BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Kardinalzahlarithmetik

Verfasser

Clara Unterberger

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc.)

Wien, im Monat Oktober 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 033621
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	Dr.$^{\text{in}}$ Sandra Müller

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Kardinalzahlen und der Frage, wie man mit ihnen rechnet, kurz, mit Kardinalzahlarithmetik. Kardinalzahlen beschreiben die Kardinalität, salopp die "Größe", einer Menge. Die Frage nach der Größe einer endlichen Menge ist leicht mit der Anzahl ihrer Elemente beantwortbar. Bei unendlichen Mengen reicht dieser intuitive Lösungsversuch nicht aus. So ist beispielsweise die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ gleich groß wie die Menge der geraden natürlichen Zahlen $\{0, 2, 4, \dots\}$, obwohl offensichtlich $\{0, 2, 4, \dots\} \subset \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt. Auch dass verschiedene unendliche Mengen nicht gleich groß sein müssen, wie zum Beispiel im Fall $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$, übersteigt schnell das menschliche Vorstellungsvermögen. Um im mathematischen Kontext sinnvoll über die Größe von Mengen reden zu können, bedarf es also einer Möglichkeit zu ihrer Bestimmung, die ohne Intuition auskommt. Georg Cantor führte zu diesem Zweck die sogenannten Ordinalzahlen ein, mit denen er das Konzept der natürlichen Zahlen in einen rein mengentheoretische Kontext bringt und in das Unendliche erweitert, indem er „bei Unendlich nicht aufhört zu zählen“. Aussagen, wie $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ oder $2^{\mathbb{N}} = |\mathfrak{P}(\mathbb{N})|$, ergeben sich dann durch Rechnungen mit auf diesem Konzept aufbauenden Kardinalzahlen.

2 Einleitung

Diese Arbeit orientiert sich in Aufbau und Konvention an *Set theory: Exploring independence and truth* von R. Schindler [**1**]. Grundlegende Begriffe und Konzepte aus der Mengenlehre, etwa im Ausmaß der Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik“, werden im Weiteren als bekannt vorausgesetzt. Einige Grundlagen, die zum Verständnis von Kardinalzahlen unumgänglich sind, werden allerdings in diesem einleitenden Kapitel wiederholt. Dieses stellt jedoch nur eine überblicksmäßige Zusammenfassung da. Eine ausführliche Bearbeitung und alle Beweise finden sich in [**1**].

2.1 ZFC

Das zu Grunde liegende Axiomensystem dieser Arbeit ist die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC).

Definition 2.1. Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre besteht aus folgenden Axiomen:

- (Ext) Extensionalitätsaxiom:

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

- (Fund) Fundierungsaxiom:

$$\forall x(\exists y\ y \in x \to \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in y \wedge z \in x)))$$

- (Paar) Paarmengenaxiom:

$$\forall x \forall y \exists z\ z = \{x, y\}$$

- ($\emptyset$) Existenz der leeren Menge :

$$\exists x \forall y\ y \notin x$$

- (Ver) Vereinigungsaxiom:

$$\forall x \exists y\ y = \cup x$$

- (Pot) Potenzmengenaxiom:

$$\forall x \exists y\ y = \mathfrak{P}(x)$$

- (Aus) Aussonderungsschema:

$$\forall v_1 \dots \forall v_n \forall a \exists b \forall x(x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \phi(x, v_1, \dots, v_n)))$$

- (Ers) Ersetzungsschema:

$$\forall a \forall v_1 \dots \forall v_n(\forall x \in a \exists y' \forall y(y = y' \leftrightarrow \phi(x, y, v_1, \dots, v_n)) \to \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow \exists x \in a \phi(x, y, v_1, \dots, v_n)))$$

- (AC) Auswahlaxiom:

$$\forall x(x \neq \emptyset \wedge \forall y \in x \forall y' \in x(y \cap y' \neq \emptyset \leftrightarrow y = y') \to \exists z \forall y \in x \exists u\ z \cap y = \{u\}))$$

- (∞) Unendlichkeitsaxiom:

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$$

Bemerkung 2.2. Üblicherweise arbeitet man im Rahmen von ZFC mit Mengen. Es gibt aber Sammlungen von Objekten, die nicht alle der oben genannten Axiome erfüllen. Diese werden als echte Klassen bezeichnet. Beispielsweise die sogenannte Allklasse, $\{x : x = x\}$, widerspricht (Fund) und ist somit keine Menge. Umgekehrt ist jedoch jede Menge auch eine Klasse.

Definition 2.3. Eine Menge x heißt induktiv, falls gilt $\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x)$.

Bemerkung 2.4. Also enthält jede induktive Menge $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$
Man benennt diese Elemente, wie folgt:

$$\begin{gathered} 0 := \emptyset \\ 1 := \{\emptyset\} \\ 2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \dots \\ n+1 := n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \dots, n\} \end{gathered}$$

Bemerkung 2.5. (∞) garantiert die Existenz einer solchen induktiven Menge.
Der Durchschnitt über alle induktiven Mengen, die kleinste induktive Menge, wird mit ω bezeichnet und ist nach Bemerkung 2.4 genau die Menge, die $0, 1, 2, \dots$ enthält. Man nennt ω auch die Menge der natürlichen Zahlen und ihre Elemente die natürlichen Zahlen.

2.2 Ordinalzahlen

Definition 2.6. Eine Menge x heißt transitiv, falls für alle $y \in x$ gilt $y \subset x$.

Definition 2.7. Eine Menge x heißt Ordinalzahl, falls gilt:
(i) Für alle $y, z \in x$ gilt, $y \in z$ oder $y = z$ oder $z \in y$.
(ii) x ist transitiv.

Beispiele

- Alle natürlichen Zahlen, $n \in \omega$, sind Ordinalzahlen.
- Die Menge der natürlichen Zahlen, ω, ist eine Ordinalzahl.

Lemma 2.8. *(i) Es sei α eine Ordinalzahl. Dann ist $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ ebenfalls eine Ordinalzahl.*
(ii) Es sei α eine Ordinalzahl. Dann gilt für alle $x \in \alpha$, x ist eine Ordinalzahl.
(iii) Es seien α, β Ordinalzahlen mit $\alpha \subsetneq \beta$. Dann gilt $\alpha \in \beta$.
(iv) Es seien α, β Ordinalzahlen. Dann gilt entweder $\alpha \subset \beta$ oder $\beta \subset \alpha$ oder $\alpha = \beta$.

Lemma 2.9. *(i). Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist $\cap X$ das minimale Element von X und man schreibt $\cap X = min(X)$.*
(ii). Es sei X eine beliebige Menge von Ordinalzahlen. Dann ist $\cup X$ eine Ordinalzahl und man schreibt $\cup X = sup(X)$.

