BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Ehrenfeucht–Fraïssé Spiele und Back-and-Forth Mengen

Verfasserin

Lena Wallner

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc.)

Wien, im Monat Juli 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 033621
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuerin:	Dr. Sandra Müller

Abstract

In dieser Arbeit werden Ehrenfeucht-Fraïsse Spiele und Back-and-Forth Mengen, beziehungsweise partielle Isomorphien, behandelt. Zum Einstieg wird ein konkretes Beispiel vorgestellt. Danach wird der Begriff der partiellen Isomorphie eingeführt und erläutert. Im nächsten Teil geht es um das Konzept der Spiele und im Speziellen um Ehrenfeucht-Fraïsse Spiele. Deren Funktionsweise wird in einem eigenen Kapitel über Ehrenfeucht-Fraïsse Spiele auf Graphen mit Hilfe einiger Beispiele verdeutlicht. Im Anschluss wird der zentrale Satz dieser Arbeit bewiesen. Dieser sagt aus, dass zwei Strukturen genau dann partiell isomorph zueinander sind, wenn Bob im zugehörigen unendlichen Ehrenfeucht-Fraïsse Spiel eine Gewinnstrategie hat. Das Konzept der Back-and-Forth Mengen kann auf Back-and-Forth Folgen verallgemeinert werden. Auch dann gibt es eine Verbindung zu Ehrenfeucht-Fraïsse Spielen. Im letzten Kapitel wird wieder das Beispiel aus dem ersten Kapitel betrachtet und mit den eingeführten Methoden erneut bewiesen.

Inhaltsverzeichnis

1 Isomorphie abzählbarer dichter linearer Ordnungen 1

2 Ehrenfeucht–Fraïssé Spiele und Back-and-Forth Mengen 3

2.1 Unterstrukturen 4
2.2 Back-and-Forth Mengen 5
2.3 Spiele 9
2.4 Ehrenfeucht–Fraïssé Spiele 16
2.5 Beispiel: Ehrenfeucht–Fraïssé Spiele auf Graphen 17
2.6 Korrespondenz zwischen Ehrenfeucht–Fraïssé Spielen und Back-and-Forth Mengen 20
2.7 Verallgemeinerung: Back-and-Forth Folgen 22

3 Partielle Isomorphie dichter linearer Ordnungen 25

Literatur 26

1 Isomorphie abzählbarer dichter linearer Ordnungen

Zum Einstieg betrachten wir ein Beispiel für isomorphe Strukturen und führen dafür die benötigten Begriffe ein. Die folgenden Definitionen sind in [Mül20] und [Jec02] zu finden. Mit $\mathbb{N}^+$ werden die positiven natürlichen Zahlen bezeichnet.

Definition 1.0.1 (Sprache)**.** Eine ***Sprache*** ist ein Tripel $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ aus jeweils einer Menge von Konstantenzeichen $\mathcal{C}$, Funktionszeichen $\mathcal{F}$ und Relationszeichen $\mathcal{R}$. Dabei ist Funktions- und Relationszeichen eine positive Stelligkeit zugeordnet.

Definition 1.0.2 (Struktur)**.** Eine ***L-Struktur*** für eine Sprache $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ ist ein Quadrupel $\mathcal{A} = (A, \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}})$, wobei

(1) A eine nicht-leere Menge ist, die ***Universum*** von $\mathcal{A}$ genannt wird,

(2) $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \mid c \in \mathcal{C}\} \subseteq A$,

(3) $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{f^{\mathcal{A}} : A^n \to A \mid f \in \mathcal{F}\ n\text{-stellig}\}$ und

(4) $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n \mid R \in \mathcal{R}\ n\text{-stellig}\}$.

Ist $\mathcal{C}, \mathcal{F}$ oder $\mathcal{R}$ leer, dann ist es üblich bei der Bezeichnung von $\mathcal{A}$ die Mengen $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ oder $\mathcal{R}^{\mathcal{A}}$ wegzulassen.

Definition 1.0.3 (lineare Ordnung)**.** Eine ***lineare Ordnung*** $(A, <)$ ist eine L-Struktur für die Sprache $L = (\emptyset, \emptyset, \{<\})$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationszeichen ist. Dabei müssen die folgenden Eigenschaften für $<$ erfüllt sein:

(1) antireflexiv: $\forall\, x \in A\, \neg(x < x)$,

(2) transitiv: $\forall\, x, y, z \in A\, (x < y \wedge y < z \to x < z)$ und

(3) Vergleichbarkeit: $\forall\, x, y \in A (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

Eine lineare Ordnung heißt ***dicht***, falls $\forall\, x, y \in A\, (x < y \to\ \exists\, z \in A\, x < z < y)$ gilt. Man sagt, dass $a \in A$ ein ***Endpunkt*** von $<$ in A ist, falls $\nexists\, x \in A\, a < x$ oder $\nexists\, x \in A\, x < a$ gilt.

Definition 1.0.4 (Isomorphismus)**.** Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache und seien $\mathcal{A} = (A, \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, \mathcal{C}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}}, \mathcal{R}^{\mathcal{B}})$ L-Strukturen.
Eine Abbildung $F : A \to B$ heißt ***Isomorphismus*** zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls

(1) F ist eine Bijektion,

(2) $F(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ für alle $c \in \mathcal{C}$

und für alle $a_1, ..., a_n \in A$

(3) $F(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{B}}(F(a_1), ..., F(a_n))$ für n-stellige $f \in \mathcal{F}$ und

(4) $R^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(F(a_1), ..., F(a_n))$ für n-stellige $R \in \mathcal{R}$.

erfüllt sind.
$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen ***(zueinander) isomorph***, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, falls es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt.

Bemerkung 1.0.5. Eine Funktion $F : A \to B, a \mapsto b$ kann man folgendermaßen auch als Menge schreiben: $F = \{(a, b) \in A \times B \mid F(a) = b\}$.

Die Idee des folgenden Beweises ist in [TZ12, S. 36] zu finden.

Satz 1.0.6. *Abzählbare dichte lineare Ordnungen $(A, <_A), (B, <_B)$ ohne Endpunkte sind zueinander isomorph.*

Beweis. A und B sind abzählbar und lassen sich deshalb als $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ schreiben.
Wir definieren die Funktion $F_m : \{x_0, ..., x_m\} \to \{y_0, ..., y_m\}$, $x_i \mapsto y_i$ rekursiv.
Zu Beginn wählen wir $x_0 := a_0$, $y_0 := b_0$ und $F_0 := \{(x_0, y_0)\}$. $F_0 : \{x_0\} \to \{y_0\}$ ist trivialerweise bijektiv und ordnungstreu.
Angenommen $F_{m-1} := \{(x_0, y_0), ..., (x_{m-1}, y_{m-1})\}$ wurde schon so konstruiert, dass F_{m-1} bijektiv und ordnungstreu ist.
Wir betrachten zuerst den Fall, in dem m gerade ist.
Sei $x_m := a_j$, wobei $j := min\{n \in \mathbb{N} \mid \nexists\, i < m : x_i = a_n\}$. x_m ist also von den Elementen aus A, die wir noch nicht „verwendet" haben, das mit dem kleinsten Index. Dieses Element gibt es immer, weil $<$ auf $\mathbb{N}$ eine Wohlordnung ist. Das heißt, dass jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein minimales Element enthält, insbesondere die Teilmenge $\{n \in \mathbb{N} \mid \nexists\, i < m : x_i = a_n\}$.
Nun wählen wir y_m so, dass auch $F_m := F_{m-1} \cup \{(x_m, y_m)\}$ bijektiv und ordnungstreu ist.
Fall 1: $x_m <_A x_i \;\forall\, i < m$. Wir wählen $y_m \in B$ so, dass $y_m <_B y_i \;\forall\, i < m$ gilt. So ein y_m gibt es, da $(B, <_B)$ sonst einen Endpunkt hätte.
Fall 2: $x_i <_A x_m \;\forall\, i < m$. Wir wählen $y_m \in B$, sodass $y_i <_B y_m \;\forall\, i < m$ gilt. Auch in diesem Fall gibt es so ein y_m, da $(B, <_B)$ sonst einen Endpunkt hätte.
Fall 3: $x_i <_A x_m <_A x_k$ für $i, k < m$, wobei $\nexists\, l < m$ mit $x_i <_A x_l <_A x_m$ oder $x_m <_A x_l <_A x_k$. Wir wählen $y_m \in B$, sodass $y_i <_B y_m <_B y_k$ gilt. So ein y_m gibt es, da $<_B$ eine dichte Ordnung auf B ist.
Im Fall, dass m ungerade ist, konstruieren wir F_m folgendermaßen.
Wir beginnen mit $y_m := b_j$, wobei $j := min\{n \in \mathbb{N} \mid \nexists\, i < m : y_i = b_n\}$. y_m ist von den Elementen aus B, die wir noch nicht „verwendet" haben, das mit dem kleinsten Index.
Wie vorher für m gerade, wählen wir x_m so, dass auch $F_m := F_{m-1} \cup \{(x_m, y_m)\}$ bijektiv und ordnungstreu ist.
Fall 1: $y_m <_B y_i \;\forall\, i < m$. Wir wählen $x_m \in A$, sodass $x_m <_A x_i \;\forall\, i < m$ gilt.
Fall 2: $y_i <_B y_m \;\forall\, i < m$. Wir wählen $x_m \in A$, sodass $x_i <_A x_m \;\forall\, i < m$ gilt.
Fall 3: $y_i <_B y_m <_B y_k$ für $i, k < m$, wobei $\nexists\, l < m$ mit $y_i <_B y_l <_B y_m$ oder $y_m <_B y_l <_B y_k$. Wir wählen $x_m \in A$, sodass $x_i <_A x_m <_A x_k$ gilt.
x_m existiert aus den selben Gründen, aus denen y_m für m gerade existiert hat.
Behauptung: $F := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_m$ ist ein Isomorphismus von $(A, <_A)$ nach $(B, <_B)$.

Begründung: Wir prüfen die Bedingungen aus Definition 1.0.4.
Da $F_{m'} \subseteq F_m$ für $m' < m$ gilt, ist F eine Funktion.
(1) Für m gerade wird x_m als das Element mit dem kleinsten Index aus den Elementen von A, die noch nicht in F_m vorgekommen sind, gewählt. Da A abzählbar ist, wird so sichergestellt, dass kein Element aus A „vergessen“ wird. Präziser heißt das $\{x_m \mid m \in \mathbb{N}\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = A$. Für m ungerade bekommen wir $\{y_m \mid m \in \mathbb{N}\} = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = B$. Daraus folgt, dass F eine Surjektion von A nach B ist.
Für $x_m, x_{m'} \in A$, $M := max\{m, m'\}$ gilt $F(x_m) = F_M(x_m)$ und $F(x_{m'}) = F_M(x_{m'})$. Da F_M injektiv ist, gilt $F(x_m) = F_M(x_m) = F_M(x_{m'}) = F(x_{m'}) \Rightarrow x_m = x_{m'}$. Also ist F injektiv und damit bijektiv.
Die Bedingungen (2) und (3) entfallen, da die Sprache der linearen Ordnungen werder Konstanten- noch Funktionszeichen enthält.
(4) Wir wissen, dass F_M ordnungstreu ist. Deshalb gilt $x_m <_A x_{m'} \Leftrightarrow F(x_m) = F_M(x_m) <_B F_M(x_{m'}) = F(x_{m'})$. Also ist auch F ordnungstreu. Damit ist gezeigt, dass $(A, <_A)$ isomorph zu $(B, <_B)$ ist. □

Bemerkung 1.0.7. Eine Theorie heißt ***abzählbar-kategorisch***, falls je zwei abzählbare Modelle zueinander isomorph sind. Man sagt dann, dass die Theorie bis auf Isomorphie nur ein abzählbares Modell hat. Satz 1.0.6 zeigt, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte abzählbar-kategorisch ist.

