1. BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Von Zahlen, die Axiome sind - Eine Einführung in die Großen Kardinalzahlen

Verfasser

Tim Tomic

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc.)

Wien, im Monat Juni 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 01646587
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuerin:	Dr. Sandra Müller

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Einleitung

Diese Arbeit versteht sich als eine Einführung in die Theorie großer Kardinalzahlen. Es ist meine Hoffnung, dass sie eine Art Autobahnauffahrt für jene sein wird, die sich näher mit dem Thema auseinandersetzen wollen.
Es gibt natürlich solche und solche Autobahnauffahrten - wie all jenen klar sein wird, die schon einmal mit dem Auto in Italien waren - aber ich hoffe, dass ich mit genug Redundanz und Enthusiasmus geschrieben habe, dass sie sich ohne große Schwierigkeiten lesen lässt.

1 Die Anziehungskraft der Zahlen

In diesem Teil der Arbeit möchte ich die darauf folgenden Inhalte motivieren, und meinen persönlichen Zugang als solchen sichtbar machen. Mir ist wichtig, dass der Text nicht nur argumentativ klar und mathematisch präzise, sondern dabei auch das einfängt, was mich daran begeistert.
Die Definitionen, Sätze und Beweise der Mathematik sind schließlich nicht auf einem Meteoriten vom Himmel gefallen. Hinter jedem Begriff und jedem Argument - ja sogar hinter jeder Notation - steckt ein *Jemand*, der sich darüber aus *persönlichem* Interesse Gedanken gemacht hat.
Mathematik ist eine wundervolle Tradition - eine Lobpreisung des menschlichen Verstandes, eine unerschöpfliche Quelle großer Einsichten, nützlicher Beschreibungen und wunderschöner Bilder.
Manchmal laufen wir jedoch Gefahr, uns auf unseren Verstand zu reduzieren, und den Rest des Mensch-Seins als irrelevanten Störfaktor abzutun. Wer wünscht sich schließlich nicht manchmal, die ganze Welt wäre so schön ordentlich und rein, wie wir es uns in der Mathematik zurechtgelegt haben?
Obwohl der Wunsch begründet ist, und wir gesellschaftlich wohl von mehr unbefangener Klarheit und kritischem Denken profitieren würden, müssen wir uns auch darum sorgen, dass unsere Menschlichkeit nicht das Opfer von fanatischem Purismus, kalter Strenge und unkreativem Minimalismus wird.
Vielleicht sollten wir uns auch diesbezüglich Gedanken machen, wenn wieder einmal die Frage aufkommt, warum denn Mathematik bei der Allgemeinheit so unbeliebt ist...
Dieses Zitat, das Blaise Pascal nachgesagt wird, drückt es ganz gut aus:

> *Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, sie etwas unterhaltsamer zu gestalten.*

