x^1), \dots, d\bar{F}(\partial/\partial x^{n-1})) \text{ ist positiv orientiert in } TM \\
 \iff & (dF(\partial/\partial x^1), \dots, dF(\partial/\partial x^{n-1})) \text{ ist positiv orientiert in } T\partial M \\
 \iff & F \text{ erhält die Orientierung von } \partial M
 \end{aligned}$$

womit die Behauptung des Lemmas gezeigt ist. ■

Beispiel.

Kugelkoordinaten liefern eine glatte lokale Parametrisierung von \mathbb{S}^2 : Es sei U das offene Rechteck $(0, \pi) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi).$$

Um zu überprüfen, ob F die Orientierung von \mathbb{S}^2 erhält, können wir verwenden, dass F Einschränkung der 3-dimensionalen Kugelparametrisierung $\bar{F} : (0, 1] \times U \rightarrow \text{cl } \mathbb{B}^3$ definiert durch

$$\bar{F}(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$$

ist. Da $\bar{F}(1, \theta, \rho) = F(\theta, \rho)$ sind die Voraussetzungen von Lemma 10.10 erfüllt. Die Determinante der Jacobimatrix von \bar{F} berechnet sich zu $\rho^2 \sin \varphi$ und ist daher positiv auf $(0, 1] \times U$. Nach Lemma 10.10 erhält F daher die Orientierung von \mathbb{S}^2 .

11 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Wir kommen nun schließlich zur Integration von Differentialformen über orientierte Mannigfaltigkeiten. Dabei beginnen wir mit der Definition des Integrals einer Form über Teilmengen des \mathbb{R}^n . Im Folgenden verstehen wir unter einem *Integrationsbereich* im \mathbb{R}^n eine beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n dessen Rand Lebesguemaß Null hat.

Definition. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Integrationsbereich und ω eine n -Form auf D . Dann kann ω in der Form $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ dargestellt werden, für eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren das *Integral* von ω über D durch

$$\int_D \omega = \int_D f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_D f dx^1 \cdots dx^n.$$

Ist U eine beliebige offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , so benötigen wir zur Definition des Integrals einer n -Form mit kompaktem Träger in U das folgende Hilfsresultat.

Lemma 11.1 *Es sei $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei U offen und K kompakt ist. Dann gibt es einen kompakten Integrationsbereich D mit $K \subseteq D \subseteq U$.*

Beweis: Für jedes $p \in K$ gibt es eine offene Kugel, die p enthält und deren Abschluss in U enthalten ist. Da K kompakt ist, überdecken schon endlich viele solcher offenen Kugeln K . Da der Rand jeder dieser Kugeln Lebesguemaß Null hat, ist jede dieser Kugeln ein Integrationsbereich. Daher ist $D = \text{cl } B_1 \cup \cdots \cup \text{cl } B_m$ der gesuchte Integrationsbereich. ■

Es sei nun $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine n -Form mit kompaktem Träger in U . Dann definieren wir

$$\int_U \omega = \int_D \omega,$$

wobei D ein beliebiger Integrationsbereich mit $\text{supp } \omega \subseteq D \subseteq U$ ist. Es ist leicht zu zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl von D abhängt. Ist V eine offene Teilmenge von \mathbb{H}^n und ω eine n -Form mit kompaktem Träger in V , so definieren wir analog

$$\int_V \omega = \int_{D \cap \mathbb{H}^n} \omega,$$

wobei D wieder ein beliebiger Integrationsbereich mit $\text{supp } \omega \subseteq D \subseteq U$ ist.

Das folgende Resultat motiviert die oben gegebenen Definitionen:

Proposition 11.2 *Es seien D und E kompakte Integrationsbereiche im \mathbb{R}^n und ω eine n -Form auf E . Ist $G : D \rightarrow E$ eine glatte Abbildung, deren Einschränkung auf $\text{int } D$ ein die Orientierung erhaltender oder umkehrender Diffeomorphismus auf $\text{int } E$ ist, dann gilt*

$$\int_E \omega = \begin{cases} \int_D G^* \omega & \text{wenn } G \text{ die Orientierung erhält,} \\ - \int_D G^* \omega & \text{wenn } G \text{ die Orientierung umkehrt.} \end{cases}$$