2 Ehrenfeucht–Fraïssé Spiele und Back-and-Forth Mengen

Im vorhergehenden Kapitel ging es darum zu zeigen, dass zwei abzählbare dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkt zueinander isomorph sind. Diesen Zusammenhang kann man stark verallgemeinern. Hat man zwei Strukturen zu einer Sprache gegeben, ist es interessant herauszufinden wie ähnlich sich die beiden sind. Dafür gibt es den Begriff der partiellen Isomorphie, eine schwächere Version der Isomorphie. In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt und hergeleitet, die man nutzen kann, um zu zeigen, dass zwei Strukturen partiell isomorph sind. Dafür wird zunächst das Konzept von Spielen erklärt, insbesondere das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel. Mit diesem kann man intuitiv die Frage nach der partiellen Isomorphie zweier Strukturen beantworten.
Diesem Abschnitt liegen die Kapitel 3 bis 5 aus [Vää11] zugrunde.

2.1 Unterstrukturen

Um den Begriff der partiellen Isomorphie definieren zu können, muss zunächst geklärt werden was eine Unterstruktur ist.

Definition 2.1.1 (Unterstruktur)**.** Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache und $\mathcal{A} = (A, \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}})$ eine L-Struktur. $\mathcal{B} = (B, \mathcal{C}^{\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{B}}, \mathcal{R}^{\mathcal{B}})$ ist eine ***Unterstruktur*** von $\mathcal{A}$, schreibe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, falls $\mathcal{B}$ eine L-Struktur ist mit

(1) $B \subseteq A$,

(2) $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}}$ für Konstantenzeichen $c \in \mathcal{C}$,

(3) $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \restriction B^n$ für n-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{F}$ und

(4) $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^n$ für n-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{R}$.

Beispiel 2.1.2. Sei $L = (\emptyset, \{\bar{+}\}, \{\bar{<}\})$ mit $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \emptyset, \{+\}, \{<\})$ und $\mathcal{B} = (B, \emptyset, \{+ \restriction B \times B\}, \{< \restriction B \times B\})$, wobei B die Menge der positiven geraden Zahlen ist. Dann ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, denn die ersten beiden Bedingungen sind offensichtlich erfüllt und die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade. Die Relation $<$ lässt sich problemlos auf jede Teilmenge der natürlichen Zahlen einschränken.

Definition 2.1.3 (erzeugte Unterstruktur)**.** Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache, $\mathcal{A} = (A, \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}})$ eine L-Struktur und $S \subseteq A$. Weiterhin gelte $S \neq \emptyset$ oder $\mathcal{C} \neq \emptyset$. $[S]_{\mathcal{A}}$ ist die ***von S erzeugte Unterstruktur*** von $\mathcal{A}$, falls $[S]_{\mathcal{A}}$ die kleinste Unterstruktur von $\mathcal{A}$ ist, deren Universum S enthält.

Bemerkung 2.1.4. Oftmals wird die Bezeichnung $[S]_{\mathcal{A}}$ auch für das Universum von $[S]_{\mathcal{A}}$ verwendet.

Lemma 2.1.5. *Die in Definition 2.1.3 definierte Unterstruktur $[S]_{\mathcal{A}}$ existiert und ist eindeutig.*

Beweis. Konstruiere dafür induktiv das Universum $\tilde{S}$ von $[S]_{\mathcal{A}}$.

$$\begin{aligned} S_0 &:= S \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \\ S_{i+1} &:= S_i \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in S_i, f \in \mathcal{F} \text{ } n\text{-stellig}\} \text{ und} \\ \tilde{S} &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i. \end{aligned}$$

Konstanten, Funktionen und Relationen werden genau so konstruiert, dass sie die Eigenschaften einer Unterstruktur erfüllen. Das heißt $c^{[S]_{\mathcal{A}}} := c^{\mathcal{A}}$ für $c \in \mathcal{C}$, $f^{[S]_{\mathcal{A}}} := f^{\mathcal{A}} \restriction \tilde{S}^n$ für $f \in \mathcal{F}$ n-stellig und $R^{[S]_{\mathcal{A}}} := R^{\mathcal{A}} \cap \tilde{S}^n$ für $R \in \mathcal{R}$ n-stellig. $[S]_{\mathcal{A}} := (\tilde{S}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \{f^{[S]_{\mathcal{A}}} \mid f \in \mathcal{F}\}, \{R^{[S]_{\mathcal{A}}} \mid R \in \mathcal{R}\})$ ist damit eine Unterstruktur von $\mathcal{A}$ mit $S \subseteq \tilde{S}$.

Behauptung: $[S]_{\mathcal{A}}$ ist minimal.

Begründung: Sei $\mathcal{B} = (B, \mathcal{C}^\mathcal{B}, \mathcal{F}^\mathcal{B}, \mathcal{R}^\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ mit $S \subseteq B$. Dann ist $\tilde{S} \subseteq B$, da $\mathcal{B}$ sonst keine L-Struktur wäre. Für Konstantenzeichen $c \in \mathcal{C}$ gilt $c^\mathcal{B} = c^\mathcal{A} = c^{[S]_\mathcal{A}}$. Aus $f^\mathcal{B} = f^\mathcal{A} \upharpoonright B^n$ und $f^{[S]_\mathcal{A}} = f^\mathcal{A} \upharpoonright \tilde{S}^n$ folgt, dass $f^\mathcal{B} \upharpoonright \tilde{S}^n = (f^\mathcal{A} \upharpoonright B^n) \upharpoonright \tilde{S}^n = f^\mathcal{A} \upharpoonright \tilde{S}^n = f^{[S]_\mathcal{A}}$. Ganz analog gilt auch $R^{[S]_\mathcal{A}} = R^\mathcal{B} \upharpoonright \tilde{S}^n$ für n-stellige Relationen. Damit gilt $[S]_\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.
Aus der Minimalität von $[S]_\mathcal{A}$ folgt die Eindeutigkeit. □

Bemerkung 2.1.6. Falls L keine Konstanten enthält und $S = \emptyset$, dann würde der Algorithmus aus Lemma 2.1.5 die leere Menge erzeugen und diese ist per Definition als Universum ausgeschlossen.

Proposition 2.1.7. *Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache, $\mathcal{A} = (A, \mathcal{C}^\mathcal{A}, \mathcal{F}^\mathcal{A}, \mathcal{R}^\mathcal{A})$ eine L-Struktur und $Q, S \subseteq A$ mit $\emptyset \neq Q \subseteq S$. Dann gilt $[Q]_\mathcal{A} \subseteq [S]_\mathcal{A}$.*

Beweis. Wir nutzen die Notation aus dem Beweis von Lemma 2.1.5 und beweisen mittels Induktion, dass $Q_i \subseteq S_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Daraus folgt dann

$$\tilde{Q} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i = \tilde{S}.$$

Für $i = 0$ gilt $Q_0 = Q \cup \mathcal{C}^\mathcal{A} \subseteq S \cup \mathcal{C}^\mathcal{A} = S_0$.
Nehmen wir an, dass $Q_i \subseteq S_i$ gilt. Dann gilt $\{f^\mathcal{A}(a_1, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in Q_i\} \subseteq \{f^\mathcal{A}(a_1, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in S_i\}$ für alle n-stelligen Funktionen $f \in \mathcal{F}$. Daraus folgt $Q_{i+1} \subseteq S_{i+1}$. Damit ist die Aussage gezeigt. □

Proposition 2.1.8. *Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache mit $\mathcal{C} = \emptyset$ und $\mathcal{F} = \emptyset$ und $\mathcal{A}$ L-Struktur mit Universum A. Dann ist für jede nichtleere Teilmenge $S \subseteq A$ das Universum von $[S]_\mathcal{A}$ die Menge S selbst.*

Beweis. Benutze den Algorithmus aus Lemma 2.1.5, um das Universum $\tilde{S}$ von $[S]_\mathcal{A}$ zu konstruieren.
$\mathcal{C} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}^\mathcal{A} = \emptyset \Rightarrow S_0 = S \cup \mathcal{C}^\mathcal{A} = S$ und
$\mathcal{F} = \emptyset \Rightarrow \forall\, i \in \mathbb{N}\, \forall\, n \in \mathbb{N}^+ \{f^\mathcal{A}(a_1, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in S_i, f \in \mathcal{F}\ n\text{-stellig}\} = \emptyset$
$\Rightarrow \forall\, i \in \mathbb{N}\, (S_{i+1} = S_i) \Rightarrow \tilde{S} = S$. □

2.2 Back-and-Forth Mengen

Nun haben wir alle Begriffe eingeführt, um Back-and-Forth Mengen und partielle Isomorphie definieren zu können.

Definition 2.2.1 (partieller Ismomorphismus)**.** Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit Universen A und B. Eine ***partielle Abbildung*** $\pi : A \to B$ ist eine Abbildung $\pi : dom(\pi) \to B$ mit $dom(\pi) \subseteq A$.
Eine partielle Abbildung $\pi : A \to B$ ist ein ***partieller Isomorphismus*** $\mathcal{A} \to$

$\mathcal{B}$, falls es einen Isomorphismus $\pi^* : [dom(\pi)]_{\mathcal{A}} \to [rng(\pi)]_{\mathcal{B}}$ gibt, der eine Erweiterung von π ist, das heißt $\pi \subseteq \pi^*$.
Die Menge aller partiellen Isomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ wird mit $\boldsymbol{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bezeichnet.

Lemma 2.2.2. *Sei $\pi : A \to B$ ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und $\rho \subseteq \pi$. Dann ist auch $\rho \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Beweis. Da $\pi \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist, gibt es einen Isomorphismus $\pi^* : [dom(\pi)]_{\mathcal{A}} \to [rng(\pi)]_{\mathcal{B}}$. Nach 2.1.7 gilt $[dom(\rho)]_{\mathcal{A}} \subseteq [dom(\pi)]_{\mathcal{A}}$, weil $dom(\rho) \subseteq dom(\pi)$ gilt. $\rho^* := \pi^* \restriction [dom(\rho)]_{\mathcal{A}}$ bezeugt aus den folgenden Gründen, dass ρ ein partieller Isomorphismus ist:
Zunächst ist ρ^* eine Erweiterung von ρ, da $dom(\rho) \subseteq [dom(\rho)]_{\mathcal{A}}$ ist.
Um zu zeigen, dass ρ^* ein Isomorphismus von $[dom(\rho)]_{\mathcal{A}}$ nach $[rng(\rho)]_{\mathcal{B}}$ ist, müssen wir die vier Unterpunkte aus Definiton 1.0.4 zeigen. Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird im Folgenden $D := dom(\rho)$ und $R := rng(\rho)$ geschrieben.
(1) ρ^* ist eine Bijektion von $[D]_{\mathcal{A}}$ nach $[R]_{\mathcal{B}}$.
Um $rng(\rho^*) = [R]_{\mathcal{B}}$ zu zeigen, werden wir die Notation aus der Konstruktion von erzeugten Unterstrukturen 2.1.5 benutzen:

$$\begin{aligned} D_0 &:= D \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \\ D_{i+1} &:= D_i \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in D_i, f \in \mathcal{F}\ n\text{-stellig}\} \text{ und} \\ [D]_{\mathcal{A}} &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i. \end{aligned}$$