Bemerkung 2.10. Die Sammlung aller Ordinalzahlen , $\{x : x \text{ ist Ordinalzahl}\}$, ist also keine Menge, sondern eine echte Klasse, genannt OR.
Denn sonst wäre OR $\in$ OR und dies widerspricht (Fund).

Definition 2.11. Eine Ordinalzahl α heißt Nachfolgerordinalzahl, falls es eine Ordinalzahl β gibt mit $\alpha = \beta + 1$.
Eine Ordinalzahl α heißt Limesordinalzahl, falls α keine Nachfolgerordinalzahl ist.

Definition 2.12. Sei $R \subset C \times C$ eine zweistellige Relation auf einer Klasse C. R heißt fundiert, falls jede nichtleere Teilmenge von C ein R-minimales Element besitzt, das heißt:

Für alle $c \subset C$ mit $c \neq \emptyset$ existiert ein $x \in c$, sodass für alle $y \in c$ gilt $\neg yRx$.

Definition 2.13. Sei $R \subset C \times C$ eine zweistellige Relation auf einer Klasse C. R heißt Wohlordnung, falls gilt:
(i) Für alle $x \in C$ gilt $\neg xRx$. (Antireflexivität)
(ii) Für alle $x, y, z \in C$ gilt: $(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$. (Transitivität)
(iii) Für alle $x, y \in C$ gilt: xRy oder $x = y$ oder yRx. (Vergleichbarkeit)
(iv) R ist fundiert.

Bemerkung 2.14.
- Eine Relation, die (i), (ii) und (iii) in der obigen Definition erfüllt, heißt lineare Ordnung.
- Die Relation, $\alpha < \beta$ genau dann, wenn $\alpha \in \beta$, ist eine Wohlordnung auf ORD.

Satz 2.15 (Wohlordnungssatz von Zermelo)**.** *Es sei A eine beliebige Menge. Dann gibt es eine Wohlordnung auf A. Weiters existiert eine Ordinalzahl α, sodass es eine Bijektion $\pi : \alpha \rightarrow A$ gibt.*

Bemerkung 2.16. Satz 2.15 ist äquivalent zu (AC).

3 Kardinalzahlen

Bemerkung 3.1 (Notation)**.** Seien x und y Mengen, sodass es eine Bijektion $\pi : x \rightarrow y$ gibt, dann schreibt man $x \sim y$.
Die Wohlordnung aus Bemerkung 2.14 (ii) wird im Folgenden laufend eine wichtige Rolle spielen. Dabei werden $<$ und $\in$ synonym verwendet, $\leq$ bedeutet, falls nicht explizit anders definiert, $<$ oder $=$.
Die Menge $\{f : f$ ist eine Funktion mit $dom(f) = x$ und $Im(f) \subseteq y\}$ wird zumeist mit $\{f \mid f : x \rightarrow y\}$ bezeichnet.

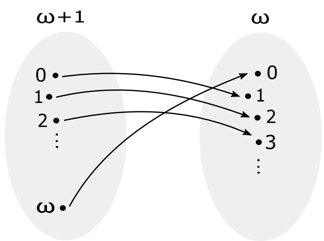
3.1 Kardinalität

Definition 3.2. Es sei x eine Menge. Die Kardinalität von x, geschrieben $|x|$, ist die kleinste Ordinalzahl α mit $x \sim \alpha$.

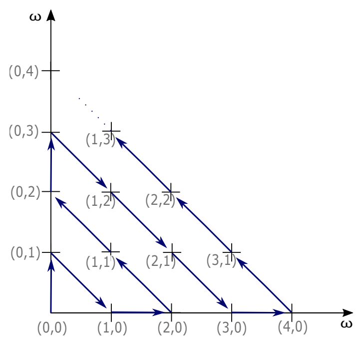
An dieser Stelle wird deutlich, dass die Theorie der Kardinalzahlen auf keinen Fall ohne das, oft diskutierte, Auswahlaxiom auskommen kann.
Der Wohlordnungssatz garantiert die Existenz einer Ordinalzahl α mit $x \sim \alpha$, für eine beliebige Menge x.

Beispiele

- Für alle $n, m \in \omega$ gilt: $n \sim m \Rightarrow n = m$. Also gilt $|n| = n$ für alle $n \in \omega$.
- Sei $f : n \to \omega$. Dann ist f nicht bijektiv für alle $n \in \omega$.
  Also gilt $|\omega| = \omega$.
- $|\omega + 1| = \omega$, denn die folgende Funktion ist bijektiv.



- $|\omega + 2| = \omega$, $|\omega + 3| = \omega$, ...
- $|\omega \cdot \omega| = \omega$, wie man auf folgender Abbildung erkennen kann.



Definition 3.3. Eine Kardinalzahl ist eine Ordinalzahl α mit $|\alpha| = \alpha$.

Es ist üblich Ordinalzahlen mit Buchstaben des griechischen Alphabets zu bezeichnen. Betrachtet man eine Ordinalzahl als Kardinalzahl, so verwendet man Buchstaben weiter hinten im Alphabet, wie $\kappa, \lambda, \mu, \ldots$
Beispiele

- Alle endlichen Ordinalzahlen sind Kardinalzahlen.
- ω ist die kleinste unendliche Kardinalzahl.

Kardinalzahlen sind also spezielle Ordinalzahlen. Genauer, eine Ordinalzahl ist genau dann eine Kardinalzahl, wenn es eine Menge x gibt mit $\alpha = |x|$.
Weiters gilt, jede unendliche Kardinalzahl ist eine Limesordinalzahl. Denn angenommen α sei eine Nachfolgerordinalzahl, das heißt $\alpha = \beta + 1$, dann gilt, analog zum oben dargestellten Beispiel $|\omega + 1| = \omega$,

$$|\alpha| = |\beta + 1| = |\beta|.$$

Bemerkung 3.4. Es gibt beliebig große Kardinalzahlen.
Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Cantor, der besagt, dass es für eine beliebige Menge x keine Surjektion $f : x \to \mathfrak{P}(x)$ gibt.
Sei nun κ eine Kardinalzahl, dann existiert die Menge $\mathfrak{P}(\kappa)$ nach (Pot) und es gilt $\kappa < |\mathfrak{P}(\kappa)|$. Insbesondere existiert aber auch eine kleinste Kardinalzahl λ, für die gilt: $\kappa < \lambda \leq |\mathfrak{P}(\kappa)|$.

Definition 3.5. Es sei κ eine Kardinalzahl. Die kleinste Kardinalzahl λ mit $\lambda > \kappa$ heißt Nachfolger von κ oder κ^+.
Eine Kardinalzahl κ heißt Nachfolgerkardinalzahl, wenn es eine Kardinalzahl μ gibt mit $\mu < \kappa$ und $\kappa = \mu^+$.
Sonst heißt κ Limeskardinalzahl.