1.1 Ein prämathematisches Spiel

Große Zahlen sind schon für kleine Kinder beeindruckend. Eine der ersten spontanen kognitiven Beschäftigungen mit Zahlen ist nicht etwa das (relativ langweilige) *Rechnen mit Zahlen unter Zwanzig*, sondern ein Spiel, bei dem es nur um die Größen der im Spiel verwendeten Zahlen geht.
Dieses Spiel wird typischerweise zu zweit gespielt, und es werden keine extra Materialien benötigt - nicht einmal Stift und Papier (oder Zirkel und Lineal).
Das Spiel beginnt, indem Spieler I eine Zahl n_0 nennt, woraufhin Spieler II am Zug ist, und eine Zahl n_1 nennt. Gilt $n_1 \leqslant n_0$, so gewinnt Spieler I, ansonsten setzt sich das Spiel fort, indem Spieler I eine weitere Zahl n_2 nennt. Wie sich vielleicht ahnen lässt, gewinnt Spieler II, wenn $n_2 \leqslant n_1$, ansonsten setzt sich das Spiel mit n_3 fort...
Der Unterhaltungswert dieses Spiels besteht für Erwachsene hauptsächlich in den abstrusen Neologismen, die sich jüngere SpielerInnen oft ausdenken. „Zahlen“ wie etwa *Tausendhundertmillionentausend* sind besonders in den späteren Runden des Spiels nicht selten.
Leider hört das Spiel selbst relativ schnell auf, spannend zu sein. Es gibt nämlich keinen Weg, einen Sieg zu erzwingen, solange das Gegenüber optimal strategisch spielt. Eine Version dieser optimalen Strategie besteht darin, auf n_k schlichtweg mit $n_k + 1$ zu antworten, egal wie groß n_k sein mag.
Es ist schließlich *offensichtlich*, dass $n_k + 1$ wieder eine Zahl sein wird, und dass $n_k + 1 > n_k$ immer gilt. Gefinkelte SpielerInnen kommen womöglich auf die Idee, die ominöse „Zahl“ ∞ zu spielen, aber auch das stellt kein Problem dar, solange man sein Gegenüber von Aussagen wie $\infty + 1 > \infty$ überzeugen kann.
Interessanterweise divergieren jedoch schon im Kindesalter die Meinungen bezüglich der Wahrheit solcher Aussagen. Zum einen gibt es Puristen, die die Verwendung von ∞ als Zahl gänzlich ablehnen, häufig trifft man aber auch auf die Behauptung, dass „$\infty + 1$ auch wieder ∞ ist“.
Diese spontane Spaltung in „zahlenphilosophische Schulen“ ist ein ganz klares Indiz für die Ursprünglichkeit mathematischer Intuition. Tatsächlich beschäftigt die Mathematik die Menschheit bereits seit Jahrtausenden - zurecht, möchte ich behaupten.

1.2 Warum faszinieren uns Zahlen?

Die Betrachtung von Zahlen ist ein klassisches mathematisches Unterfangen. Obwohl natürlich nur eine eigene historisch-anthropologisch-psychologische Untersuchung dieser Beschäftigung auch nur näherungsweise hinreichend wäre, um ihre Gründe zu ermitteln, wollen wir uns doch kurz die obige Frage stellen.

Sich diese Frage zu stellen ist natürlich nur dann wirklich sinnvoll, wenn einen Zahlen tatsächlich faszinieren - und dass sie das tun ist keineswegs a priori gegeben. Vielleicht ist deshalb folgende Frage besser:

Warum sollten uns Zahlen faszinieren?

Man möchte meinen, Zahlen seien überaus alltägliche Objekte. Schließlich ist Zählen nicht nur seit Jahrtausenden eine komplett alltägliche Tätigkeit, sondern wirkt in seiner konzeptuellen Einfachheit auch gewissermaßen „naturgegeben“. Dennoch unterscheiden sich die Zahlen selbst von anderen Alltagsobjekten auf folgende Art und Weise: Zahlen verändern sich nicht, sie entstehen nicht, sie vergehen nicht. Die 3 wird auch morgen noch so sehr 3 sein, wie sie es jetzt ist. Natürlich könnte man lange darüber sprechen, ob mathematische Objekte eine eigene, platonische Existenz genießen, oder nur als Konzepte im menschlichen Geist bestehen. Das ist zweifelsohne eine interessante Frage, die wohl große erkenntnistheoretische Signifikanz hat, aber es ist auch eine Frage der Definitionen: Was genau bedeutet „Existenz“ im Bezug auf abstrakte Dinge?
Wer weiß. Es ist auch nicht weiter wichtig. Das wichtige ist, dass Zahlen insoweit „existieren“, dass wir uns gegenseitig allgemeine Fragen über ihre Beziehungen stellen können: Wie viele Zahlen gibt es? Welche Zahlen sind Vielfache von bestimmten kleineren Zahlen, und welche nicht? Und so weiter.
Diese Fragen unterscheiden sich von den folgenden: Wer war der fünfte Präsident der USA? Wie groß ist ein Proton? In welchem Jahrhundert lebte CAUCHY? Der Unterschied ist, dass die Fragen bezüglich Zahlen auch ohne eine verlässliche historische Quelle oder aufwändige physische Messapparate behandelt werden können.
Zahlen haben also eine gewisse Universalität - sie sind zeit- und ortslos, sie ergeben sich scheinbar von selbst, sobald mehrere ähnliche Dinge existieren, die sich zählen lassen, und jeder, der Zeit und Lust hat, kann sich ernsthaft mit ihnen beschäftigen.