Sei zuerst $b \in rng(\rho^*)$. Dann gibt es ein $a \in [D]_{\mathcal{A}}$ mit $\rho^*(a) = b$. Das heißt, dass es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $a \in D_i$ gibt.
Wir zeigen mittels Induktion nach i, dass $b = \rho^*(a) \in [R]_{\mathcal{B}}$ aus $a \in D_i$ folgt.
Für $i = 0$ ist entweder $a \in D$ und damit

$$b = \rho^*(a) = \rho(a) \in R \subseteq [R]_{\mathcal{B}}$$

oder $a = c^{\mathcal{A}} \in \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ und damit

$$b = \rho^*(a) = \pi^*(a) = \pi^*(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}} \in [R]_{\mathcal{B}},$$

weil π^* ein Isomorphismus ist.
Für $a \in D_{i+1}$ gilt entweder $a \in D_i$ oder $a \in D_{i+1} \setminus D_i$. Falls $a \in D_i$, gilt die Aussage nach Annahme. Sei also $a \in D_{i+1} \setminus D_i$. Das heißt $a = f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{F}$ n-stellig und $a_1, ..., a_n \in D_i$. Nach der Induktionsannahme gilt

$\rho^*(a_1), ..., \rho^*(a_n) \in [R]_{\mathcal{B}}$. Also gilt

$$\begin{aligned}\rho^*(a) &= \pi^*(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\pi^*(a_1), ..., \pi^*(a_n)) \\ &= f^{\mathcal{B}}(\rho^*(a_1), ..., \rho^*(a_n)) \in [R]_{\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Damit ist $rng(\rho^*) \subseteq [R]_{\mathcal{B}}$ gezeigt. Wähle ein beliebiges $b \in [R]_{\mathcal{B}}$, um die umgekehrte Inklusion $rng(\rho^*) \supseteq [R]_{\mathcal{B}}$ zu zeigen.
Wir benutzen wieder die Konstruktion aus 2.1.5:

$$\begin{aligned} R_0 &:= R \cup \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, \\ R_{i+1} &:= R_i \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) \mid a_1, ..., a_n \in R_i, f \in \mathcal{F}\ n\text{-stellig}\} \text{ und} \\ [R]_{\mathcal{B}} &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i. \end{aligned}$$

Wir können wieder induktiv zeigen, dass $b \in rng(\rho^*)$ aus $b \in R_i$ folgt.
Für $i = 0$ ist entweder $b \in R$ und damit gibt es ein $a \in D \subseteq [D]_{\mathcal{A}}$ mit

$$b = \rho(a) = \rho^*(a) \in rng(\rho^*)$$

oder $b = d^{\mathcal{B}} \in \mathcal{C}^{\mathcal{B}}$. Dann gilt

$$b = d^{\mathcal{B}} = \pi^*(d^{\mathcal{A}}) = \rho^*(d^{\mathcal{A}}) \in rng(\rho^*),$$

denn π^* ist ein Isomorphmismus und $d^{\mathcal{A}} \in [D]_{\mathcal{A}}$.
Sei nun $b \in R_{i+1}$. Wie oben müssen wir nur den Fall $b \in R_{i+1} \setminus R_i$ behandeln. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{F}$ n-stellig und $b_1, ..., b_n \in R_i$ mit $b = f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)$. Nach der Induktionsannahme gibt es $a_1, ..., a_n \in [D]_{\mathcal{A}}$, sodass $b_k = \rho^*(a_k)$ für $k = 1, ..., n$. Nun gilt

$$\begin{aligned} b &= f^{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n) = f^{\mathcal{B}}(\rho^*(a_1), ..., \rho^*(a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\pi^*(a_1), ..., \pi^*(a_n)) \\ &= \pi^*(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) = \rho^*(f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n)) \in rng(\rho^*), \end{aligned}$$

denn $f^{\mathcal{A}}(a_1, ..., a_n) \in [D]_{\mathcal{A}}$.
Damit ist $rng(\rho^*) = [R]_{\mathcal{B}}$ gezeigt. Daraus folgt sofort, dass $\rho^* : [D]_{\mathcal{A}} \to [R]_{\mathcal{B}}$ eine Surjektion ist. Da $\rho^* \subseteq \pi^*$ und π^* injektiv ist, muss auch ρ^* eine Injektion sein.
Die Verträglichkeit mit Konstanten, Funktionen und Relationen, also die Eigenschaften (2), (3) und (4) aus Definition 1.0.4, folgen direkt aus der Tatsache, dass $\rho^* \subseteq \pi^*$ gilt.
Damit ist gezeigt, dass ρ^* ein Isomorphismus ist und somit ist ρ ein partieller

Isomorphismus. $\square$

Definition 2.2.3 (Back-and-Forth Menge)**.** Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit Universen A und B. Eine ***Back-and-Forth Menge*** für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist eine nichtleere Teilmenge $P \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) $\forall f \in P \; \forall a \in A \; \exists g \in P \; (f \subseteq g \wedge a \in dom(g))$

(2) $\forall f \in P \; \forall b \in B \; \exists g \in P \; (f \subseteq g \wedge b \in rng(g))$.

Falls es für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eine Back-and-Forth Menge gibt, dann nennt man $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ***partiell isomorph***, schreibe $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$.

Bemerkung 2.2.4. Im Gegensatz zum Fall der Isomorphie zweier Strukturen, reicht ein einzelner partieller Isomorphismus nicht für die partielle Isomorphie der Strukturen aus. Vielmehr muss eine Menge partieller Isomorphismen existieren, die die besonderen Eigenschaften einer Back-and-Forth Menge erfüllt.

Bemerkung 2.2.5. In Kapitel 3 werden wir zeigen, dass je zwei dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte partiell isomorph sind.

Satz 2.2.6. *Zwei zueinander isomorphe L-Strukturen sind partiell isomorph.*

Beweis. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Dann gibt es einen Isomorphismus $F : A \to B$. $\{F\}$ ist eine Back-and-Forth Menge für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, denn $\forall a \in A$ gilt $a \in dom(F) = A$ und $\forall b \in B$ gilt $b \in rng(F) = B$. Bedingungen (1) und (2) aus Definition 2.2.3 sind also erfüllt. $\square$

Satz 2.2.7. *Sei $L = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abzählbare L-Strukturen mit Universen A und B. Dann folgt aus $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$, dass $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ gilt.*

Beweis. Wir konstruieren einen Isomorphismus $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. A und B sind abzählbar, können also als $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ geschrieben werden.
Sei P eine Back-and-Forth Menge, die bezeugt, dass $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$ gilt. Back-and-Forth Mengen sind nie leer, also gibt es ein $f_0 \in P$.
Wegen Bedingung (1) aus der Definition von Back-and-Forth Mengen 2.2.3 gibt es für $a_0 \in A$ ein $f_1 \in P$ mit $f_0 \subseteq f_1$ und $a_0 \in dom(f_1)$.
Wegen Bedingung (2) gibt es für $b_0 \in B$ ein $f_2 \in P$ mit $f_1 \subseteq f_2$ und $b_0 \in rng(f_2)$.
Angenommen f_{2n} sei bereits konstruiert.
Für $a_n \in A$ gibt es ein $f_{2n+1} \in P$ mit $f_{2n} \subseteq f_{2n+1}$ und $a_n \in dom(f_{2n+1})$ und für $b_n \in B$ gibt es ein $f_{2n+2} \in P$ mit $f_{2n+1} \subseteq f_{2n+2}$ und $b_n \in rng(f_{2n+2})$.
Definiere nun $F := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k$.
Das ist eine Funktion, weil $f_k \subseteq f_{k'}$ für $k < k'$ gilt.
Weil $a_n \in dom(f_{2n+1}) \subseteq dom(F)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $dom(F) = A$.

Behauptung: F ist der gesuchte Isomorphismus.
Begründung: Wir prüfen dafür die Bedingungen (1) bis (4) aus 1.0.4, der Definition von Isomorphismen, nach:
(1) F ist eine Bijektion von A nach B.
F ist surjektiv, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n \in rng(f_{2n+2}) \subseteq rng(F)$.
F ist auch injektiv, denn für $a_n, a_m \in A$ mit $F(a_n) = F(a_m)$ und $M := max\{2n+1, 2m+1\}$ gilt $f_M(a_n) = F(a_n) = F(a_m) = f_M(a_m)$. $f_M \in P$ ist ein partieller Isomorphismus, also insbesondere injektiv. Daraus folgt $a_n = a_m$.
(2) $F(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$ für $c \in \mathcal{C}$.
$c^{\mathcal{A}} \in A$, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $c^{\mathcal{A}} = a_n$. Daraus folgt $F(c^{\mathcal{A}}) = f_{2n+1}(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$, denn $f_{2n+1} \in P \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
(3) $F(g^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, ..., a_{i_l})) = g^{\mathcal{B}}(F(a_{i_1}), ..., F(a_{i_l}))$ für l-stellige $g \in \mathcal{F}$.
$g^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, ..., a_{i_l}) \in A$, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = g^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, ..., a_{i_l})$. Definiere $M := 2 \cdot max\{n, i_1, ..., i_l\} + 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&F(g^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, ..., a_{i_l})) = f_M(g^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, ..., a_{i_l}))\\ &= g^{\mathcal{B}}(f_M(a_{i_1}), ..., f_M(a_{i_l})) = g^{\mathcal{B}}(F(a_{i_1}), ..., F(a_{i_l})).\end{aligned}$$

(4) $R^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, ..., a_{i_l}) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(F(a_{i_1}), ..., F(a_{i_l}))$ für l-stellige $R \in \mathcal{R}$.
Für $M := 2 \cdot max\{i_1, ..., i_l\} + 1$ gilt $F(a_{i_j}) = f_M(a_{i_j})\ \forall 1 \leq j \leq l$ und für f_M gilt die Aussage, weil $f_M \in P \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
Damit ist gezeigt, dass $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Isomorphismus ist und $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ gilt. □

Korollar 2.2.8. *Für abzählbare L-Strukturen sind Isomorphie und partielle Isomorphie äquivalent.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus 2.2.6 und 2.2.7. □

2.3 Spiele

Wir wenden uns nun einem anderen Thema zu. Am Ende des zweiten Kapitels werden wir jedoch eine Verbindung zwischen Spielen und Back-and-Forth Mengen herstellen können. Mit Spielen können Konstruktionen und mathematische Ideen sehr gut veranschaulicht werden. Sie sind ein Hilfsmittel für die Beweisführung. Wir werden zunächst die grundlegende Funktionsweise von Spielen klären.

Definition 2.3.1 (endliches Spiel)**.** Sei A eine beliebige Menge, $n \in \mathbb{N}$ und $W \subseteq A^{2n}$. Es gibt zwei Spieler, Alice und Bob. Eine ***Partie*** von Alice ist eine endliche Folge $\bar{x} = (x_0, ..., x_{n-1}) \in A^n$, eine ***Partie*** von Bob ist eine endliche Folge $\bar{y} = (y_0, ..., y_{n-1}) \in A^n$.
Eine Folge $(\bar{x}; \bar{y}) := (x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1}) \in A^{2n}$ ist eine ***Partie*** im ***endlichen Spiel*** $\mathcal{G}_n(A, W)$. Bob ***gewinnt die Partie***, wenn $(\bar{x}; \bar{y}) \in W$ gilt. Man sagt

dann $(\bar{x};\bar{y})$ ist ein ***Gewinn für Bob***. Falls $(\bar{x};\bar{y})$ kein Gewinn für Bob ist, dann gewinnt Alice die Partie. $(\bar{x};\bar{y})$ ist dann ein ***Gewinn für Alice***.

Diese Definition lässt sich auf Spiele mit unendlich vielen Runden erweitern.