Beweis: Es bezeichne (y^1, \dots, y^n) die Standardkoordinaten für E und (x^1, \dots, x^n) jene für D . Wir nehmen zunächst an, dass G die Orientierung erhält. Schreiben wir ω in der Form $\omega = f dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$, so folgt aus der Substitutionsregel und Proposition 9.19,

$$\begin{aligned} \int_E \omega &= \int_E f dy^1 \cdots dy^n = \int_D (f \circ G) |\det DG| dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_D (f \circ G)(\det DG) dx^1 \cdots dx^n = \int_D (f \circ G)(\det DG) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_D G^* \omega. \end{aligned}$$

Ist G eine die Orientierung umkehrende Abbildung, so führt dieselbe Rechnung auf das behauptete Ergebnis, da ein Minuszeichen dazukommt, wenn der Absolutbetrag von $\det DG$ weggelassen wird. ■

Korollar 11.3 *Es seien U, V offene Teilmengen des \mathbb{R}^n , $G : U \rightarrow V$ ein die Orientierung erhaltender Diffeomorphismus und ω eine n -Form auf V mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_V \omega = \int_U G^* \omega.$$

Beweis: Es sei $E \subseteq V$ ein kompakter Integrationsbereich, der $\text{supp } \omega$ enthält. Da G ein Diffeomorphismus ist, ist auch $D = G^{-1}(E) \subseteq U$ ein Integrationsbereich, der $\text{supp } G^* \omega$ enthält. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 11.2. ■

Wir sind nun soweit das Integral einer Differentialform über orientierte glatte Mannigfaltigkeiten zu definieren.

Definition. Es sei M eine glatte orientierte n -Mannigfaltigkeit und ω eine n -Form auf M , deren kompakter Träger in einer einzelnen positiv orientierten glatten Karte (U, φ) enthalten ist. Dann ist $(\varphi^{-1})^* \omega$ eine n -Form mit kompaktem Träger auf der offenen Menge $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ und wir definieren das *Integral* von ω über M durch

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

Lemma 11.4 *Das Integral $\int_M \omega$ ist unabhängig von der Wahl der orientierten glatten Karte, deren Definitionsbereich $\text{supp } \omega$ enthält.*

Beweis: Es seien $(U, \varphi), (\bar{U}, \bar{\varphi})$ zwei positiv orientierte glatte Karten die den Träger von ω enthalten. Da $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ ein die Orientierung erhaltender Diffeomorphismus von $\varphi(U \cap \bar{U})$ auf $\bar{\varphi}(U \cap \bar{U})$ ist, folgt aus Korollar 11.3,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\varphi}(\bar{U})} (\bar{\varphi}^{-1})^* \omega &= \int_{\bar{\varphi}(U \cap \bar{U})} (\bar{\varphi}^{-1})^* \omega = \int_{\varphi(U \cap \bar{U})} (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})^* (\bar{\varphi}^{-1})^* \omega \\ &= \int_{\varphi(U \cap \bar{U})} (\varphi^{-1})^* (\bar{\varphi})^* (\bar{\varphi}^{-1})^* \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega. \end{aligned}$$

Damit ist $\int_M \omega$ unabhängig von der Wahl der Karte, die $\text{supp } \omega$ enthält. ■

Bemerkung.

- (a) Ist M eine orientierte n -Mannigfaltigkeit mit Rand und ω eine n -Form auf M , deren kompakter Träger in einer einzelnen Koordinatenumgebung enthalten ist, so bleibt die Definition von $\int_M \omega$ und die Aussage von Lemma 11.4, sowie deren Beweis, praktisch unverändert. Die Integrale müssen nur wie oben beschrieben über offene Teilmengen von \mathbb{H}^n berechnet werden.

Um das Integral einer n -Form über eine ganze Mannigfaltigkeit zu definieren, verwenden wir nun wieder Zerlegungen der Eins.

Definition. Es sei M eine orientierte glatte n -Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) und ω eine n -Form auf M mit kompaktem Träger. Es sei $\{(U_i, \varphi_i)\}$ eine endliche Überdeckung von $\text{supp } \omega$ durch positiv orientierte glatte Karten und $\{\psi_i\}$ eine glatte Zerlegung der Eins, die dieser Überdeckung untergeordnet ist. Das *Integral* von ω über M ist dann definiert durch

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i \omega. \quad (11.1)$$

Da für jedes i die n -Form $\psi_i \omega$ kompakten Träger in U_i hat, ist jeder Summand in (11.1) wohldefiniert. Um zu zeigen, dass das Integral wohldefiniert ist, müssen wir nachweisen, dass die Definition nicht von der Wahl der Karten und der Zerlegung der Eins abhängt.