1.3 Modelle der Wirklichkeit

Unsere immense Neugier ist ein großer Teil davon, was uns zu Menschen macht. Bereits in grauer Vorzeit stellten wir uns, aus reinem Interesse, Fragen über das tiefe Wesen der Welt.
Es wäre schließlich schön zu wissen, was die universellsten Komponenten unserer Realität und ihre Beziehungen zueinander sind, nicht zuletzt um sie zu unserem Vorteil manipulieren zu können. Anfangs versuchte man mittels Mythen - also unter Annahme der Existenz bestimmter sehr mächtiger, oft menschenähnlicher Wesen - befriedigende Antworten zu finden.

Nun lassen sich leider viel zu viele verschiedene (aber oberflächlich gleichermaßen plausible) mythologische Modelle erzeugen, womit sich die Frage stellt, wann ein Modell besser als ein anderes ist. Ein naheliegendes Maß für die Güte eines Modells ist seine Kapazität, Vorhersagen für *neue* Phänomene zu machen. Man einigte sich auch darauf, dass Modelle, die falsche Vorhersagen machen, ergänzt, modifiziert oder verworfen werden müssen.
Es ist auch klar, dass ein Modell, das die Welt über menschenähnliche Wesen und deren Interaktionen erklärt, aufgrund seiner psychologischen Komplexität keine klaren Vorhersagen für neue Phänomene machen kann. Solche Modelle sind unter Umständen also zwar besonders ansprechend, aber Modelle, die stattdessen nur mechanistische, unbelebte Grundprinzipien und -objekte annehmen, sind besser zu handhaben.
Zusätzlich sollten die Begriffe des Modells natürlich möglichst klar definiert und nachvollziehbar sein, damit mehrere Menschen zugleich daran konstruktiv arbeiten können, und damit kein Fortschritt durch das Vergessen der richtigen Interpretation der Begriffe verloren gehen kann.
Diese Einsichten waren fundamental für die Entstehung der Naturwissenschaften, aber sie enthalten in sich auch den Keim der reinen Mathematik. Schließlich muss man sich nicht mit der *wirklichen* Realität befassen, um über komplexe Systeme klar definierter Begriffe zu sprechen, und sich Fragen über mögliche interessante Folgerungen aus deren Definitionen zu stellen.

1.4 Modelle der Meta-Wirklichkeit

Die Wahrheiten, die sich ergeben, wenn man die Modelle selbst untersucht, sind mehr oder weniger komplett unabhängig von Zeit und Ort, standhaft und unbeugsam - selbst gegenüber den virtuosesten Sophistereien: Ob die Naturgesetze variieren können ist unbekannt, aber Mathematik ändert sich nie und nirgendwo.
Die Mathematik ist eine besondere Art der Beschäftigung mit Abstraktionen. Unser fortgeschrittenes Verständnis der Welt beruht auf unserer Fähigkeit zu abstrahieren, d.h. viele Dinge unter wenigen Begriffen und Beziehungen zusammenzufassen, und dann diese Begriffen und Beziehungen so lange zu kneten, bis sie uns etwas neues über die Welt verraten.
Die Modelle der Realität, die wir in den Naturwissenschaften betrachten, sind Abstraktionen, die wir Menschen der Welt *aufzwingen*. Und als es uns gelang, diese Abstraktionen von ihrer Beziehung zur Alltagsrealität zu trennen, wurde die Mathematik geboren.
Beginnend zur Zeit EUKLIDS - der erstmals ein Axiomensystem seinen Theoremen und Beweisen voranstellte, und dessen *Elemente* das angeblich bis auf die Bibel einflussreichste Buch auf den westlichen Geist darstellen – stellte sich immer

klarer heraus, dass die in der Mathematik erbrachten Beweise nicht derselben zweifelhaften, stetiger Veränderung ausgesetzten Natur sind, wie etwa naturwissenschaftliche oder philosophische Erörterungen.
Die Jahrhunderte seitdem produzierten eine Vielfalt mathematischer Gebiete, mit unzähligen Begriffen und Resultaten, und es schien wohl lange so, als wären sie alle unhinterfragbar.
Die höheren Begriffe hingen schließlich durch eine lückenlose, aus einfachen logischen Schlussfolgerungen aufgebaute Kette an den fundamentalen Begriffen, und die Resultate ergaben sich auch immer durch Aneinanderreihungen einfacher logischer Schlussfolgerungen. Wo bleibt da noch Platz für Unklarheiten?