Beispiele

- Für alle $n \in \omega$ gilt $n^+ = n + 1$. Somit sind alle $n \in \omega \setminus \{0\}$ Nachfolgerkardinalzahlen.
- ω selbst ist eine Limeskardinalzahl.

Lemma 3.6. *Sei X eine Menge von Kardinalzahlen. Dann ist $\cup X$ eine Kardinalzahl.*

Beweis. Da X eine Menge von Ordinalzahlen ist, ist $\cup X$ laut Lemma 2.8 ebenfalls eine Ordinalzahl.
Sei $\alpha < \cup X$, d.h. $\alpha \in \cup X$, dann existiert ein $\kappa \in X$ mit $\alpha \in \kappa$, d.h. $\alpha < \kappa$. Da κ eine Kardinalzahl ist, kann es keine Surjektion von α nach $\kappa \subset \cup X$ geben. Und somit gibt es keine Ordinalzahl $\alpha < \cup X$ mit $\alpha \sim \cup X$. □

Bemerkung 3.7. Bemerkung 3.4 besagt, dass jede Kardinalzahl einen Nachfolger hat. Es gibt aber auch beliebig große Limeskardinalzahlen. Sei κ eine beliebige Kardinalzahl und $X = \{\kappa, \kappa^+, \kappa^{++}, \dots\}$, dann ist $\cup X$ eine Limeskardinalzahl größer als κ.
Denn angenommen $\cup X$ wäre eine Nachfolgerkardinalzahl, also $\cup X = \mu^+$, dann gibt es ein n, sodass $\kappa^{+n} \leq \mu < \kappa^{+(n+1)}$, weil wegen $\mu < \cup X$ gilt

$\mu \in \cup X$. Somit muss aber schon $\mu = \kappa^{+n}$ gelten, da zwischen κ^{+n} und $\kappa^{+(n+1)}$ keine andere Kardinalzahl liegt. Also gilt $\mu^+ = \kappa^{+(n+1)} \in X$ und damit auch $\mu^+ \neq \cup X$.

3.2 Die Aleph-Funktion

Die sogenannte Aleph-Funktion wird verwendet um die unendlichen Kardinalzahlen aufzuzählen. Sie ordnet jeder Ordinalzahl eine Kardinalzahl zu und wird wie folgt, rekursiv definiert:

- $\aleph_0 = \omega$, die kleinste unendliche Kardinalzahl
- Für $\alpha > 0$: $\aleph_\alpha =$ die kleinste Kardinalzahl κ, sodass $\kappa > \aleph_\beta \ \forall \beta < \alpha$

Bemerkung 3.8. Für eine beliebige Ordinalzahl α gilt $\alpha \leq \aleph_\alpha$. Dies sieht man leicht per Induktion.

- $0 \leq \aleph_0 = \omega$
- Es sei $\alpha \leq \aleph_\alpha$ schon gezeigt. Dann ist $\aleph_{\alpha+1} = \kappa$, die kleinste Kardinalzahl, sodass $\kappa > \aleph_\beta$, $\forall \beta < \alpha + 1$. Insbesondere gilt $\kappa > \aleph_\alpha \geq \alpha$. Also gilt $\kappa \geq \alpha + 1$

Für eine beliebige unendliche Kardinalzahl κ gilt also $\kappa \leq \aleph_\kappa$. Das bedeutet, es existiert eine Ordinalzahl $\alpha \leq \kappa$ mit $\kappa = \aleph_\alpha$ und somit ist jede unendliche Kardinalzahl von der Form $\aleph_\alpha$.
Weiters ist $\aleph_\alpha$ eine Limeskardinalzahl, falls α eine Limesordinalzahl ist, und eine Nachfolgerkardinalzahl, falls α eine Nachfolgerordinalzahl ist.

Die ersten unendlichen Kardinalzahlen sind:

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots, \aleph_{\omega^n}, \dots$$

4 Arithmetik

Definition 4.1. Seien κ und λ Kardinalzahlen. Dann wird wie folgt eine Arithmetik definiert.

- $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$
- $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$
- $\kappa^\lambda = |\{f : f \text{ ist eine Funktion mit } dom(f) = \lambda \text{ und } Im(f) \subseteq \kappa\}|$

Bemerkung 4.2. Für endliche Kardinalzahlen stimmt diese Definition genau mit den üblichen Rechenoperationen auf den natürlichen Zahlen überein.

Beispiele

- $3 + 2 = |(3 \times \{0\}) \cup (2 \times \{1\})| = |(\{0, 1, 2\} \times \{0\}) \cup (\{0, 1\} \times \{1\})| = 5$

- $3 \cdot 2 = |3 \times 2| = |\{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}| = 6$
- $3^2 = |\{f | f : 2 \to 3\}| = |\{f | f : \{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}\}| = 9$

Im Folgenden werden ein paar einfache Rechenregeln betrachtet. Diese sind zwar zum Teil sehr offensichtlich, sollen aber einen Eindruck vermitteln, wie man mit geeigneten Surjektionen, Injektionen und Bijektionen als Werkzeuge, mit Kardinalzahlen rechnet.

Lemma 4.3. *Seien κ und λ beliebige Kardinalzahlen.*

(i) Seien X und Y zwei disjunkte Mengen mit $|X| = \kappa$ und $|Y| = \lambda$. Dann gilt: $\kappa + \lambda = |X \cup Y|$.

(ii) Falls $\kappa, \lambda > 1$, gilt: $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$,

Beweis. (i) Wegen $|X| = \kappa$ und $|Y| = \lambda$, gibt es Bijektionen $f : \kappa \to X$ und $g : \lambda \to Y$. Somit ist die Funktion $\pi : (\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\}) \to X \cup Y$ mit $(\alpha, 0) \mapsto f(\alpha)$ und $(\beta, 1) \mapsto g(\beta)$ bijektiv.