Definition 2.3.2 (unendliches Spiel)**.** Sei A eine beliebige Menge und $W \subseteq A^{\mathbb{N}}$. Es gibt weiterhin die beiden Spieler Alice und Bob. Eine ***Partie*** von Alice ist eine unendliche Folge $\bar{x} = (x_0, x_1, ...) \in A^{\mathbb{N}}$, eine ***Partie*** von Bob ist eine unendliche Folge $\bar{y} = (y_0, y_1, ...) \in A^{\mathbb{N}}$.
Eine unendliche Folge $(\bar{x};\bar{y}) := (x_0, y_0, x_1, y_1, ...) \in A^{\mathbb{N}}$ ist eine ***Partie*** im ***unendlichen Spiel*** $\mathcal{G}_\omega(A, W)$. Auch hier ist $(\bar{x};\bar{y})$ ein ***Gewinn*** für Bob, falls $(\bar{x};\bar{y}) \in W$ und sonst ein Gewinn für Alice.

Bemerkung 2.3.3. Diese Definitionen sind sehr formal und auf den ersten Blick ist nicht klar, was sie mit Spielen zu tun haben. Man kann sich das so vorstellen, dass Alice und Bob eine Menge A an möglichen Spielzügen zur Verfügung haben. Eine Partie beginnt damit, dass Alice ein Element $x_0 \in A$, also einen Spielzug, auswählt. Danach ist Bob an der Reihe und sucht $y_0 \in A$ aus. Anschließend beginnt die nächste Runde in der wieder zuerst Alice $x_1 \in A$ wählt und dann Bob $y_1 \in A$. In einem endlichen Spiel wird der Vorgang wiederholt, bis n Runden gespielt wurden. Eine Partie kann man folgendermaßen in einer Tabelle veranschaulichen:

Alice	x_0		x_1		...		x_n	
Bob		y_0		y_1		...		y_n

Ist die Partie zuende gespielt, wollen Alice und Bob wissen, wer gewonnen hat. Dafür gibt es die Menge W. Liegt die gespielte Partie in W, dann hat Bob gewonnen, ansonsten ist Alice die Gewinnerin. Bei einem unendlichen Spiel ist keine Rundenanzahl festgelegt, es geht theoretisch immer weiter. Später wird noch eine wichtige Klasse von unendlichen Spielen vorgestellt. Diese dauern zwar unendlich lange, es gibt aber immer einen Zeitpunkt, ab dem klar ist, welcher der beiden Spieler gewonnen hat, siehe 2.3.14.

Beispiel 2.3.4. Bob hat ein Kochbuch. Alice und Bob spielen folgendes Spiel in der Küche. Sie wählen abwechselnd Lebensmittel aus den Vorratsschränken. Sobald jeder zwei Zutaten ausgesucht hat, sucht Bob ein Rezept in seinem Kochbuch, für das er alle Zutaten benutzen kann. Falls er eines findet, hat er gewonnen, wenn nicht, hat er verloren.
Das können wir als das Spiel $\mathcal{G}_2(A, W)$ auffassen. Dabei ist $A = \{a_0, ..., a_n\}$ die Menge der verfügbaren Lebensmittel und

$$K = \{b = \{b_0, ..., b_i\} \mid b \textit{ ist Menge von Zutaten eines Rezepts im Kochbuch}\}.$$

Außerdem ist

$$W = \{(x_0, y_0, x_1, y_1) \in A^4 \mid \exists\, b \in K\{x_0, y_0, x_1, y_1\} \subseteq b\}.$$

A und K könnten zum Beispiel $A = \{$Zwiebeln, Radieschen, Erdbeeren, Mehl, Erdnüsse, Karotten, Frischkäse, Salz, Apfelsaft, Brot, Zucker, Backpulver, Öl$\}$ und $K = \{$belegtes Brot= $\{$Brot, Frischkäse, Radieschen, Salz$\}$, Erdbeerkuchen= $\{$Zucker, Mehl, Backpulver, Öl, Erdbeeren$\}\}$ sein. Eine mögliche Partie ist

Alice	Erdbeeren		Mehl	
Bob		Zucker		Backpulver

Bob kann die ausgesuchten Zutaten für einen Erdbeerkuchen $\in K$ benutzen, also hat er gewonnen.
Alice gewinnt zum Beispiel bei

Alice	Frischkäse		Karotten	
Bob		Zwiebeln		Öl

da Bob kein Rezept zur Verfügung steht, das diese Zutaten abdeckt.

Beispiel 2.3.5. Stellen wir uns vor, dass Alice Bob folgendes Spiel vorschlägt. „Wir würfeln abwechseln und jeder zählt fortlaufend seine eigenen Augenzahlen zusammen. Wenn du es schaffst drei Runden am Stück eine höhere Augensumme als ich zu haben, hast du gewonnen." Das ist ein unendliches Spiel $\mathcal{G}_\omega(A, W)$, weil Alice keine Anzahl an Runden festgelegt hat, in denen Bob die Gewinnvoraussetzung erfüllen muss. Die Menge der möglichen Züge ist hier $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. In diesem Fall bestimmen die Spieler nicht selbst welches Element in A sie wählen, sondern würfeln ihren Zug. Die Summe der Augenzahlen nach der n-ten Runde notieren wir als $S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ für Alice und $Q_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i$ für Bob. Die Menge W der Partien, die Bob gewinnt ist

$$W = \{(x_0, y_0, x_1, y_1, ...) \in A^{\mathbb{N}} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\, S_{n+i} < Q_{n+i} \text{ für } i = 0, 1, 2\}.$$

Definition 2.3.6 (Position)**.** Eine ***Position*** p im Spiel $\mathcal{G}_m(A, W)$ mit $m \in \mathbb{N}$ oder $m = \omega$ ist ein ***Anfangsstück*** einer Partie $(\bar{x}; \bar{y})$ in $\mathcal{G}_m(A, W)$. Das heißt

$$p = (x_0, y_0, ..., x_{k-1}, y_{k-1}) \in A^{2k}.$$

Im Fall $m \in \mathbb{N}$ muss $k \leq m$ erfüllt sein. $(\bar{x}; \bar{y})$ heißt dann ***Erweiterung von*** p. Wir schreiben auch $p = (\bar{x}; \bar{y})^k$. $\emptyset$ ist Anfangsstück jeder Partie und damit auch eine Position.

Beispiel 2.3.7. Eine Position im Beispiel 2.3.4, ist etwa (Öl, Erdbeeren).

Im Beispiel 2.3.5 ist $(1, 3, 5, 2, 1, 4, 5, 6)$ eine Position.

Die beiden Spieler können sich eine Strategie zurecht legen. Das bedeutet, dass sie ihren nächsten Zug davon abhängig machen, welche Elemente ihr Gegenspieler bisher gewählt hat.

Definition 2.3.8 ((Gewinn-)Strategie)**.** Eine ***Strategie von Alice*** im Spiel $\mathcal{G}_n(A, W)$ ist eine Folge

$$\sigma = (\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}) \text{ von Funktionen } \sigma_i : A^i \to A.$$

Alice hat ***die Strategie σ in der Partie $(\bar{x}; \bar{y})$ verfolgt***, falls

$$x_0 = \sigma_0(\emptyset) \text{ und } x_i = \sigma_i(y_0, ..., y_{i-1}) \text{ für } i = 1, ..., n-1 \text{ gilt.}$$

Allgemeiner ist eine ***Strategie in Position $(\bar{x}; \bar{y})^k$ von Alice*** im Spiel $\mathcal{G}_n(A, W)$ eine Folge

$$\sigma = (\sigma_0, ..., \sigma_{n-1-k}) \text{ von Funktionen } \sigma_i : A^i \to A.$$

Alice hat ***die Strategie σ nach der Position $(\bar{x}; \bar{y})^k$ in der Partie $(\bar{x}; \bar{y})$ verfolgt***, falls

$$x_k = \sigma_0(\emptyset) \text{ und } x_{k+i} = \sigma_i(y_k, ..., y_{k+i-1}) \text{ für } i = 1, ..., n-1-k \text{ gilt.}$$

σ ist eine ***Gewinnstrategie (in Position $(\bar{x}; \bar{y})^k$)***, falls Alice jede Partie (die eine Erweiterung von $(\bar{x}; \bar{y})^k$ ist), in der sie σ verfolgt hat, gewinnt.
Eine ***Strategie von Bob*** im Spiel $\mathcal{G}_n(A, W)$ ist eine Folge

$$\tau = (\tau_0, ..., \tau_{n-1}) \text{ von Funktionen } \tau_i : A^{i+1} \to A.$$

Bob hat ***die Strategie τ in der Partie $(\bar{x}; \bar{y})$ verfolgt***, falls

$$y_i = \tau_i(x_0, ..., x_i) \text{ für } i = 0, ..., n-1 \text{ gilt.}$$

Allgemeiner ist eine ***Strategie in Position $(\bar{x}; \bar{y})^k$ von Bob*** im Spiel $\mathcal{G}_n(A, W)$ eine Folge

$$\tau = (\tau_0, ..., \tau_{n-1-k}) \text{ von Funktionen } \tau_i : A^{i+1} \to A.$$

Bob hat ***die Strategie τ nach der Position $(\bar{x}; \bar{y})^k$ in der Partie $(\bar{x}; \bar{y})$ verfolgt***, falls

$$y_{k+i} = \tau_i(x_k, ..., x_{k+i}) \text{ für } i = 0, ..., n-1-k \text{ gilt.}$$

τ ist eine ***Gewinnstrategie (in Position*** $(\bar{x};\bar{y})^k$***)***, falls jede Partie (die eine Erweiterung von $(\bar{x};\bar{y})^k$ ist), in der Bob τ verfolgt hat, ein Gewinn für Bob ist.

Im unendlichen Spiel $\mathcal{G}_\omega(A,W)$ sind diese Begriffe fast gleich definiert. Eine Strategie ist hier eine unendliche Folge von Funktionen und die Bedingungen müssen für alle $i \in \mathbb{N}$ gelten.

Beispiel 2.3.9. Im Beispiel 2.3.4 hängen Gewinnstrategien für Alice und Bob davon ab, welche Rezepte im Kochbuch stehen.
Wenn wir im Würfelbeispiel 2.3.5 außer Acht lassen, dass die Spieler ihre Zahlen würfeln und sie selbst bestimmen lassen, ist eine Gewinnstrategie für Alice immer die 6 zu wählen, denn dann kann Bob nie eine größere Summe erreichen. Wenn Bob einmal vorne liegt, kann er ab dann immer dieselbe Zahl wie Alice wählen und wird nach weiteren zwei Zügen gewonnen haben. Das kann zum Beispiel so aussehen: $p = (2,1,3,5)$.

Alice	2		3	
Bob		1		5

Dann steht es $S_1 = 5$ zu $Q_1 = 6$ nach der zweiten Runde.
Definiere die Strategie $\tau := (\tau_0, \tau_1, ...)$ nach Position p mit

$$\tau_0(x_2) := x_2 \text{ und } \tau_1(x_2, x_3) := x_3$$

Wenn Bob diese Strategie nach Position p verfolgt, dann gilt $y_2 = x_2$ und $y_3 = x_3$. Daraus folgt $Q_2 = Q_1 + x_2 = Q_1 + y_2 > S_1 + y_2 = S_2$ und $Q_3 > S_3$. Nun ist es nicht mehr wichtig welche Züge Bob weiterhin wählt. τ_i, $i \geq 2$ können also beliebig definiert werden, denn

$$(2,1,3,5,x_2,x_2,x_3,x_3,x_4,y_4,x_5,y_5,x_6,y_6,...) \in W \text{ für alle } x_i, y_i \in A, i \geq 4.$$

τ ist also eine Gewinnstrategie in Position p für Bob.