2 Zahlen sind auch nur Mengen

2.1 Die Suche nach dem Fundament

Wie bereits gesagt, beschäftigt die Mathematik den menschlichen Geist bereits seit Jahrtausenden. Ziel dieses Kapitels soll es sein, eine Verbindung zwischen der Geschichte der Mathematik und axiomatischer Mengenlehre herzustellen. Die folgende Zusammenfassung basiert vor allem auf [5], jedoch auch auf [3] und [2].

Anfänge

Unsere mathematische Tradition hat ihre Wurzeln im antiken Griechenland. Obwohl bis dahin bereits einiges an mathematischem Wissen entdeckt worden war - vor allem in Mesopotamien und Ägypten - waren es die Griechen (und insbesondere die Pythagoräer), die der Mathematik ihren heutigen Namen gaben, und sie als Disziplin etablierten. Sie hatten das Potential lückenloser, deduktiver Argumente erkannt, und von ihnen stammt unsere Konzeption des „rigorosen Beweises“.
Die zwei ersten großen Mathematiker der Antike waren Thales und Pythagoras von Samos. Ihre Erkenntnisse wirken im Kontext heutiger Theorie sehr elementar, aber sie waren ein wichtiger Grundstein und Nährboden für die Disziplin. Hippokrates von Chios verfasste als erster eine Sammlung geometrischen Wissens, die sogenannten *Elemente*. Sie diente dem bereits erwähnten Euklid später als wichtige Quelle für dessen gleichnamiges Werk.
Die Griechen waren auch die ersten, die sich die Köpfe über das Konzept der Unendlichkeit zerbrachen. Zeno von Elea stellte im 5. Jhdt. v. Chr. seine bekannten Paradoxien auf - das berühmteste dieser ist das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte, dessen vollständige Auflösung erst das *Grenzwertkonzept* sein sollte.

Ein großer Förderer der Mathematik war der berühmte Philosoph Platon. Die Erkenntnisse Pythagoras' inspirierten ihn zur Gründung seiner Akademie in Athen im Jahre 387 v. Chr., in der viele prominente Mathematiker der Antike entstehen sollten. Für ihn stellte die Mathematik einen Pfad zu Erkenntnissen über die Natur der Realität dar, und er war insbesondere davon überzeugt, dass die Geometrie der Schlüssel zu den Geheimnissen des Universums sei.
Platon half, die sog. drei klassischen Probleme der Mathematik (Quadratur des Kreises, Verdopplung des Würfels, Dreiteilung des Winkels) zu popularisieren. Am bekanntesten ist er im mathematischen Kontext für die Entdeckung der fünf konvexen regulären dreidimensionalen Polyeder, die nach ihm auch Platonische Körper genannt werden.
Plato hatte jedoch keinen Beweis dafür geliefert, dass diese fünf - Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder - die *einzigen* solchen Polyeder waren. Dies holte Euklid ein halbes Jahrhundert später nach.
Euklid verfasste rund um 300 vor Christus die 13 Bücher seiner *Elemente*. Sie sind eine Kompilation der Gesamtheit der Mathematik seiner Zeit, und galten mehr als zwei Jahrtausende lang als *das* Lehrbuch in Sachen Geometrie und Mathematik allgemein. Euklid legte mit diesem monumentalen Werk ein für alle Mal den Bauplan des mathematischen Arguments fest: Ausgehend von Grundannahmen werden durch lückenlose logische Schlussfolgerungen Theoreme bewiesen.
Euklid hielt nicht nur seine Definitionen fest, sondern machte auch explizit, mit welchen Operationen sich in der Geometrie Beweise führen lassen, und welche Regeln grundsätzlich für die definierten Objekte gelten.
Dies ist der Inhalt der sog. *allgemeinen Wahrheiten* und *Postulate*, die zu Anfang der *Elemente* stehen: Sie klären respektive die Bedeutung der „Gleichheit" zweier Objekte bzw. Größen, und beschreiben fundamentale Wahrheiten über geometrische Objekte - wie etwa, dass sich alle rechten Winkel gleichen, oder dass sich je zwei Punkte immer durch eine Strecke verbinden lassen.
Sie sind die Grundannahmen, auf denen alle weiteren Resultate aufbauen, also im Wesentlichen das, was wir heutzutage *Axiome* nennen. Wer sich diese Axiome ansieht, merkt, dass es sich um „trivialerweise offensichtlich wahre" Aussagen handelt. Warum hat sich Euklid entschieden sie aufzuschreiben?
Nun, wer einen Beweis führen will, und im Nachhinein unparteisch überprüfen, ob der Beweis auch tatsächlich aufgeht, der braucht ein sehr klares Verständnis davon, was *man überhaupt eigentlich darf*.
Diese Einsicht der Notwendigkeit einer expliziten Axiomatisierung ist eine Idee mit weitreichendem Einfluss in der Mathematik und den Naturwissenschaften.