Lemma 11.5 *Die Definition des Integrals $\int_M \omega$ ist unabhängig von der Wahl orientierter Karten und der Zerlegung der Eins.*

Beweis: Es seien $\{(U_i, \varphi_i)\}$ und $\{(\bar{U}_i, \bar{\varphi}_i)\}$ zwei endliche Überdeckungen von $\text{supp } \omega$ durch positiv orientierte glatte Karten und $\{\psi_i\}, \{\bar{\psi}_i\}$ glatte Zerlegungen der Eins, die den jeweiligen Überdeckungen untergeordnet sind. Dann gilt für jedes i ,

$$\int_M \psi_i \omega = \int_M \left(\sum_j \bar{\psi}_j \right) \psi_i \omega = \sum_j \int_M \bar{\psi}_j \psi_i \omega.$$

Summieren wir nun, so erhalten wir

$$\sum_i \int_M \psi_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \bar{\psi}_j \psi_i \omega.$$

Jeder Term in dieser letzten Summe ist das Integral einer n -Form deren kompakter Träger in einer einzelnen glatten Karte enthalten ist. Nach Lemma 11.4 ist daher jeder dieser Terme unabhängig von der gewählten Karte. Eine analoge Rechnung für $\int_M \bar{\psi}_j \omega$ liefert ebenfalls

$$\sum_j \int_M \bar{\psi}_j \omega = \sum_{i,j} \int_M \bar{\psi}_j \psi_i \omega,$$

womit die Definition von $\int_M \omega$ auch unabhängig von der gewählten Zerlegung der Eins ist. ■

Bemerkungen.

- (a) Das Integral einer 0-Form f mit kompaktem Träger über eine orientierte 0-dimensionale Mannigfaltigkeit M ist definiert durch

$$\int_M f = \sum_{p \in M} \pm f(p),$$

wobei wir positives Vorzeichen an Punkten positiver Orientierung verwenden und negatives Vorzeichen an Punkten negativer Orientierung. Da f kompakten Träger hat, sind nur endlich viele Terme in dieser Summe ungleich Null.

- (b) Ist $N \subseteq M$ eine orientierte immensierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) und ω eine k -Form auf M , deren Einschränkung auf N kompakten Träger hat, so setzen wir

$$\int_N \omega := \int_N (\omega|_N).$$

Ist speziell M eine kompakte, orientierte glatte n -Mannigfaltigkeit mit Rand und ω eine $(n-1)$ -Form auf M , so ist $\int_{\partial M} \omega$ wohldefiniert, wenn wir ∂M mit der induzierten Orientierung versehen.

Proposition 11.6 *Es seien M und N orientierte glatte n -Mannigfaltigkeiten (mit oder ohne Rand) und ω, η n -Formen auf M mit kompaktem Träger. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) Linearität: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\int_M a\omega + b\eta = a \int_M \omega + b \int_M \eta.$$

- (b) Orientierungsumkehr: Bezeichnet \overline{M} , die Mannigfaltigkeit M versehen mit der umgekehrten Orientierung, dann gilt

$$\int_{\overline{M}} \omega = - \int_M \omega.$$

- (c) Positivität: Ist ω eine Orientierungsform für die gegebene Orientierung von M , dann gilt

$$\int_M \omega > 0.$$

- (d) Invarianz unter Diffeomorphismen: Ist $F : N \rightarrow M$ ein die Orientierung erhaltender Diffeomorphismus, dann gilt

$$\int_M \omega = \int_N F^* \omega.$$

Beweis: Aussage (a) ist trivial und (b) folgt leicht aus Proposition 11.2. Es sei daher ω nun eine Orientierungsform für M . Das bedeutet bezüglich jeder positiv orientierten glatten Karte (U, φ) ist $(\varphi^{-1})^* \omega$ gegeben durch $f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ mit $f > 0$. Damit ist jeder Summand in (11.1) nichtnegativ und mindestens einer davon echt positiv. Damit ist (c) gezeigt.