Definition 2.3.10 (determiniert)**.** Ein Spiel heißt ***determiniert***, wenn einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Beispiel 2.3.11. Das Würfelspiel aus 2.3.5 ist ein determiniertes Spiel, wenn die Spieler nicht würfeln müssen, sondern die Zahlen selbst bestimmen dürfen. Denn Alice hat eine Gewinnstrategie, siehe 2.3.9.

Satz 2.3.12 (Unendliches Survival Lemma)**.** *Sei A eine Menge, $W \subseteq A^{\mathbb{N}}$ und $p = (x_0, y_0, ..., x_{k-1}, y_{k-1})$ eine Position im Spiel $\mathcal{G}_\omega(A,W)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Falls Alice in Position p keine Gewinnstrategie hat, dann gibt es für jedes $x_k \in A$ ein $y_k \in A$, sodass Alice auch in Position $p' = (x_0, y_0, ..., x_{k-1}, y_{k-1}, x_k, y_k)$ keine Gewinnstrategie hat.*

Beweis. Angenommen es gäbe doch ein $x_k \in A$, sodass Alice für alle $y_k \in A$ eine Gewinnstrategie $\sigma^{y_k} = (\sigma_0^{y_k}, \sigma_1^{y_k}, ...)$ in Position p' hat.
Dann kann wie folgt eine Strategie $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, ...)$ für Position p definiert werden. Alice wählt zuerst x_k, wartet dann ab, welches $y_k \in A$ Bob spielt und hält sich dann an die Strategie σ^{y_k}.
Genauer bedeutet das $\sigma_0(\emptyset) := x_k$, $\sigma_1(y_k) := \sigma_0^{y_k}(\emptyset)$ und

$$\sigma_j(y_k, y_{k+1}, ..., y_{k+j-1}) := \sigma_{j-1}^{y_k}(y_{k+1}, ..., y_{k+j-1}) \text{ für jedes } j \geq 2.$$

Behauptung: σ ist eine Gewinnstrategie von Alice in Position p.
Begründung: Andernfalls müsste es eine Partie $(\bar{x}; \bar{y})$ mit Anfangsstück p geben, für die Alice σ in Position p benutzt hat, die kein Gewinn für Alice ist. Da Alice σ benutzt hat ist auch $p' = (x_0, y_0, ..., x_{k-1}, y_{k-1}, x_k, y_k)$ Anfangsstück von $(\bar{x}; \bar{y})$. σ^{y_k} ist eine Gewinnstrategie in Position p' und deshalb gewinnt Alice, wenn sie die Strategie σ^{y_k} in p' benutzt. Genau so ist jedoch σ definiert. Das heißt, dass es keine solche Partie $(\bar{x}; \bar{y})$ geben kann. □

Korollar 2.3.13. *Das unendliche Survival Lemma 2.3.12 gilt in jeder Position, also insbesondere für $\emptyset$. Das heißt, wenn Alice zu Beginn keine Gewinnstrategie hat, dann kann Bob verhindern, dass sie später im Spiel eine Gewinnstrategie entwickeln kann.*

Definition 2.3.14 (offen)**.** Sei A eine Menge. Eine Teilmenge $W \subseteq A^{\mathbb{N}}$ heißt ***offen***, falls aus $(\bar{x}; \bar{y}) \in W$ folgt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $(\bar{x}'; \bar{y}') \in W$ für jede Erweiterung $(\bar{x}'; \bar{y}')$ von $(\bar{x}; \bar{y})^n$ gibt. Das heißt

$$(x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1}, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}, ...) \in W$$

für alle $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ mit $i \geq n$. W heißt ***abgeschlossen***, falls $A^{\mathbb{N}} \setminus W$ offen ist.
Das Spiel $\mathcal{G}_\omega(A, W)$ heißt ***offen (abgeschlossen)***, wenn W offen (abgeschlossen) ist.

Bemerkung 2.3.15. Die Definition 2.3.14 kann man wie folgt verstehen. Gewinnt Bob eine Partie in einem offenen Spiel, dann ist bereits nach endlich viele Zügen klar, dass er gewonnen hat. Die späteren Züge haben also keinen Einfluss darauf, wer gewinnt. Bei einem abgeschlossenen Spiel sind die Rollen von Alice und Bob vertauscht. Ein Gewinn von Alice steht dann nach endlich vielen Runden fest.

Beispiel 2.3.16. Das Würfelspiel aus Beispiel 2.3.5 ist ein offenes Spiel. Falls Bob eine Partie gewinnt, steht es nach endlich vielen Runden fest. Denn für $(x_0, y_0, x_1, y_1, ...) \in W$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $S_{n+i} < Q_{n+i}$ $\forall\, i \in \{0, 1, 2\}$ und S_{n+i} und Q_{n+i} hängen nur von den Zügen $x_0, y_0, x_1, y_1, ..., x_{n+i}, y_{n+i}$ ab. Die

Werte von x_k und y_k für $k > n+2$ ändern damit nicht mehr den Sieger der Partie.

Satz 2.3.17 (Gale–Stewart)**.** *Sei A eine beliebige Menge und $W \subseteq A^{\mathbb{N}}$ abgeschlossen. Dann ist $\mathcal{G}_\omega(A, W)$ determiniert.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass immer einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat. Falls Alice eine Gewinnstrategie hat, gibt es nichts mehr zu zeigen. Also angenommen Alice hat keine Gewinnstrategie. Dann müssen wir eine Gewinnstrategie τ für Bob finden. Die Strategie besteht im Wesentlichen darin zu verhindern, dass Alice gewinnt.
Sei $p = (x_0, y_0, ..., x_{k-1}, y_{k-1})$ eine Position in $\mathcal{G}_\omega(A, W)$.
Fall 1: Alice hat keine Gewinnstrategie in p.
Aus dem unendlichen Survival Lemma 2.3.12 wissen wir, dass es für jedes $x_k \in A$ ein $y_k \in A$ gibt, sodass Alice auch in der Position $p' = (x_0, y_0, ..., x_{k-1}, y_{k-1}, x_k, y_k)$ keine Gewinnstrategie hat. Wir definieren $f(p, x_k) := y_k$.
Fall 2: Alice hat eine Gewinnstrategie in p.
Definiere $f(p, x_k) := a$ für alle $x_k \in A$ und ein beliebiges $a \in A$.
Nun kann die Strategie $\tau = (\tau_0, \tau_1, ...)$ definiert werden durch

$$\tau_0(x_0) := f(\emptyset, x_0) \text{ und } \tau_{i+1}(x_0, ..., x_{i+1}) := f(p_{i+1}, x_{i+1})$$

$$\text{wobei } p_{i+1} := (x_0, \tau_0(x_0), x_1, \tau_1(x_0, x_1), ..., x_i, \tau_i(x_0, ..., x_i)).$$

Wir haben angenommen, dass Alice zu Beginn keine Gewinstrategie hat, das bedeutet Alice hat keine Gewinnstrategie in $p_0 = \emptyset$. Für $\tau_0(x_0) := f(\emptyset, x_0)$ tritt also Fall 1 ein und wir haben nach der ersten Runde die Position $p_1 := (x_0, \tau_0(x_0))$, für die Alice noch immer keine Strategie hat. Für $\tau_1(x_0, x_1) = f(p_1, x_1)$ tritt also wieder Fall 1 ein. Es ist leicht zu sehen, dass Fall 2 nie eintritt, wenn Bob τ verfolgt. Wir haben Fall 2 nur gebraucht, um die Strategie definieren zu können, denn dafür brauchen wir Funktionen $\tau_i : A^{i+1} \to A$. τ_i muss also auch für Positionen, in denen Bob τ nicht verfolgt hat, definiert sein.
Nun können wir aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{G}_\omega(A, W)$ folgern, dass τ eine Gewinnstrategie ist. Wir nehmen an, dass das nicht der Fall ist. Dann gibt es eine Partie $(\bar{x}; \bar{y}) \in A^{\mathbb{N}} \setminus W$, für die Bob die Strategie τ verfolgt hat. Da W abgeschlossen ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass jede Erweiterung von $(\bar{x}; \bar{y})^n$ ein Gewinn für Alice ist. Dann ist jede Strategie in Position $(\bar{x}; \bar{y})^n$ von Alice eine Gewinnstrategie und für $(\bar{x}; \bar{y})^n$ tritt Fall 2 ein. Das ist jedoch nach obiger Argumentation nicht möglich, wenn Bob τ verfolgt hat. $\square$

2.4 Ehrenfeucht–Fraïssé Spiele

Wir kommen jetzt zu einem speziellen Spiel, das auf zwei Strukturen gespielt wird. Diese Art von Spiel wird für Aussagen über partielle Isomorphie benötigt.

Definition 2.4.1 (Ehrenfeucht-Fraïsse Spiele)**.** Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit disjunkten Universen A und B. Sei $n \in \mathbb{N}$.
$W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \{p = (x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1}) \in (A \cup B)^{2n} \mid p \text{ erfüllt (1) und (2)}\}$ mit

(1) $x_i \in A \Leftrightarrow y_i \in B$ für $i = 0, ..., n-1$ und
(2) $f_p := \{(v_0, v'_0), ..., (v_{n-1}, v'_{n-1})\} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, siehe 2.2.1, wobei

$$v_i := \begin{cases} x_i & \text{, falls } x_i \in A \\ y_i & \text{, falls } y_i \in A \end{cases} \qquad\qquad v'_i := \begin{cases} x_i & \text{, falls } x_i \in B \\ y_i & \text{, falls } y_i \in B. \end{cases}$$

Das Spiel $\mathcal{G}_n(A \cup B, W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ heißt ***Ehrenfeucht-Fraïsse Spiel*** und man schreibt $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

$$W_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \{(\bar{x}; \bar{y}) \mid \bar{x}, \bar{y} \in (A \cup B)^{\mathbb{N}} \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}\, (\bar{x}; \bar{y})^n \in W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}.$$

$\mathcal{G}_\omega(A \cup B, W_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ heißt ***unendliches Ehrenfeucht-Fraïsse Spiel***, schreibe $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Bemerkung 2.4.2. Für $z \in A \cup B$ gilt $z \in A \Leftrightarrow z \notin B$, weil A und B disjunkt sind. Deshalb ist die Bedingung (1) aus Definition 2.4.1 äquivalent zu $x_i \in B \Leftrightarrow y_i \in A$ für $i = 0, ..., n-1$. Das heißt, dass $\{v_i, v'_i\} = \{x_i, y_i\}$ für $i = 0, ..., n-1$ gilt. Bei dieser Darstellung geht zwar die Information darüber verloren wer von den beiden Spielern v_i und wer v'_i gewählt hat, dafür ist klar erkenntlich welches Element aus A und welches aus B stammt. Man nennt v_i und v'_i ***korrespondierende Elemente***. Ist (1) erfüllt, dann ist f_p eine partielle Abbildung von A nach B. Die Forderung von Bedingung (2) ist also sinnvoll.

Satz 2.4.3. *$EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist ein abgeschlossenes Spiel.*

Beweis. Schreibe $W := W_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und $W^c := (A \cup B)^{\mathbb{N}} \setminus W$. $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist abgeschlossen, wenn W abgeschlossen ist. Wir müssen zeigen, dass W^c offen ist, siehe Definition 2.3.14.
Sei $(\bar{x}; \bar{y}) \in W^c$, also $(\bar{x}; \bar{y}) \notin W$. Dann gibt es nach der Definition von W ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $(\bar{x}; \bar{y})^n \notin W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Für jede Erweiterung $(\bar{x}'; \bar{y}')$ von $(\bar{x}; \bar{y})^n$ gilt $(\bar{x}'; \bar{y}')^n = (\bar{x}; \bar{y})^n \notin W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Diese Erweiterung kann also auch nicht in W liegen. Es gilt $(\bar{x}'; \bar{y}') \in W^c$. $\square$

Bemerkung 2.4.4. Satz 2.4.3 bedeutet, dass ein Gewinn von Alice nach endlich vielen Schritten feststeht. Es reicht also, dass Bob Bedingung (2) aus der Definition 2.4.1 von $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein einziges Mal verletzt. Bob kann Bedingung (1) auf jeden Fall immer erfüllen, da A und B nicht leer sind und er Elemente mehrmals wählen kann.