We need to go deeper

Eines der Postulate EUKLIDs, das sog. *Parallelenpostulat*, war Mathematikern jedoch ein Dorn im Auge. Es schien auf eine klobige Art und Weise viel spezifischer und weniger selbstevident als die übrigen vier, und so suchte man Jahrtausende lang nach einem Beweis des fünften Postulats mittels der ersten vier.
Es stellt sich heraus, dass das fünfte Postulat tatsächlich **nicht** aus den ersten vier folgt, denn es lassen sich Geometrien betrachten, in denen die ersten vier gelten, das fünfte jedoch nicht. Es handelt sich um die sog. *hyperbolische* und *elliptische* Geometrie (in denen Dreiecke respektive eine Winkelsumme kleiner bzw. größer 180° haben) die im 19. Jhdt von BOLYAI, LOBACHEVSKY, RIEMANN, und POINCARÉ untersucht wurden. Die Unabhängigkeit des Parallelenpostulats von den übrigen vier zeigte BELTRAMI im Jahre 1868.
Im 19. Jahrhundert vollzog sich in der Mathematik überhaupt eine große Transformation: Die von NEWTON und LEIBNIZ im 17. Jhdt. begründete Analysis wurde endlich arithmetisiert, und damit begann auch eine erneute intensive Beschäftigung mit Abstraktion und Verallgemeinerung.
Die Existenz der nicht-euklidischen Geometrien löste in diesem Kontext eine zunehmend nagende Unruhe aus: Es kann verschiedene Mathematiken geben, und eine Behauptung kann in der einen wahr, aber in einer anderen falsch sein! Dieses zunehmende Bewusstsein für die Relevanz der Grundlagen der Mathematik führte zur sog. *Grundlagenkrise.* Aus dieser ergaben sich in weiterer Folge zeitgemäße Axiomatisierungen der Arithmetik durch PEANO, sowie der Geometrie durch PASCH und HILBERT.
In etwa zur selben Zeit entstand auch die Mengenlehre. Es war eine graduelle Entwicklung, die Ausweitung des Funktionenbegriffs von analytischen Ausdrücken auf allgemeinere Abbildungen brachte mit sich die genauere Betrachtung des Kontinuums, nun nicht mehr nur als ganzes, sondern als eine Sammlung seiner Punkte, der reellen Zahlen.
Diese Punkte waren die *Elemente* der *Menge* der reellen Zahlen (genannt $\mathbb{R}$), genauso waren die natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$), die Quadratzahlen, die geraden und die ungeraden Zahlen, sowie die rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) jeweils Mengen.
Bereits im 17. Jhdt. hatte jedoch GALILEO scheinbare Unstimmigkeiten in der Konzeption dieser unendlichen Mengen entdeckt. Die erste, bekannt als *Galileos Paradoxon*, lautet wie folgt: Quadratzahlen lassen sich in eine eins-zu-eins Korrespondenz mit den natürlichen Zahlen bringen - also sind beide Mengen gleich groß - aber sie sind auch eine echte Untermenge der natürlichen Zahlen - also muss es doch weniger Quadrate als natürliche Zahlen geben!
Die zweite ist die Tatsache, dass zwei konzentrische Kreise beide aus unendlich vielen Punkten bestehen, obwohl doch der größere Kreis mehr Punkte zu haben

scheint.