(ii) Seien X und Y wie in (i). Es gilt $\kappa \cdot \lambda = |X \times Y|$. Also reicht es eine Injektion $f : X \cup Y \to X \times Y$ zu finden. Da $\kappa, \lambda > 1$, existieren $x', x'' \in X$ und $y', y'' \in Y$ mit $x' \neq x''$ und $y' \neq y''$. Man kann also folgende injektive Funktion definieren:

$$f(z) = \begin{cases} (z, y'), \text{ falls } z \in X \\ (x', z), \text{ falls } z \in Y \setminus \{y'\} \\ (x'', y''), \text{ falls } z = y' \end{cases}$$

□

Bemerkung 4.4. Die Addition und Multiplikation mit Kardinalzahlen erfüllt folgende Rechenregeln:

(i) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$ und $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

(ii) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$ und $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

(iii) $(\kappa + \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot \mu + \lambda \cdot \mu$

Seien X, Y und Z paarweise disjunkte Mengen mit $|X| = \kappa$, $|Y| = \lambda$ und $|Z| = \mu$. Dann folgt (i), weil natürlich $X \cup Y \sim Y \cup X$ und $X \times Y \sim Y \times X$. Es ist

$$|X \times Y| \times Z \sim X \times Y \times Z \sim X \times |Y \times Z|$$

und

$$|X \cup Y| \cup Z \sim X \cup Y \cup Z \sim X \cup |Y \cup Z|$$

Deshalb gilt (ii). Ähnlich folgt (iii), wegen

$$|X \cup Y| \times Z \sim (X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z) \sim |X \times Z| \cup |Y \times Z|.$$

Lemma 4.5. *Seien κ, λ und μ Kardinalzahlen. Dann gilt*

(i) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

(ii) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$

(iii) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

(iv) Seien κ' und λ' Kardinalzahlen mit $\kappa' \leq \kappa$ und $\lambda' \leq \lambda$. Dann gilt $\kappa' + \lambda' \leq \kappa + \lambda$, $\kappa' \cdot \lambda' \leq \kappa \cdot \lambda$ und $\kappa'^{\lambda'} \leq \kappa^\lambda$.

Beweis. Seien X, Y und Z wie in Bemerkung 4.4.

(i) Die Funktion $\pi : \{f \mid f : Z \to X\} \times \{g \mid g : Z \to Y\} \to \{h \mid h : Z \to X \times Y\}$ mit $\pi((f, g)) = (z \mapsto (f(z), g(z)))_{z \in Z}$ ist bijektiv.

(ii) Die Funktion $\pi' : \{f \mid f : Y \to X\} \times \{g \mid g : Z \to X\} \to \{h \mid h : Y \cup Z \to X\}$ mit $\pi'((f, g)) = f \cup g$ ist bijektiv.

(iii) Die Funktion $\pi'' : \{f \mid f : Z \to \{g \mid g : Y \to X\}\} \to \{h \mid h : Y \times Z \to X\}$ mit $\pi''(f) = h'$, wobei $h' : Y \times Z \to X$ durch $h'(y, z) = (f(z))(y)$ gegeben ist, ist bijektiv.

(iv) Seien $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$.
Dann gilt $X' \cup Y' \subseteq X \cup Y$ und $X' \times Y' \subset X \times Y$. Weil X' und Y' sicher auch disjunkt sind, folgt daraus schon $\kappa' + \lambda' \leq \kappa + \lambda$ und $\kappa' \cdot \lambda' \leq \kappa \cdot \lambda$. Angenommen X ist nichtleer, dann gibt es ein $x \in X$. Dann ist die Funktion $\pi : \{f' \mid f' : Y' \to X'\} \to \{f \mid f : Y \to X\}$ mit

$$\pi(f') = (y \mapsto \begin{cases} f'(y), \text{ falls } y \in Y' \\ x, \text{ falls } y \in Y \backslash Y' \end{cases})$$

injektiv.

□

5 Addition und Multiplikation

In diesem Kapitel wird die Addition und Multiplikation von unendlichen Kardinalzahlen genauer untersucht. Das wichtigste Resultat liefert der Satz von Hessenberg, für dessen Beweis aber noch einige Begriffe und Hilfsmittel eingeführt werden müssen.

Definition 5.1. Eine 2-stellige Relation $R \subset C \times C$ auf einer Klasse C heißt extensional genau dann, wenn für alle $x, y \in C$ gilt:

$$\{z \in C : zRx\} = \{z \in C : zRy\} \Leftrightarrow x = y$$

Definition 5.2. Eine 2-stellige Relation $R \subset C \times C$ auf einer Klasse C heißt mengenähnlich genau dann, wenn $\{x : xRy\}$ für alle $y \in C$ eine Menge ist.

Satz 5.3 (Mostowski-Kollaps)**.** *Sei C eine Klasse und $R \subset C \times C$ eine fundierte, extensionale und mengenähnliche Relation. Dann existiert ein eindeutiges Paar (X_R, π_R), sodass gilt:*
(i) X_R ist transitiv,
(ii) $\pi_R : X_R \to C$ ist bijektiv und
(iii) für alle $x, y \in X_R$ gilt: $x \in y \Leftrightarrow \pi_R(x) R \pi_R(y)$

Bemerkung 5.4. Sei R eine Wohlordnung auf einer Klasse C und seien $x, y \in C$, sodass $\{z \in C : zRx\} = \{z \in C : zRy\}$. Angenommen $x \neq y$. Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit xRy und damit auch xRx im Widerspruch zur Antireflexivität von R. Also ist jede Wohlordnung extensional und man kann Satz 5.3 anwenden. $\pi_R(C)$ ist dann die eindeutige Ordinalzahl, die zu (C, R) ordungsisomorph ist und heißt der Ordnungstyp von (C, R).

Lemma 5.5. *Die folgende Relation $<^*$ ist eine Wohlordnung auf die Klasse $OR \times OR$:*
$(\delta, \epsilon) <^* (\delta', \epsilon')$ genau dann, wenn entweder
(i) $max\{\delta, \epsilon\} < max\{\delta', \epsilon'\}$ oder
(ii) $max\{\delta, \epsilon\} = max\{\delta', \epsilon'\}$ und $\delta < \delta'$ oder
(iii) $max\{\delta, \epsilon\} = max\{\delta', \epsilon'\}$ und $\delta = \delta'$ und $\epsilon < \epsilon'$

Beweis. Dass $<^*$ eine totale Ordnung ist, also reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist und Vergleichbarkeit erfüllt, folgt direkt daraus, dass $<$ auf OR eine Wohlordnung ist.
Es bleibt also zu zeigen, dass $<^*$ fundiert ist, dass also jede nicht-leere Teilmenge X von $OR \times OR$ ein $<^*$-minimales Element besitzt.
Sei $\emptyset \neq X \subset OR \times OR$ beliebig.
Man betrachte die Mengen:

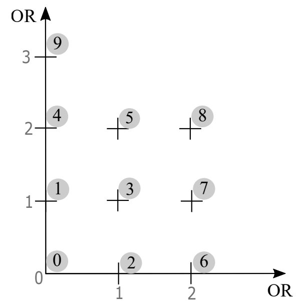
$$X^0 = \{(\delta, \epsilon) \in X : \forall (\delta', \epsilon') \in X \;\; max\{\delta, \epsilon\} < max\{\delta', \epsilon'\}\},$$
$$X^1 = \{(\delta, \epsilon) \in X^0 : \forall (\delta', \epsilon') \in X^0 \;\; \delta < \delta'\} \text{ und}$$
$$X^2 = \{(\delta, \epsilon) \in X^1 : \forall (\delta', \epsilon') \in X^1 \;\; \epsilon < \epsilon'\}.$$

X^2 enthält nur ein Element und dieses muss $<^*$-minimal in X sein. □

Bemerkung 5.6. Satz 5.3 angewendet auf $<^*$ liefert eine Abbildung $\pi : OR \times OR \to OR$ mit
- $(\delta, \epsilon) <^* (\delta', \epsilon') \Leftrightarrow \pi((\delta, \epsilon)) < \pi((\delta', \epsilon'))$ und
- π ist bijektiv.