Zum Beweis von (d) können wir annehmen, dass der Träger von ω in einer einzelnen glatten Karte enthalten ist, da unter Verwendung von Zerlegungen der Eins jede n -Form auf M als endliche Summe solcher Formen geschrieben werden kann. Es sei daher (U, φ) eine positiv orientierte glatte Karte auf M mit $\text{supp } \omega \subseteq U$. Da $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$ eine orientierte glatte Karte auf N ist, die den Träger von $F^*\omega$ enthält, folgt die Behauptung nun aus Korollar 11.3. ■

Die Definition des Integrals einer Differentialform mit Hilfe von Zerlegungen der Eins ist zwar für theoretische Zwecke nützlich, für praktische Berechnungen aber völlig nutzlos. Um Integrale von Formen tatsächlich zu berechnen, wird die Mannigfaltigkeit meist in endliche Stücke geteilt, die durch lokale Parametrisierungen beschrieben werden. Unser nächstes Resultat beschreibt wie in diesem Fall das Integral einer Form bestimmt wird. Dazu benötigen wir noch eine

Definition. Wir nennen eine Teilmenge E einer glatten Mannigfaltigkeit M einen *Integrationsbereich*, wenn $\text{cl } E$ kompakt ist und ∂E Maß Null hat (siehe Seite 46). Unter einem *regulären Bereich* in M verstehen wir eine kompakte, eingebettete n -Untermannigfaltigkeit mit Rand. Jeder reguläre Bereich ist Integrationsbereich.

Proposition 11.7 *Sei M eine orientierte glatte n -Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand). Sind E_1, \dots, E_k kompakte Integrationsbereiche auf M , D_1, \dots, D_k kompakte Integrationsbereiche im \mathbb{R}^n und für $i = 1, \dots, k$, $F_i : D_i \rightarrow M$ glatte Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $F_i(D_i) = E_i$ und $F_i|_{\text{int } D_i}$ ist ein Diffeomorphismus von $\text{int } D_i$ auf $\text{int } E_i$, der die Orientierung erhält.
- (ii) Für jedes $i \neq j$ ist $\text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset$.

Dann gilt für jede n -Form ω auf M , deren Träger enthalten ist in $E_1 \cup \dots \cup E_k$,

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{D_i} F_i^* \omega.$$

Beweis: Wie im Beweis von Proposition 11.6 (d) können wir annehmen, dass der kompakte Träger von ω in einer einzelnen glatten positiv orientierten Karte (U, φ) enthalten ist. Indem wir M etwa durch Koordinatenkugeln überdecken, können wir weiters annehmen, dass ∂U Maß Null hat und φ zu einem Diffeomorphismus von $\text{cl } U$ auf einen kompakten Integrationsbereich $K \subseteq \mathbb{H}^n$ fortgesetzt werden kann.

Für jedes i setzen wir nun

$$A_i = \text{cl } U \cap E_i \subseteq M.$$

Dann ist A_i eine kompakte Teilmenge von M deren Rand Maß Null hat, da offenbar $\partial A_i \subseteq \partial U \cup \partial E_i$. Wir definieren nun noch kompakte Teilmengen $B_i, C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} B_i &= F_i^{-1}(A_i), \\ C_i &= \varphi(A_i). \end{aligned}$$

Da glatte Abbildungen Mengen vom Maß Null auf Mengen von Maß Null abbilden, sind B_i und C_i Integrationsbereiche und $\varphi \circ F_i$ bildet B_i auf C_i glatt ab und die Einschränkung auf $\text{int } B_i$ ist ein Diffeomorphismus auf $\text{int } C_i$. Nach Proposition 11.2 gilt daher

$$\int_{C_i} (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{B_i} F_i^* \omega.$$

Summieren wir nun über i , und bemerken, dass die A_i (und damit auch die C_i) keine Inneren Punkte gemeinsam haben, erhalten wir

$$\int_M \omega = \int_K (\varphi^{-1})^* \omega = \sum_i \int_{C_i} (\varphi^{-1})^* \omega = \sum_i \int_{B_i} F_i^* \omega = \sum_i \int_{D_i} F_i^* \omega. \quad \blacksquare$$

Bemerkung.

- (a) Die Voraussetzungen von Proposition 11.7 können noch etwas abgeschwächt werden. So müssen etwa die Abbildungen F_i nicht unbedingt am Rand der Bereiche D_i glatt sein, solange $\text{int } D_i$ diffeomorph auf $\text{int } E_i$ abgebildet wird.

Beispiel.