Korollar 2.4.5. *Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen. Dann ist $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ein determiniertes Spiel.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 2.4.3 und dem Satz von Gale-Stewart 2.3.17. □

2.5 Beispiel: Ehrenfeucht–Fraïssé Spiele auf Graphen

Da der Umgang mit Ehrenfeucht-Fraïsse Spielen bisher sehr abstrakt war, werden wir im Folgenden ein Beispiel genauer betrachten. Graphen sind sehr anschaulich und eignen sich daher gut, um ein Gefühl für Ehrenfeucht-Fraïsse Spiele zu erhalten.

Bemerkung 2.5.1. Sei $L_\mathcal{G} = (\emptyset, \emptyset, \{E\})$ die Sprache der Graphen. Sie enthält die zweistellige Relation E und weder Konstanten noch Funktionen. Ein Graph $\mathcal{A} = (A, E^\mathcal{A})$ ist eine Menge A von Knoten zusammen mit der binären Relation $E^\mathcal{A} = \{(x, y) \in A^2 \mid x$ und y sind in $\mathcal{A}$ durch eine Kante verbunden$\}$.
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Graphen mit $A \cap B = \emptyset$. Im Spiel $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ versucht Alice einen Unterschied zwischen den Graphen aufzuzeigen, während Bob behauptet, dass es keinen Unterschied gibt. Es kann passieren, dass es einen echten Unterschied zwischen den Graphen gibt und Alice dennoch nicht gewinnt.
Zur Vereinfachung werden wir E statt $E^\mathcal{A}$ und $E^\mathcal{B}$ schreiben, wenn aus dem Kontext klar ist in welchem Graphen wir uns befinden.

Lemma 2.5.2. *Bedingung (2) aus Definition 2.4.1 von $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist für $L = L_\mathcal{G}$, Graphen $\mathcal{A} = (A, E^\mathcal{A})$, $\mathcal{B} = (B, E^\mathcal{B})$ und $p = (x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1})$ äquivalent zu*

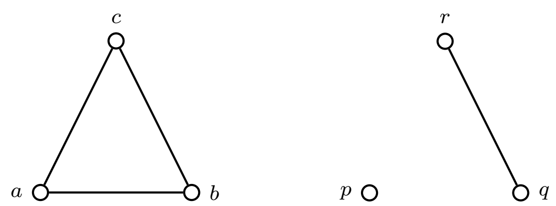
$$\text{(2.1)}\ \forall\, i, j < n\, (v_i = v_j \Leftrightarrow v'_i = v'_j)$$
$$\text{(2.2)}\ \forall\, i, j < n\, (v_i E v_j \Leftrightarrow v'_i E v'_j).$$

mit v_i, v'_i wie in Definition 2.4.1.

Beweis. Zur Erinnerung: (2) sagt $f_p := \{(v_0, v'_0), ..., (v_{n-1}, v'_{n-1})\} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
Zeige zuerst, dass (2.1) aus (2) folgt.
Angenommen es gibt $i, j < n$, sodass $v_i = v_j \not\Leftrightarrow v'_i = v'_j$ gilt.
Falls $v_i = v_j$ und $v'_i \neq v'_j$, dann ist $f_p(v_i) = v'_i \neq v'_j = f_p(v_j)$. f_p ist also keine

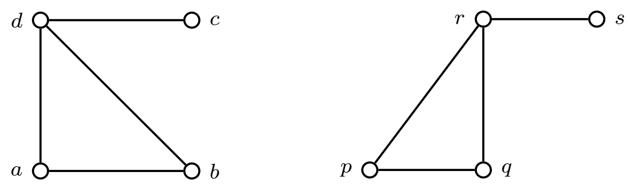
Funktion und damit $f_p \notin Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
Falls $v_i \neq v_j$ und $v'_i = v'_j$, dann gilt $f_p(v_i) = v'_i = v'_j = f_p(v_j)$. Das heißt f_p ist nicht injektiv. Daraus folgt, dass es keine injektive Erweiterung von f_p gibt und insbesondere $f_p \notin Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
Zeige nun, dass (2.2) aus (2) folgt.
Angenommen es gibt $i, j < n$ mit $v_i E v_j \not\Leftrightarrow v'_i E v'_j$. Dann ist jede Erweiterung von f_p nicht mit der Relation E verträglich (Bedingung (4) aus der Definition von Isomorphismen 1.0.4 ist nicht erfüllt) und damit $f_p \notin Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
Schließlich folgt (2) aus (2.1) und (2.2).
Aus Proposition 2.1.8 folgt, dass $dom(f_p) = \{v_0, ..., v_{n-1}\}$ das Universum von $[dom(f_p)]_{\mathcal{A}}$ ist und $rng(f_p) = \{v'_0, ..., v'_{n-1}\}$ das Universum von $[rng(f_p)]_{\mathcal{B}}$. Nun ist f_p schon ein Isomorphismus zwischen $[dom(f_p)]_{\mathcal{A}}$ und $[rng(f_p)]_{\mathcal{B}}$, denn alle Bedingungen aus der Definition 1.0.4 sind erfüllt:
(1) f_p ist eine Bijektion, denn wegen (2.1) ist f_p injektiv und da $|dom(f_p)| = |rng(f_p)| \in \mathbb{N}$ auch surjektiv.
(2) und (3) entfallen, da $L_{\mathcal{G}}$ keine Konstanten- und Funktionszeichen enthält.
(4) enspricht genau (2.2), da E die einzige Relation ist. $\square$

Beispiel 2.5.3. Für das Ehrenfeucht-Fraïsse Spiel $EF_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mit zwei Runden auf den Graphen $\mathcal{A}$ (links) und $\mathcal{B}$ (rechts) hat Alice eine Gewinnstrategie.



Wählt Alice $x_0 = v'_0 = p$, dann gilt $\neg v'_0 E v'_1$, aber $v_0 E v_1$ für jede Wahl von y_0, x_1 und y_1. Denn in $\mathcal{A}$ sind alle Knoten miteinander verbunden und p ist ein isolierter Knoten in $\mathcal{B}$.

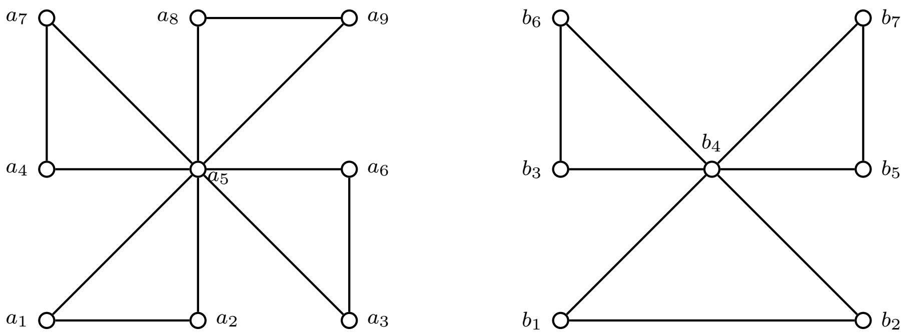
Beispiel 2.5.4. Die Graphen $\mathcal{A}$ (links) und $\mathcal{B}$ (rechts) sind isomorph und Bob hat eine Gewinnstrategie in $EF_4(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.



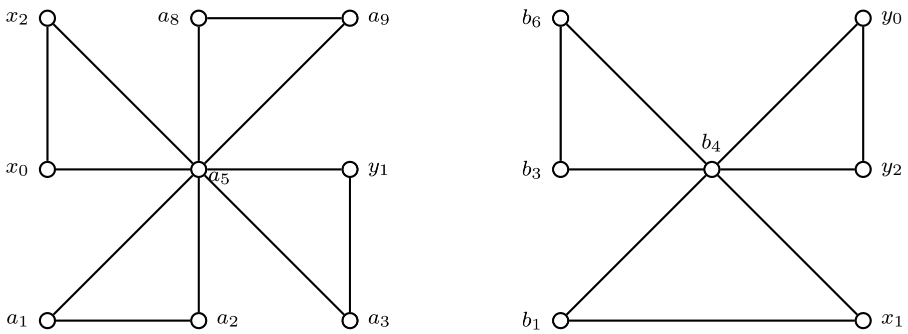
Wählt Alice c oder s, muss Bob den jeweils anderen wählen und ebenso für d und r. Wählt Alice a, b, p oder q, dann muss Bob einen dieser Knoten im anderen Graphen wählen. Bob kann ausnutzen, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph sind.

Ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Isomorphismus, dann kann Bob $y_i = F(x_i)$, falls $x_i \in A$ und $y_i = F^{-1}(x_i)$, falls $x_i \in B$ liegt, wählen.

Beispiel 2.5.5. Bob kann auch dann gewinnen, wenn die beiden Graphen nicht isomorph sind. Hier sind $\mathcal{A}$ (links) und $\mathcal{B}$ (rechts) nicht isomorph und Bob hat eine Gewinnstrategie in $EF_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.



Wählt Alice eine der beiden Mitten a_5 oder b_4, dann muss Bob die jeweils andere Mitte wählen. Wählt Alice einen der äußeren Knoten, muss Bob darauf achten, ob der andere Knoten im selben Dreieck schon gewählt wurde oder nicht und dementsprechend einen Knoten im anderen Graphen, für den dasselbe gilt, wählen.
Eine Partie, in der Bob diese Strategie verfolgt, könnte beispielsweise so aussehen:



Das funktioniert nur, weil $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ jeweils aus gleichen Dreiecken aufgebaut sind und beide Graphen mindestens so viele Dreiecke haben, wie Runden gespielt werden, also drei.
Erhöht man die Rundenanzahl auf vier, dann gibt es eine Gewinnstrategie in $EF_4(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ für Alice. Wählt sie ihre vier Knoten in $\mathcal{A}$ so, dass diese jeweils in eigenen Dreiecken liegen, dann kann Bob nicht gewinnen. Alice kann beispielsweise $\bar{x} = (a_1, a_3, a_4, a_8)$ wählen. Diese vier Knoten sind voneinander isoliert. Wählt Bob vier Knoten in $\mathcal{B}$, dann sind mindestens zwei davon durch eine Kante verbunden. Damit hat Alice einen Unterschied aufgezeigt und gewinnt.

2.6 Korrespondenz zwischen Ehrenfeucht–Fraïssé Spielen und Back-and-Forth Mengen

Wir haben nun alle Begriffe und Sätze besprochen, die wir für den angekündigten Zusammenhang zwischen partieller Isomorphie und unendlichen Ehrenfeucht-Fraïsse Spielen benötigen. Die folgenden Sätze liefern eine Methode, um die partielle Isomorphie zweier Strukturen zu prüfen, ohne die Existenz einer Back-and-Forth Menge nachweisen zu müssen.