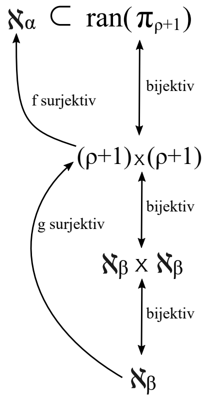
Es gilt also, $\pi((\delta', \epsilon') = \{\pi((\delta, \epsilon) : (\delta, \epsilon) <^* (\delta', \epsilon')\}$. Für die ersten Elemente in $OR \times OR$ ergibt sich somit:
$\pi((0, 0)) = \emptyset = 0$
$\pi((0, 1)) = \{\pi((0, 0))\} = \{0\} = 1$

$\pi((1,0)) = \{\pi((0,0)), \pi((0,1))\} = \{0,1\} = 2$
$\pi((1,1)) = \{\pi((0,0)), \pi((0,1)), \pi((1,0))\} = \{0,1,2\} = 3$, ...



Satz 5.7 (Hessenberg)**.** $\forall \alpha \in OR : \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$

Beweis. Zu zeigen ist, dass $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$, dass es also eine Bijektion $f : \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \to \aleph_\alpha$ gibt. Dazu betrachtet man eine geeignete Einschränkung von π aus der obigen Bemerkung.
Für ein beliebiges $\gamma \in OR$ gilt, $\pi_\gamma := \pi \upharpoonright (\gamma \times \gamma) : \gamma \times \gamma \to ran(\pi_\gamma)$ ist, als Einschränkung einer injektiven Funktion, injektiv und trivialerweise surjektiv, also bijektiv.
Betrachtet man $ran(\pi_\gamma)$ als $\{\pi((\delta, \epsilon)) : (\delta, \epsilon) <^* (\gamma, \gamma)\}$, so sieht man leicht, dass $ran(\pi_\gamma) \notin \gamma$. Zum Beispiel indem man die injektive Abbildung $f : \gamma \to ran(\pi_\gamma)$ mit $\alpha \mapsto \pi((0, \alpha))$ betrachtet.
$ran(\pi_\gamma)$ ist eine Ordinalzahl, somit muss nun entweder $\gamma \in ran(\pi_\gamma)$ oder $\gamma = ran(\pi_\gamma)$ gelten.
Das Ziel ist also zu zeigen, dass $\aleph_\alpha = ran(\pi_{\aleph_\alpha})$ gilt für alle α. Man zeigt dies per Induktion, wobei der Induktionsanfang darin besteht, zu überprüfen, ob die Aussage für die kleinste unendliche Kardinalzahl, $\aleph_0$, beziehungsweise als Ordinalzahl ω, stimmt.
Da $ran(\pi_\omega) = \{(\delta, \epsilon) : (\delta, \epsilon) <^* (\omega, \omega)\}$ aber abzählbar ist und keinen Limespunkt enthält, kann $\omega \in ran(\pi_\omega)$ nicht gelten und es ist somit $\omega = ran(\pi_\omega)$. Angenommen es existiert ein $\alpha > 0$, sodass $\aleph_\alpha \in ran(\pi_{\aleph_\alpha})$. Dann existiert aber auch ein kleinstes α mit dieser Eigenschaft. Für dieses α gilt dann:
Es gibt ein $(\delta, \epsilon) \in \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ mit $\pi((\delta, \epsilon)) = \aleph_\alpha$. Nach Definition von π gilt $\delta, \epsilon < \aleph_\alpha$. Da $\aleph_\alpha$ als Kardinalzahl eine Limesordinalzahl ist, kann man sicher ein ρ finden, sodass gilt, $\delta, \epsilon < \rho < \aleph_\alpha$.
Weil $(\delta, \epsilon) <^* (\rho + 1, \rho + 1)$ und $\pi((\delta, \epsilon)) = \aleph_\alpha$ gilt $\aleph_\alpha \in ran(\pi_{\rho+1})$, das heißt $\aleph_\alpha \subseteq ran(\pi_{\rho+1})$, denn $ran(\pi_{\rho+1})$ ist als Ordinalzahl transitiv. Dann gibt es aber eine Surjektion $f : (\rho + 1) \times (\rho + 1) \to \aleph_\alpha$.



Da $\rho + 1 < \aleph_\alpha$, ist $|\rho + 1| = \aleph_\beta$ für ein $\beta < \alpha$. Dann gilt $\aleph_\beta \notin ran(\pi_{\aleph_\beta})$, weil α minimal gewählt war, und somit ist $\pi_{\aleph_\beta} : \aleph_\beta \times \aleph_\beta \to \aleph_\beta$ bijektiv. Weil $|\rho + 1| = \aleph_\beta$, gibt es sicher auch eine bijektive Abbildung $g : \aleph_\beta \times \aleph_\beta \to (\rho+1) \times (\rho+1)$ und somit auch eine Surjektion $g : \aleph_\beta \to (\rho+1) \times (\rho+1)$. Aber dann gilt offensichtlich $f \circ g : \aleph_\beta \to \aleph_\alpha$ ist surjektiv, was ein Widerspruch zu $\beta < \alpha$ liefert. Somit gilt für alle α, dass $ran(\pi_{\aleph_\alpha}) = \aleph_\alpha$ und $\pi_{\aleph_\alpha}$ ist tatsächlich die gesuchte Bijektion. □

Korollar 5.8. *Für alle α, β gilt $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{max\{\alpha,\beta\}}$*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha \leq \beta$. Dann gilt:

$$\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \overset{\text{Lemma 4.3 } (ii)}{\leq} \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \overset{\text{Lemma 4.5 } (iv)}{\leq} \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta \overset{\text{Satz 5.7}}{=} \aleph_\beta$$

□

Damit ist die Multiplikation und Addition mit unendlichen Kardinalzahlen trivial. Die dazugehörigen Rechenregeln aus Bemerkung 4.4 und Lemma 4.5 sind somit ebenfalls trivial.

6 Potenzieren

Um Aussagen über Kardinalzahlexponentation treffen zu können werden in diesem Kapitel noch gewisse Eigenschaften von Ordinal- und Kardinalzahlen untersucht. Doch im Gegensatz zur Addition und Multiplikation ergeben sich beim Potenzieren mit Kardinalzahlen in ZFC keine starken Resultate mehr.