Wir wollen das Integral der 2-Form

$$\omega = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$$

über \mathbb{S}^2 versehen mit der Standardorientierung berechnen. Dazu sei D das Rechteck $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ und $F : D \rightarrow \mathbb{S}^2$ die Kugelkoordinatenparametrisierung

$$F(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi).$$

Wir haben bereits gesehen, dass F die Orientierung auf $\text{int } D$ erhält. Es seien nun $D_1 = [0, \pi] \times [0, \pi]$ und $D_2 = [0, \pi] \times [\pi, 2\pi]$ und $F_i = F|_{D_i}$, $i = 1, 2$. Die beiden Abbildungen $F_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ und $F_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ erfüllen nun die Voraussetzungen von Proposition 11.7. (Da $F(D) = \mathbb{S}^2$, stimmt $F(\text{int } D)$ nicht mit dem Inneren von $F(D)$ überein, daher mussten wir \mathbb{S}^2 in zwei Teile teilen.) Es gilt weiters

$$\begin{aligned} F^* dx &= \cos \varphi \cos \theta \, d\varphi - \sin \varphi \sin \theta \, d\theta, \\ F^* dy &= \cos \varphi \sin \theta \, d\varphi + \sin \varphi \cos \theta \, d\theta, \\ F^* dz &= -\sin \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} \omega &= \int_{D_1} F_1^* \omega + \int_{D_2} F_2^* \omega = \int_D F^* \omega \\ &= \int_D (-\sin^3 \varphi \cos^2 \theta \, d\theta \wedge d\varphi + \sin^3 \varphi \sin^2 \theta \, d\varphi \wedge d\theta \\ &\quad + \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta \, d\varphi \wedge d\theta - \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta \, d\theta \wedge d\varphi) \\ &= \int_D \sin \varphi \, d\varphi \wedge d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zum zentralen Satz der Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten, den *Satz von Stokes*. Es handelt sich dabei um eine weitreichende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, sowie der klassischen Sätze der Vektoranalysis:

Satz 11.8 *Ist M eine glatte, orientierte n -Mannigfaltigkeit mit Rand und ω eine glatte $(n-1)$ -Form auf M mit kompaktem Träger, dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (11.2)$$

Bemerkung.

- (a) In der Aussage des Satzes von Stokes nehmen wir an, dass ∂M mit der von M induzierten Orientierung versehen ist und ω auf der rechten Seite von (11.2) mit $\omega|_{\partial M}$ identifiziert wird. Ist $\partial M = \emptyset$, dann ist die rechte Seite von (11.2) als Null zu verstehen. Ist M 1-dimensional, so ist die rechte Seite von (11.2) eine endliche Summe.

Beweis: Wir nehmen zunächst $M = \mathbb{H}^n$ an. Die Voraussetzung, dass ω kompakten Träger hat, impliziert dann, dass es eine Zahl $R > 0$ gibt, sodass $\text{supp } \omega$ enthalten ist in $A = [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \times [0, R]$. In Standardkoordinaten kann ω dargestellt werden in der Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

wobei das 'Dach' wieder bedeutet, dass dx^i wegzulassen ist. Damit ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n, \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Es ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_A \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) dx^1 \cdots dx^n. \end{aligned}$$

Wir ändern nun die Integrationsreihenfolge in jedem Summanden so, dass wir die x^i Integration zuerst ausführen.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich nun für $i \neq n$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) dx^1 \cdots dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) dx^i dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \left[\omega_i(x) \right]_{x^i=-R}^{x^i=R} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n = 0.
\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass wir R so groß gewählt haben, dass $\omega = 0$ für $x^i = \pm R$. Für $i = n$ erhalten wir noch

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \int_0^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x) dx^n dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \left[\omega_n(x) \right]_{x^n=0}^{x^n=R} dx^1 \cdots dx^{n-1} \\
&= (-1)^n \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1},
\end{aligned}$$

da auch $\omega_n = 0$, wenn $x^n = R$. (Beachte, dass auch dieser Term verschwindet, wenn $\text{supp } \omega \cap \partial \mathbb{H}^n = \emptyset$.) Wir vergleichen nun den so erhaltenen Ausdruck mit der entsprechenden rechten Seite von (11.2):