Satz 2.6.1. *Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit Universen A und B. Wenn Bob eine Gewinnstrategie in $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat, dann ist $\mathcal{A}$ partiell isomorph zu $\mathcal{B}$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine Strategie $\tau = (\tau_0, \tau_1, ...)$ für Bob gibt, die eine Gewinnstrategie ist. Definiere die Menge aller möglichen Partien, in denen Bob τ verfolgt hat, als

$$Q := \{(x_0, \tau_0(x_0), x_1, \tau_1(x_0, x_1), ...) \mid (x_0, x_1, ...) \in (A \cup B)^{\mathbb{N}}\}.$$

Dann gilt $Q \subseteq W_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, weil τ eine Gewinnstrategie ist. Definiere nun

$$\begin{aligned} P : &= \{f_p \mid p \text{ ist Position in } EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ und } \exists\, q \in Q\ p \subseteq q\} \\ &= \{f_p \mid \exists\, q \in Q \text{ sodass } p \text{ Anfangsstück von } q \text{ ist}\}. \end{aligned}$$

wobei $f_p := \{(v_0, v_0'), ..., (v_{n-1}, v_{n-1}')\}$ für $p = (x_0, y_0, ..., x_{n-1}, y_{n-1})$ mit v_i, v_i' wie in Definition 2.4.1.
Behauptung: P ist eine Back-and-Forth Menge für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Begründung: Zunächst ist $P \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, denn für jedes Anfangsstück p der Länge $n \in \mathbb{N}$ von $q \in W_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist $p \in W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und damit $f_p \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. A und B sind Universen, also nach Definition nichtleer. Deshalb ist $(A \cup B)^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$. Daraus folgt, dass Q nichtleer ist und schließlich gilt $P \neq \emptyset$.
Zeige nun gemeinsam (1) und (2) aus der Definition von Back-and-Forth Mengen 2.2.3.
Sei $f_p \in P$ mit $p = (x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{n-1}, \tau_{n-1}(x_0, ..., x_{n-1}))$ und $z \in A \cup B$. Definiere $\tilde{p} = (x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{n-1}, \tau_{n-1}(x_0, ..., x_{n-1}), z, \tau_n(x_0, ..., x_{n-1}, z))$. Dann gilt $f_p \subseteq f_{\tilde{p}}$ und $f_{\tilde{p}} \in P$.
Falls $z \in A$, dann ist $z = v_n$ mit der Notation aus 2.4.1 und es gilt $z \in dom(f_{\tilde{p}})$. Ist $z \in B$, dann ist $z = v_n'$ und $z \in rng(f_{\tilde{p}})$.
Da P eine Back-and-Forth Menge für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist, gilt nun $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$. □

Satz 2.6.2. *Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit Universen A und B. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind genau dann partiell isomorph, wenn Bob eine Gewinnstrategie in $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat.*

Beweis. Dass $\mathcal{A}$ partiell isomorph zu $\mathcal{B}$ ist, falls Bob eine Gewinnstrategie hat, haben wir in Satz 2.6.1 bereits gezeigt.
Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ partiell isomorph sind und konstruieren eine Gewinnstrategie $\tau = (\tau_0, \tau_1, ...)$ für Bob. Das heißt, dass für beliebige $x_0, x_1, ... \in A \cup B$

$$(x_0, \tau_0(x_0), x_1, \tau_1(x_0, x_1), ...) \in W_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ gilt.}$$

Unsere Konstruktion muss somit für alle $i \in \mathbb{N}$

$$(x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{i-1}, \tau_{i-1}(x_0, ..., x_{i-1})) \in W_i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ erfüllen.}$$

Da $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$, gibt es eine Back-and-Forth Menge P für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Wir konstruieren τ_i rekursiv. Falls $i = 0$ ist, gibt es ein $f_0 \in P$, da P nichtleer ist. Falls $i > 0$ gilt, nehmen wir an, dass f_i und $\tau_{i-1} : (A \cup B)^i \to A \cup B$ bereits so konstruiert wurden, dass für beliebige $x_0, ..., x_{i-1} \in A \cup B$

$$\begin{aligned}&\{(v_0, v_0'), ..., (v_{i-1}, v_{i-1}')\} \subseteq f_i \text{ und}\\ &(x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{i-1}, \tau_{i-1}(x_0, ..., x_{i-1})) \in W_i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ gelten.}\end{aligned}$$

Sei nun $x_i \in A \cup B$ der $(i+1)$-te Zug von Alice.
Für den Fall, dass $x_i \in A$ liegt, gibt es ein $f_{i+1} \in P$ mit $f_i \subseteq f_{i+1}$ und $x_i \in dom(f_{i+1})$. Wir bezeichnen $v_i := x_i$ und $\tau_i(x_0, ..., x_i) := v_i' := f_{i+1}(x_i) \in B$. Falls $x_i \in B$ liegt, gibt es ein $f_{i+1} \in P$ mit $f_i \subseteq f_{i+1}$ und $x_i \in rng(f_{i+1})$. Hier nennen wir $v_i' := x_i$ und $\tau_i(x_0, ..., x_i) := v_i := f_{i+1}^{-1}(x_i) \in A$. $f_{i+1}^{-1}(x_i)$ ist eindeutig, da f_{i+1}^{-1} injektiv ist.
Da genau einer der beiden Fälle eintritt, bekommen wir damit einen partiellen Isomorphismus $f_{i+1} \in P$ mit $\{(v_0, v_0'), ..., (v_i, v_i')\} \subseteq f_{i+1}$. Nach 2.2.2 gilt dann auch $\{(v_0, v_0'), ..., (v_i, v_i')\} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Somit ist

$$(x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{i-1}, \tau_{i-1}(x_0, ..., x_{i-1}), x_i, \tau_i(x_0, ..., x_i)) \in W_{i+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

τ erfüllt damit alle Eigenschaften einer Gewinnstrategie für Bob und die Aussage ist gezeigt. ☐

Korollar 2.6.3. *Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen. Alice hat genau dann eine Gewinnstrategie in $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn $\mathcal{A} \not\simeq_p \mathcal{B}$ gilt.*

Beweis. $\mathcal{A} \not\simeq_p \mathcal{B} \overset{2.6.2}{\Longleftrightarrow}$ Bob hat keine Gewinnstrategie $\overset{2.4.5}{\Longleftrightarrow}$ Alice hat eine Gewinnstrategie. ☐

2.7 Verallgemeinerung: Back-and-Forth Folgen

Das Konzept der Back-and-Forth Mengen lässt sich auf Back-and-Forth Folgen verallgemeinern. Auch in diesem Fall gibt es eine Verbindung zu Ehrenfeucht-Fraïsse Spielen.

Definition 2.7.1 (Back-and-Forth Folge)**.** Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit Universen A und B. Eine ***Back-and-Forth Folge*** für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist eine endliche Folge $(P_i)_{i \leq n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) $\emptyset \neq P_n \subseteq P_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq P_0 \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

(2.1) $\forall f \in P_{i+1} \; \forall a \in A \; \exists g \in P_i \; (f \subseteq g \wedge a \in dom(g))$ für $i < n$

(2.2) $\forall f \in P_{i+1} \; \forall b \in B \; \exists g \in P_i \; (f \subseteq g \wedge b \in rng(g))$ für $i < n$.

Falls es eine Back-and-Forth Folge $(P_i)_{i \leq n}$ zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt, schreiben wir $\mathcal{A} \simeq_p^n \mathcal{B}$.

Korollar 2.7.2. *Falls $\mathcal{A}$ partiell isomorph zu $\mathcal{B}$ ist, dann gilt $\mathcal{A} \simeq_p^n \mathcal{B}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wegen $\mathcal{A} \simeq_p \mathcal{B}$ gibt es eine Back-and-Forth Menge P für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. $(P_i)_{i \leq n}$ mit $P_i := P$ für alle $i \leq n$ ist eine Back-and-Forth Folge und damit gilt $\mathcal{A} \simeq_p^n \mathcal{B}$. □

Beispiel 2.7.3. Sei $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, <)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{N} + \mathbb{N}, <')$ wobei $<$ die übliche Relation auf den natürlichen Zahlen ist und

$$\begin{aligned} \mathbb{N} + \mathbb{N} :=& \{(k, i) \mid k \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1\}\} \text{ mit} \\ <' :=& \{(k, i), (l, j) \mid (k, i), (l, j) \in \mathbb{N} + \mathbb{N} \wedge (i < j \vee (i = j \wedge k < l))\}. \end{aligned}$$

Man kann sich $(\mathbb{N} + \mathbb{N}, <')$ als Kopie von $\mathbb{N}$, an die eine zweite Kopie von $\mathbb{N}$ angereiht wurde, vorstellen.

Definiere $P_2 := \{\emptyset\}$

$$\begin{aligned} P_1 :=& P_2 \cup \{\{(0, (0, 0))\}\} \cup \{\{(x, y)\} \mid 0 \neq x \in \mathbb{N}, \, (0, 0) \neq y \in \mathbb{N} + \mathbb{N}\} \\ P_0 :=& P_1 \cup \{\{(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})\} \mid x < \tilde{x} \in \mathbb{N}, \, y <' \tilde{y} \in \mathbb{N} + \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Das ist eine Back-and-Forth Folge, denn:
Bedingung (1) aus Definition 2.7.1 ist offensichtlich erfüllt.
Für (2.1) müssen wir zunächst zeigen, dass für ein $f \in P_2$ und $a \in \mathbb{N}$ eine Funktion $g \in P_1$ existiert, die f erweitert und a abbildet. In P_2 gibt es nur eine Funktion, also gilt $f = \emptyset$. Für $a = 0$ wählen wir $g := \{(0, (0, 0))\} \in P_1$ und für $a \neq 0$ können wir $g := \{(a, (1, 0))\} \in P_1$ wählen.
Sei nun $f \in P_1$. Wir können annehmen, dass $f \in P_1 \setminus P_2$ gilt.

Fall 1: $f = \{(0,(0,0))\}$. Wenn $a = 0$ gilt, funktioniert $g = f$, ansonsten wählen wir $g := \{(0,(0,0)),(a,(1,0))\} \in P_0$.
Fall 2: $f = \{(x,y)\}$ für $0 \neq x \in \mathbb{N}$ und $(0,0) \neq y \in \mathbb{N}+\mathbb{N}$. Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0,1\}$ mit $y = (k,i)$. Falls $x = a$ gilt, funktioniert $g := f$. Für $a < x$, wähle $g := \{(a,(0,0)),(x,y)\} \in P_0$ und für $x < a$ sei $g := \{(x,y),(a,(k+1,i))\} \in P_0$.
Bedingung (2.2) kann man analog zu (2.1) beweisen.
Damit gilt $\mathcal{A} \simeq_p^2 \mathcal{B}$.

Satz 2.7.4. *Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit Universen A und B. Wenn Bob eine Gewinnstrategie in $EF_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ hat, dann gibt es eine Back-and-Forth Folge $(P_i)_{i\leq n}$ für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass Bob eine Gewinnstrategie $\tau = (\tau_0, \ldots\ldots, \tau_{n-1})$ in $EF_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$ hat. Definiere die Menge aller möglichen Partien, in denen Bob τ verfolgt hat, als

$$Q := \{(x_0, \tau_0(x_0), \ldots\ldots, x_{n-1}, \tau_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})) \mid x_0, \ldots, x_{n-1} \in A \cup B\}.$$

Definiere $(P_i)_{i\leq n}$ folgendermaßen:
$P_n := \{\emptyset\}$
$P_{n-(i+1)} := P_{n-i} \cup \{f_p \mid p = (x_0, \tau_0(x_0), \ldots\ldots, x_i, \tau_i(x_0, \ldots, x_i)),\ x_0, \ldots, x_i \in A \cup B\}$
für $i = 0, \ldots, n-1,$ wobei $f_p := \{(v_0, v_0'), \ldots, (v_i, v_i')\}$ für $p = (x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)$ mit v_k, v_k' wie in Definition 2.4.1.