Lemma 6.1. *Sei κ eine beliebige Kardinalzahl. Dann gilt: $2^\kappa = |\mathfrak{P}(\kappa)|$.*

Beweis. Man betrachte die Abbildung $\pi : \{f \mid f : \kappa \to 2 = \{0,1\}\} \to \mathfrak{P}(\kappa)$ mit $f \mapsto \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) = 1\}$.
Da π bijektiv ist, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 6.2. Damit gilt aber $\kappa^+ \leq 2^\kappa$. Die Frage, ob $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, also ob es eine Menge gibt, deren Kardinalität zwischen der Kardinalität der natürlichen Zahlen und der Kardinalität der reellen Zahlen liegt, nennt sich die Kontinuumshypothese von Cantor, oftmals abgekürzt als CH.
Kurt Gödel zeigte 1938, dass ZFC + CH widerspruchsfrei ist, sofern man ZF als widerspruchsfrei annimmt. Allerdings bewies Paul Cohen knapp 30 Jahre später, dass unter der Annahme der Widerspruchsfreiheit von ZFC auch ZFC + ¬CH, widerspruchsfrei ist . Somit kann die Konituumshypothese in ZFC weder bewiesen, noch widerlegt werden.

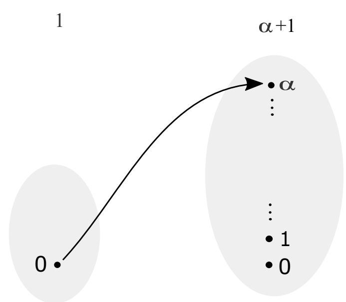
6.1 Singuläre und reguläre Kardinalzahlen

Definition 6.3. Sei α eine Ordinalzahl. Eine Funktion $f : A \to \alpha$ heißt kofinal in α genau dann, wenn für alle $\beta < \alpha$ gilt: Es existiert ein $a \in A$ sodass $f(a) \geqslant \beta$.
Die Kofinalität von α, geschrieben als $cf(\alpha)$, ist das kleinste $\beta \leq \alpha$ sodass es ein kofinales $f : \beta \to \alpha$ gibt.

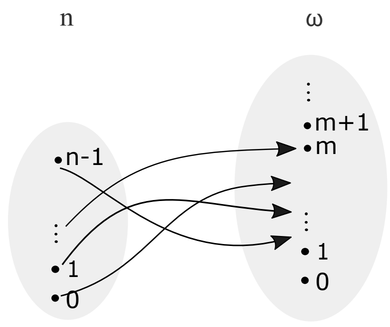
Bemerkung 6.4. $cf(\alpha)$ existiert für alle α, denn $id : \alpha \to \alpha$ ist immer kofinal in α. Insbesondere gilt für alle α: $cf(\alpha) \leq \alpha$.

Beispiele

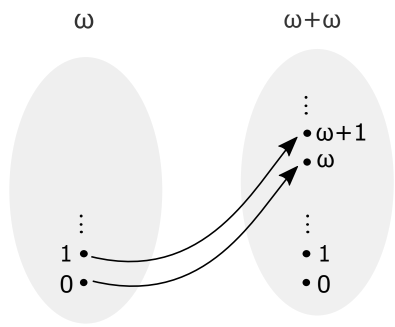
- Für Nachfolgerordinalzahlen gilt: $cf(\alpha + 1) = 1$, denn $f : 1 \to \alpha + 1$ mit $f(0) = \alpha$ ist kofinal.



- $cf(\omega) = \omega$, da für alle $f : n \to \omega$, das Bild von f beschränkt in ω ist.



- $cf(\omega + \omega) = \omega$, denn $f : \omega \to \omega + \omega$ mit $f(n) = \omega + n$ ist kofinal.



- $cf(\omega \cdot \omega) = \omega$, denn $f : \omega \to \omega \cdot \omega$ mit $f(n) = \omega \cdot n$ ist kofinal.
- $cf(\omega^{\omega)} = \omega)$, denn $f : \omega \to \omega^\omega$ mit $f(n) = \omega^n$ ist kofinal.

Lemma 6.5. *Sei $\beta = cf(\alpha)$. Dann gibt es eine kofinale Funktion $f : \beta \to \alpha$, die streng monoton ist.*

Beweis. Sei $\beta = cf(\alpha)$ und $f : \beta \to \alpha$ kofinal. Man definiert $f^* : \beta \to \alpha$ wie folgt: $f^*(\xi) = sup\{f(\mu) : \mu < \xi\}$ für $\xi < \beta$. $f^*(\xi) < \alpha$, denn sonst wäre $f \upharpoonright \xi : \xi \to \alpha$ kofinal, was wegen $\xi < \beta = cf(\alpha)$ nicht sein kann. f^* ist nach Konstruktion kofinal und monoton. Sei $\pi : \gamma \to ran(f^*) \subseteq \alpha$ die monotone Nummerierung von $ran(f^*)$, dann ist $\gamma \leq cf(\alpha)$ und somit $\gamma = cf(\alpha)$. π ist streng monoton und kofinal in α. □

Bemerkung 6.6. π aus dem obigen Beweis ist außerdem stetig. Wobei Stetigkeit in diesem Kontext bedeutet, dass für alle Limesordinalzahlen $\gamma \in dom(\pi)$ gilt: $\pi(\gamma) = sup\{\pi(\xi) : \xi < \gamma\}$.

Definition 6.7. Sei α eine Ordinalzahl.

- α heißt regulär genau dann, wenn $cf(\alpha) = \alpha$.
- α heißt singulär genau dann, wenn $cf(\alpha) < \alpha$.

Beispiele

- Alle $n \in \omega \backslash \{0, 1\}$ sind singulär.
- $\aleph_\omega$ ist singulär, denn $f : \omega \to \aleph_\omega$ mit $n \mapsto \aleph_n$ ist kofinal.

Lemma 6.8. *Für alle Ordinalzahlen α gilt: $cf(\alpha)$ ist regulär.*

Beweis. Sei $\beta = cf(\alpha)$. Dann existiert ein kofinales, monotones $f : \beta \to \alpha$. Weiters existiert ein kofinales $g : cf(\beta) \to \beta$. Wir betrachten $f \circ g : cf(\beta) \to \alpha$.
Für ein beliebiges $\xi \in \alpha$ existiert ein $\mu \in \beta$ mit $f(\mu) \geqslant \xi$.
Dann gibt es auch ein $\zeta \in cf(\beta)$ mit $g(\zeta) \geqslant \mu$.
Weil f monoton gewählt war, gilt: $f \circ g(\zeta) = f(g(\zeta)) \geqslant f(\mu) \geqslant \xi$.
Also ist $f \circ g$ kofinal und somit $cf(\alpha) \leq cf(\beta)$. Da aber auch $cf(\beta) = cf(cf(\alpha)) \leq cf(\alpha)$ gilt, folgt $cf(\beta) = cf(\alpha)$. □

Lemma 6.9. *Eine reguläre Ordinalzahl α ist eine Kardinalzahl.*

Beweis. Eine Surjektion $f : |\alpha| \to \alpha$ ist kofinal. Es kann also kein $\beta < \alpha$ mit $\beta = |\alpha|$ geben, da sonst auch $cf(\alpha) \leq \beta$ gelten würde.