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \sum_i \int_{A \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_i(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Da x^n auf $\partial \mathbb{H}^n$ verschwindet, ist auch die Einschränkung von dx^n auf $\partial \mathbb{H}^n$ identisch Null. Den einzigen von Null verschiedenen Summanden erhalten wir daher für $i = n$:

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \int_{A \cap \partial \mathbb{H}^n} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.$$

Verwenden wir nun, dass die Koordinaten (x^1, \dots, x^{n-1}) positiv orientiert sind für $\partial \mathbb{H}^n$, wenn n gerade ist und negativ orientiert für ungerades n (siehe Beispiel (b), Seite 133), so erhalten wir wieder

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = (-1)^n \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1}.$$

Es sei nun M eine beliebige glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, aber ω zunächst noch eine $(n-1)$ -Form deren kompakter Träger in einer einzelnen glatten Karte (U, φ) enthalten ist. O.B.d.A. können wir annehmen, dass (U, φ) positiv orientiert ist. Nach Definition gilt dann

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} d((\varphi^{-1})^* \omega),$$

da $(\varphi^{-1})^*\omega$ kompakten Träger in \mathbb{H}^n hat. Nach dem ersten Teil des Beweises stimmt das letzte Integral aber mit

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^*\omega, \quad (11.3)$$

überein, wobei $\partial\mathbb{H}^n$ mit der induzierten Orientierung versehen ist. Es folgt aus Lemma 10.7, dass φ^* nach außen weisende Tangentialvektoren an ∂M auf nach außen weisende Tangentialvektoren an \mathbb{H}^n abbildet. Daher ist $\varphi|_{U \cap \partial M}$ ein die Orientierung erhaltender Diffeomorphismus auf $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$, womit (11.3) mit $\int_{\partial M} \omega$ übereinstimmt.

Schließlich sei nun ω eine beliebige glatte $(n-1)$ -Form mit kompaktem Träger. Wählen wir eine Überdeckung von $\text{supp } \omega$ durch endlich viele glatte orientierte Karten $\{(U_i, \varphi_i)\}$ und eine dazu untergeordnete glatte Zerlegung der Eins $\{\psi_i\}$, so liefert das Argument aus dem zweiten Teil des Beweises angewandt auf jedes $\psi_i \omega$

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \sum_i \int_{\partial M} \psi_i \omega = \sum_i \int_M d(\psi_i \omega) = \sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega \\ &= \int_M d\left(\sum_i \psi_i\right) \wedge \omega + \int_M \left(\sum_i \psi_i\right) d\omega = 0 + \int_M d\omega, \end{aligned}$$

da $\sum_i \psi_i \equiv 1$. ■

Beispiel.

Es sei N eine glatte Mannigfaltigkeit und $\gamma : [a, b] \rightarrow N$ eine glatte Einbettung, sodass $M = \gamma([a, b])$ eine eingebettete 1-Untermannigfaltigkeit mit Rand in N ist. Versehen wir M mit der Orientierung, sodass γ eine die Orientierung erhaltende Abbildung ist, dann gilt nach dem Satz von Stokes für jedes $f \in C^\infty(N)$,

$$\int_\gamma df = \int_{[a,b]} \gamma^* df = \int_M df = \int_{\partial M} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Der Satz von Stokes reduziert sich in diesem Fall also zu Satz 7.16. Ist speziell $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Inklusionsabbildung, dann wird der Satz von Stokes zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Das folgende Korollar enthält zwei oft auftretende Spezialfälle des Satzes von Stokes:

Korollar 11.9 *Es sei M eine kompakte, orientierte glatte Mannigfaltigkeit. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (a) *Besitzt M keinen Rand, dann verschwindet das Integral jeder exakten Form über M :*

$$\int_M d\omega = 0, \quad \text{wenn } \partial M = \emptyset.$$

- (b) *Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und ω eine geschlossene Form auf M , dann verschwindet das Integral von ω über ∂M :*

$$\int_{\partial M} \omega = 0 \quad \text{wenn } d\omega = 0 \text{ auf } M.$$

Wir beenden die Vorlesung mit einer einfachen Anwendung des Satzes von Stokes, die den klassischen *Satz von Green* liefert:

Korollar 11.10 *Es seien D ein regulärer Bereich im \mathbb{R}^2 und P, Q glatte reellwertige Funktionen auf D . Dann gilt*

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Beweis: Anwendung des Satzes von Stokes auf die 1-Form $P dx + Q dy$ liefert die Behauptung. ■