Behauptung: $(P_i)_{i\leq n}$ ist eine Back-and-Forth Folge für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
Begründung: Wir zeigen die Bedingungen aus Definition 2.7.1.
(1) $\emptyset \neq P_n \subseteq P_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq P_0 \subseteq Part(\mathcal{A},\mathcal{B})$ gilt, denn $Q \subseteq W_n(\mathcal{A},\mathcal{B})$.
Bedingungen (2.1) und (2.2) können wir gemeinsam zeigen.
Sei $z \in A \cup B$ und $f_p \in P_n$. Das heißt $f_p = p = \emptyset$. Definiere $p' = (z, \tau_0(z))$.
Dann gilt $f_{p'} \in P_{n-(0+1)} = P_{n-1}$ und $f_p \subseteq f_{p'}$.
Falls $z \in A$ gilt, dann ist $v_0 = z$ und $f_{p'}(v_0) = v_0' = \tau_0(z)$. Also gilt $z \in dom(f_{p'})$.
Falls $z \in B$ liegt, dann gilt $v_0 = \tau_0(z)$ und $f_{p'}(v_0) = v_0' = z$. Damit gilt $z \in rng(f_{p'})$.
Sei nun $z \in A \cup B$ und $f_p \in P_{n-i}$ mit $0 < i < n$.

Das heißt $p = (x_0, \tau_0(x_0), \ldots\ldots, x_{i-1}, \tau_{i-1}(x_0, \ldots, x_{i-1}))$.
Definiere $p' := (x_0, \tau_0(x_0), \ldots\ldots, x_{i-1}, \tau_{i-1}(x_0, \ldots, x_{i-1}), z, \tau_i(x_0, \ldots, x_{i-1}, z))$.

Dann gilt $f_{p'} \in P_{n-(i+1)}$.
Falls $z \in A$ gilt, dann ist $v_i = z$ und $f_{p'}(v_i) = v_i' = \tau_i(x_0, \ldots, x_{i-1}, z)$. Damit ist

$z \in dom(f_{p'})$. Falls $z \in B$ gilt, dann ist $v_i = \tau_i(x_0, ..., x_{i-1}, z)$ und $f_{p'}(v_i) = v_i' = z$. Damit ist $z \in rng(f_{p'})$. □

Satz 2.7.5. *Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ L-Strukturen mit Universen A und B. Es gibt genau dann eine Back-and-Forth Folge $(P_i)_{i \leq n}$ für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, wenn Bob eine Gewinnstrategie in $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hat.*

Beweis. Dass $\mathcal{A} \simeq_p^n \mathcal{B}$ gilt, falls Bob eine Gewinnstrategie hat, haben wir bereits in Satz 2.7.4 gezeigt.
Wir nehmen nun also an, dass es eine Back-and-Forth Folge $(P_i)_{i \leq n}$ für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt und konstruieren eine Gewinnstrategie $\tau = (\tau_0, ..., \tau_{n-1})$ für Bob in $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Seien $x_0, ..., x_{n-1} \in A \cup B$ beliebig. Dann muss für τ

$$p(n) := (x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{n-1}, \tau_{n-1}(x_0, ..., x_{n-1})) \in W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ gelten.}$$

Das heißt, dass (1) $x_i \in A \Leftrightarrow \tau_i(x_0, ..., x_i) \in B$ für $i = 0, ..., n-1$ und
(2) $f_{p(n)} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ erfüllt sind.
Wir konstrieren τ_i rekursiv. Falls $i = 0$ ist, gibt es $f_0 \in P_n$, da P_n nichtleer ist.
Fall 1: $x_0 \in A$. Weil $(P_i)_{i \leq n}$ eine Back-and-Forth Folge ist, gibt es $f_1 \in P_{n-1}$ mit $f_0 \subseteq f_1$ und $x_0 \in dom(f_1)$. Setze $\tau_0(x_0) := f_1(x_0) \in B$.
Fall 2: $x_0 \in B$. Dann gibt es $f_1 \in P_{n-1}$ mit $f_0 \subseteq f_1$ und $x_0 \in rng(f_1)$. Wähle $\tau_0(x_0) := f_1^{-1}(x_0) \in A$. Dieses Element ist eindeutig, denn f_1 ist injektiv.
Damit gilt $f_{p(1)} \subseteq f_1$ für $p(1) := (x_0, \tau_0(x_0))$.
Sei nun $0 < i < n$. Wir nehmen an, dass $f_i \in P_{n-i}$ und $\tau_k(x_0, ..., x_k)$ für $k < i$ bereits so konstruiert wurden, dass

$$f_{p(i)} \subseteq f_i \text{ für } p(i) := (x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{i-1}, \tau_{i-1}(x_0, ..., x_{i-1})) \text{ gilt.}$$

Fall 1: $x_i \in A$. Es gibt $f_{i+1} \in P_{n-(i+1)}$ mit $f_i \subseteq f_{i+1}$, sodass $x_i \in dom(f_{i+1})$. Wähle $\tau_i(x_0, ..., x_i) := f_{i+1}(x_i) \in B$.
Fall 2: $x_i \in B$. Dann gibt es $f_{i+1} \in P_{n-(i+1)}$ mit $f_i \subseteq f_{i+1}$, sodass $x_i \in rng(f_{i+1})$. Definiere $\tau_i(x_0, ..., x_i) := f_{i+1}^{-1}(x_i) \in A$. Diese Wahl ist eindeutig, weil f_{i+1} injektiv ist.
Nun gilt $f_{p(i+1)} \subseteq f_{i+1}$. Im letzten Schritt $i = n-1$ bekommen wir $f_n \in P_0 \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mit $f_{p(n)} \subseteq f_n$. Nach Lemma 2.2.2 gilt dann $f_{p(n)} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und (2) ist erfüllt. Bedingung (1) gilt nach Konstruktion. Damit ist τ eine Gewinnstrategie für Bob. □

3 Partielle Isomorphie dichter linearer Ordnungen

In diesem Abschnitt werden wir eine Anwendung der vorgestellten Theorie betrachten. Wir beweisen das Resultat aus dem ersten Abschnitt noch einmal.

Satz 3.0.1. *Für dichte lineare Ordnungen $\mathcal{A} = (A, <_A)$ und $\mathcal{B} = (B, <_B)$ ohne Endpunkte gibt es eine Gewinnstrategie für Bob in $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Beweis. Wir konstruieren eine Gewinnstrategie $\tau = (\tau_0, \tau_1, ...)$. Seien $x_0, x_1, ... \in A \cup B$ beliebig. Dann muss

$$(x_0, \tau_0(x_0), x_1, \tau_1(x_0, x_1), ...) \in W_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ gelten.}$$

Das heißt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{n-1}, \tau_{n-1}(x_0, ..., x_{n-1})) \in W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ gilt.}$$

Wir definieren $\tau_n(x_0, ..., x_n)$ rekursiv und benutzen wieder die Notation aus 2.4.1. Falls $x_0 \in A$ gilt, wählen wir $\tau_0(x_0) \in B$ beliebig. Für $x_0 \in B$ definieren wir $\tau_0(x_0) \in A$ beliebig. Es ist leicht zu sehen, dass $(x_0, \tau_0(x_0)) \in W_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ erfüllt ist.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, dass $\tau_i(x_0, ..., x_i)$ für alle $i = 0, ..., n-1$ bereits so konstruiert wurde, dass

$$(x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{n-1}, \tau_{n-1}(x_0, ..., x_{n-1})) \in W_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \text{ gilt.}$$

Zuerst nehmen wir an, dass $x_n \in A$ gilt und benennen $v_n := x_n$.
Fall 1: $x_n = v_i$ für ein $i < n$. Wähle $v'_n := v'_i$.
Fall 2: $x_n <_A v_i$ für alle $i < n$. Da $\mathcal{B}$ keinen Endpunkt hat, gibt es $v'_n \in B$ mit $v'_n <_B v'_i$ für alle $i < n$.
Fall 3: $v_i <_A x_n$ für alle $i < n$. Auch in diesem Fall können wir ausnutzen, dass es keinen Endpunkt in $\mathcal{B}$ gibt. Wir finden $v'_n \in B$, mit $v'_i <_B v'_n$ für alle $i < n$.
Fall 4: $v_i <_A x_n <_A v_k$ für $i, k < n$, wobei es keinen Index $m < n$ mit $v_i <_A v_m <_A x_n$ oder $x_n <_A v_m <_A v_k$ gibt. $\mathcal{B}$ ist eine dichte Ordnung, deshalb finden wir ein Element $v'_n \in B$ mit $v'_i <_B v'_n <_B v'_k$.
Sei nun $\tau_n(x_0, ..., x_n) := v'_n$. Außer in Fall 1 haben wir $v'_n \neq v'_i$ für $i = 0, ..., n-1$ definiert.
Behauptung: $(x_0, \tau_0(x_0), ..., x_{n-1}, \tau_n(x_0, ..., x_n)) \in W_{n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
Begründung: Bedingung (1) $x_i \in A \Leftrightarrow \tau_i(x_0, ..., x_i) \in B$ für $i = 0, ..., n$ aus der Definition 2.4.1 von $W_{n+1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist per Konstruktion erfüllt.
Für Bedingung (2) müssen wir zeigen, dass $f_n := \{(v_0, v'_0), ..., (v_n, v'_n)\} \in$

$Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gilt. Aus Proposition 2.1.8 folgt, dass $\{v_0, ...v_n\}$ das Universum von $[\{v_0, ...v_n\}]_{\mathcal{A}}$ ist. Wir müssen also zeigen, dass $f_n : \{v_0, ...v_n\} \to \{v'_0, ...v'_n\}$ ein Isomorphismus ist.
Ist Fall 1 eingetreten, dann gilt $f_n = f_{n-1} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und wir sind fertig. Wir können also annehmen, dass $v_n \neq v_i$ für alle $i < n$ und damit $v'_n \neq v'_i$ für alle $i < n$ gilt. Man sieht leicht, dass f_n surjektiv ist und $|\{v_0, ...v_n\}| = |\{v'_0, ...v'_n\}| \leq n+1$ gilt. Damit ist f_n eine Bijektion. Die Sprache der linearen Ordnungen enthält keine Konstanten- und Funktionszeichen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $v_i <_A v_k \Leftrightarrow v'_i <_B v'_k$ für alle $i, k \leq n$ gilt. Für $i, k < n$ ist das erfüllt, weil $f_{n-1} \in Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ liegt. v'_n haben wir genau so konstruiert, dass diese Bedingung erfüllt ist.
Falls $x_n \in B$ gilt, definieren wir $v'_n := x_n$ und $\tau_n(x_0, ..., x_n) := v_n \in A$ ganz analog, indem wir die Rollen von $\mathcal{A} = (A, <_A)$ und $\mathcal{B} = (B, <_B)$ vertauschen.
τ ist eine Gewinnstrategie für Bob und die Aussage ist gezeigt. $\square$

Korollar 3.0.2. *Für abzählbare dichte lineare Ordnungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ohne Endpunkte gilt $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.*

Beweis. Aus Satz 3.0.1 folgt, dass es eine Gewinnstrategie für Bob in $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gibt. Dann liefert uns Satz 2.6.1, dass $\mathcal{A}$ partiell isomorph zu $\mathcal{B}$ ist. Außerdem haben wir gezeigt, dass abzählbare partiell isomorphe Strukturen bereits isomorph sind, siehe 2.2.7. Damit gilt $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. $\square$

Literatur

[Jec02] Thomas Jech. Set Theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 3-540-44085-2.

[Mül20] Sandra Müller. Skript zur Vorlesung Grundzüge der mathematischen Logik. 2020. URL: `http://www.logic.univie.ac.at/~smueller/VLGrundzuege18/SkriptGZML`.

[TZ12] K. Tent und M. Ziegler. A Course in Model Theory. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2012. ISBN: 9780521763240.

[Vää11] Jouko Väänänen. Models and Games. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2011. ISBN: 9781139496339.