□

Lemma 6.8 und Lemma 6.9 besagen also, dass für jede Ordinalzahl α, $cf(\alpha)$ eine reguläre Kardinalzahl ist.

Lemma 6.10. *Sei κ eine unendliche Nachfolgerkardinalzahl. Dann ist κ regulär.*

Beweis. Sei $\kappa = \mu^+$.
Angenommen es gilt $cf(\kappa) < \kappa$. Da $cf(\kappa)$ selbst eine Kardinalzahl ist, muss $cf(\kappa) \leq \mu$ gelten. Somit existiert ein kofinales $f : \mu \to \kappa$. Das Auswahlaxiom erlaubt es eine Folge $(g_\xi : \xi < \mu)$ zu bilden, sodass für alle $\xi \in \mu$ gilt: $g_\xi : \mu \to f(\xi)$ ist surjektiv. Nach Satz 5.7 existiert ein bijektives $h : \mu \to \mu \times \mu$. Nun kann man eine Surjektion $F : \mu \to \kappa$ wie folgt definieren: Sei $\eta \in \mu$, sei $(\alpha, \beta) = h(\eta)$, und sei $F(\eta) = g_\alpha(\beta)$. Da aber μ und κ Kardinalzahlen mit $\mu < \kappa$ sind, kann es so eine Surjektion nicht geben. □

Also sind $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ regulär. $\aleph_\omega$ ist singulär, aber $\aleph_{\omega+1}$ ist wieder regulär.

Lemma 6.11. *Sei α eine Limesordinalzahl. Dann gilt: $cf(\alpha) = cf(\aleph_\alpha)$.*

Beweis. Die $\aleph$-Funktion eingeschränkt auf α, $\aleph \restriction \alpha : \alpha \to \aleph_\alpha$, ist kofinal und streng monoton. Somit ist $(\aleph \restriction \alpha) \circ f : cf(\alpha) \to \aleph_\alpha$, für ein kofinales $f : cf(\alpha) \to \alpha$, kofinal. Also gilt einerseits $cf(\aleph_\alpha) \leq cf(\alpha)$. Andererseits gilt auch $cf(\alpha) \leq cf(\aleph_\alpha)$. Dazu betrachtet man die Funktion $h : cf(\aleph_\alpha) \to \alpha$ mit $h(\xi) = min\{\mu : (\aleph \restriction \alpha)(\mu) = \aleph_\mu > g(\xi)\}$, wobei $g : cf(\aleph_\alpha) \to \aleph_\alpha$ kofinal ist. h ist dann kofinal, woraus $cf(\alpha) \leq cf(\aleph_\alpha)$ folgt. □

Bemerkung 6.12. Die Frage, ob es reguläre Limeskardinalzahlen gibt, führt zum Konzept der großen Kardinalzahlen.
Sei $\aleph_\alpha$ so eine reguläre Limeskardinalzahl. Dann gilt $\alpha = \aleph_\alpha$, denn

$$\alpha \overset{\text{Bem. 3.8}}{\leq} \aleph_\alpha = cf(\aleph_\alpha) \overset{\text{Lemma 6.11}}{=} cf(\alpha) \overset{\text{Bem. 6.4}}{\leq} \alpha.$$

Die Frage der Existenz solcher, man nennt sie auch unerreichbare, Kardinalzahlen, kann in ZFC jedoch nicht beantwortet werden.

6.2 Potenzieren mit unendlichen Kardinalzahlen

Lemma 6.13. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gilt:*

(i) $2^\kappa = \kappa^\kappa$

(ii) $\mu^\kappa = 2^\kappa$, *falls* $2 \leq \mu \leq \kappa$

Beweis. (i) Man betrachte die Funktion $\pi : \{f \mid f : \kappa \to 2\} \to \kappa$ mit

$$f \mapsto \begin{cases} \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) = 0\}, \text{ falls dies eine Ordinalzahl ist} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Dieses π ist surjektiv und somit ist $\kappa \leq 2^\kappa$.
Also gilt: $2^\kappa \leq \kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$.

(ii) Wegen $2^\kappa \leq \mu^\kappa \leq \kappa^\kappa$ folgt analog zu (i), dass $2^\kappa = \mu^\kappa$.

□

Bemerkung 6.14. Es sei κ eine Limeskardinalzahl. Dann wird $\sup\limits_{\mu<\kappa} 2^\mu$ geschrieben als $2^{<\kappa}$, beziehungsweise allgemein, $\sup\limits_{\mu<\kappa} \lambda^\mu$ als $\lambda^{<\kappa}$.

Lemma 6.15. *Es sei κ eine Limeskardinalzahl. Es gilt dann* $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass $2^\kappa \leq (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$ gilt.
Da $2^\kappa = |\mathfrak{P}(\kappa)|$ ist, reicht es eine injektive Funktion $\Phi : \mathfrak{P}(\kappa) \to^{cf(\kappa)} (2^{<\kappa})$ zu finden.
Sei $f : cf(\kappa) \to \kappa$ kofinal. Man schreibt nun κ_i für $f(i)$, wobei $i < cf(\kappa)$ ist. Sei $g_i : \mathfrak{P}(\kappa_i) \to 2^{<\kappa}$ eine Injektion. Diese existiert, weil $\kappa_i < \kappa$, und somit $2^{\kappa_i} \leq 2^{<\kappa}$ ist. Nun kann man $\Phi : \mathfrak{P}(\kappa) \to^{cf(\kappa)} (2^{<\kappa})$ definieren als $X \mapsto (i \mapsto g_i(X \cap \kappa_i))_{i<cf(\kappa)}$, für eine beliebige Teilmenge X von κ.
Seien X und Y Teilmengen von κ mit $X \neq Y$. Da für $i < cf(\kappa)$ groß genug, $X \cap \kappa_i \neq Y \cap \kappa_i$ ist, gilt,

$$(\Phi(X))(i) = g_i(X \cap \kappa_i) \overset{g_i \text{ injektiv}}{\neq} g_i(Y \cap \kappa_i) = (\Phi(Y))(i),$$

ist Φ injektiv.
Wegen,

$$2^\kappa \leq (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} \overset{\text{Lemma 4.5}}{\leq} (2^\kappa)^{cf(\kappa)} \overset{\text{Lemma 4.5}}{=} 2^{\kappa \cdot cf(\kappa)} \overset{\text{Satz 5.7}}{=} 2^\kappa,$$

gilt $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)}$. □

Bemerkung 6.16. Insbesondere gilt für jede Limeskardinalzahl κ mit $2^{<\kappa} = \kappa$, dass $2^\kappa = \kappa^{cf(\kappa)}$ ist.

Korollar 6.17. *Sei κ eine singuläre Limeskardinalzahl. Existieren $\mu' < \kappa$ und λ mit $2^\mu = \lambda$, falls $\mu' \leq \mu < \kappa$, dann gilt $2^\kappa = \lambda$.*

Beweis. Sei $\mu \geq \mu'$, sodass $\mu \geq cf(\kappa)$ ist. Dann ergibt sich,

$$\lambda = 2^\mu \overset{\text{Lemma 4.5 }(iv)}{\leq} 2^\kappa \overset{\text{Lemma 6.15}}{=} (2^{<\kappa})^{cf(\kappa)} = \lambda^{cf(\kappa)} =$$
$$(2^\mu)^{cf(\kappa)} \overset{\text{Lemma 4.5 }(iii)}{=} 2^{\mu \cdot cf(\kappa)} \overset{\text{Satz 5.7}}{=} 2^\mu = \lambda.$$

□

Satz 6.18 (Hausdorff)**.** *Seien κ und λ unendliche Kardinalzahlen. Dann gilt $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$.*

Beweis. Zunächst betrachte man den Fall, dass $\kappa^+ \leq \lambda$ ist. Es gilt dann $(\kappa^+)^\lambda \overset{\text{Lemma 6.13}}{=} 2^\lambda > \lambda \geq \kappa^+$, und somit $\kappa^\lambda \cdot \kappa^+ \overset{\text{Lemma 6.13}}{=} 2^\lambda \cdot \kappa^+ \overset{\text{Satz 5.7}}{=} 2^\lambda = (\kappa^+)^\lambda$.
Andernfalls gilt $\kappa^+ > \lambda$. Nach Lemma 6.10 ist κ^+ regulär und somit ist das Bild einer beliebigen Funktion $f : \lambda \to \kappa^+$ beschränkt. Das bedeutet, es gibt ein $\zeta < \kappa^+$ mit $ran(f) \subset \zeta$. Also gilt

$$(\kappa^+)^\lambda = |\{f \mid f : \lambda \to \kappa^+\}| = |\bigcup_{\zeta < \kappa^+} \{f \mid f : \lambda \to \zeta\}| = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+.$$

□

7 Unendliche Summen und Produkte

Definition 7.1. Sei f eine Funktion mit $dom(f) = I$, wobei I eine nicht-leere Menge ist, sodass $f(i)$ eine Kardinalzahl ist für alle $i \in I$. Es wird $f(i) = \kappa_i$ bezeichnet. Die unendliche Summe und das unendliche Produkt werden wie folgt definiert.

- $\sum\limits_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup\limits_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\})|$
- $\prod\limits_{i \in I} \kappa_i = |\{g : dom(g) = I \text{ und } g(i) \in \kappa_i \quad \forall i \in I\}|$

Diese Definition ist eine Verallgemeinerung von Definition 4.1. Für eine endliche Menge I gilt nach Kapitel 3, $\sum\limits_{i\in I} \kappa_i = \prod\limits_{i\in I} \kappa_i = \max\limits_{i\in I} \kappa_i$.

Lemma 7.2. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und seien κ_i Kardinalzahlen, für $i < \kappa$. Dann gilt $\sum\limits_{i<\kappa} \kappa_i = \kappa \cdot \sup\limits_{i<\kappa} \kappa_i$.*

Beweis. Da $\kappa_i \leq \sup\limits_{i<\kappa} \kappa_i$ für alle $i < \kappa$, folgt

$$\sum_{i<\kappa} \kappa_i \leq \sum_{i<\kappa} \sup_{i<\kappa} \kappa_i = |\bigcup_{i<\kappa} (\sup_{i<\kappa} \kappa_i \times \{i\})| = |\sup_{i<\kappa} \kappa_i \times \kappa| = \sup_{i<\kappa} \kappa_i \cdot \kappa.$$

Angenommen $\kappa_i \neq 0$. Dann gilt $\kappa = \sum\limits_{i<\kappa} 1 \leq \sum\limits_{i<\kappa} \kappa_i$. Also ergibt sich

$$\sup_{i<\kappa} \kappa_i \cdot \kappa \leq \sum_{i<\kappa} \kappa_i \cdot \kappa = \sum_{i<\kappa} \kappa_i.$$

□

Bemerkung 7.3. Sei κ eine Limeskardinalzahl. Dann existiert eine Folge $(\kappa_i : i < cf(\kappa))$ aus Kardinalzahlen $\kappa_i < \kappa$ mit $\sup\limits_{i<cf(\kappa)} \kappa_i = \kappa$. Es gilt

$$\sum_{i<cf(\kappa)} \kappa_i \overset{\text{Lemma 7.2}}{=} cf(\kappa) \cdot \kappa = \kappa.$$

Demnach kann $cf(\kappa)$ auch interpretiert werden, als das kleinste λ, sodass es eine Folge $(\kappa_i : i < \lambda)$, wobei $\kappa_i < \kappa$ gilt, gibt mit $\kappa = \sum\limits_{i<\lambda} \kappa_i$.

Satz 7.4 (König)**.** *Sei $I \neq \emptyset$ und seien κ_i und λ_i Kardinalzahlen, sodass $\kappa_i < \lambda_i$ für alle $i \in I$. Dann gilt $\sum\limits_{i\in I} \kappa_i < \prod\limits_{i\in I} \lambda_i$.*

Beweis. Sei $f : \bigcup\limits_{i\in I} \kappa_i \times \{i\} \to \{g \mid dom(g) = I \textit{ und } g(i) \in \lambda_i\}$ eine beliebige Funktion. Es ist zu zeigen, dass f nicht surjektiv ist. Sei $i \in I$ beliebig. Man betrachte die Menge $\{\xi \in \lambda_i : \neg\exists\alpha \in \kappa_i\ (f(\alpha, i))(i) = \xi\}$. Da $\kappa_i < \lambda_i$, ist diese Menge nicht-leer und man kann ξ_i annehmen, als das kleinste ξ, sodass $(f(\alpha, i))(i) \neq \xi$ für alle $\alpha \in \kappa_i$. Man definiert die Funktion $g \in \{g \mid dom(g) = I \textit{ und } g(i) \in \lambda_i\}$ als $g(i) = \xi_i$ für alle $i \in I$. Seien $i \in I$ und $\alpha \in \kappa_i$, dann gilt $(f(\alpha, i))(i) \neq \xi_i = g(i)$, also $f(\alpha, i) \neq g$ und somit $g \notin ran(f)$. □

Literatur

[1] R. Schindler, *Set theory: Exploring independence and truth*, Springer Verlag (2014)