GALILEOs Lösung dieser Probleme war die Annahme, dass die Begriffe „gleich groß“, „größer“, oder „kleiner“ mit unendlichen Größen fundamental inkompatibel waren, und man also nur endliche Mengen der Größe nach vergleichen konnte.

Das reichte CANTOR nicht. Er hatte sich zuvor mit Fragen in der Analysis der unendlichen Reihen beschäftigt, und sich dabei näher mit Sammlungen reeller Zahlen und deren Aufzählungen auseinandergesetzt.

Er war der Ansicht, dass mit unendlichen Größen dieselben Operationen und Vergleiche möglich sein sollten wie mit endlichen. Es wurde ihm klar, dass es von Interesse sein könnte, sich allgemein mit Sammlungen und Aufzählungen abstrakter Punkte auseinanderzusetzen. Im Laufe dieser Auseinandersetzung erschloss er erste naiv mengentheoretische Konzepte, und formulierte unter anderem eine Hierarchie von Unendlichkeiten, die der *transfiniten Zahlen.*

Das Wort „transfinit“ verwendete der gläubige CANTOR um seine Hierarchie der Unendlichkeiten, in der es keine „größte“ gab, von seiner Konzeption der „absoluten Unendlichkeit“, des „Infiniten“, zu trennen, das er effektiv mit Gott gleichsetzte. (Vielleicht sollte man also ihm zu Ehren nicht unendlich, sondern *über*endlich sagen, aber das hat sich nicht durchgesetzt.)

Er zeigte, dass die Mengen der natürlichen, der geraden, der ungeraden, der Prim-, der Quadrat-, und sogar der rationalen Zahlen in einem bestimmten Sinne alle gleich groß waren.

Mit seinem berühmten Beweis für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen im Jahre 1873 hatte CANTOR offiziell die Mengenlehre als neue Disziplin geboren, die in den darauf folgenden Jahrzehnten durch seine Untersuchung von Ordinal- und Kardinalzahlen erblühen sollte.

Doch er sollte dadurch auch auf folgende Frage stoßen, die ihm, und der ganzen Mathematik bis ins Jahr 1960, große Schwierigkeiten bereiten sollte: Gibt es eine Menge reeller Zahlen, die zwar überabzählbar ist - also mehr Elemente hat als $\mathbb{N}$, aber weniger Elemente hat als ganz $\mathbb{R}$?

Die Hypothese, dass es keine solche Menge gibt, wird *Kontinuumshypothese* genannt, und kann in CANTORs Aleph-Notation, die wir noch besprechen werden, wie folgt geschrieben werden: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Viele Mathematiker beunruhigte CANTORs Mengenlehre, und manche, wie etwa CANTORs früherer Professor, KRONECKER, und POINCARÉ weigerten sich sogar vehement, ihre Sinnhaftigkeit anzuerkennen. (POINCARÉ etwa meinte, spätere Generationen würden die Mengenlehre als eine Krankheit sehen, von der sich

die Mathematik erholt haben werde...)
Es gab jedoch auch solche, die in der Mengenlehre sofort immensen Wert und Potential sahen, wie etwa Hilbert, der 1926 im Zuge des sog. *Hilbertprogrammes* folgendes schrieb:

> *1. Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlussweisen wollen wir, wo immer nur die geringste Aussicht sich bietet, sorgfältig nachspüren und pflegen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.*
> *2. Es ist nötig durchweg dieselbe Sicherheit des Schließens herzustellen, wie sie in der gewöhnlichen niederen Zahlentheorie vorhanden ist, an der niemand zweifelt und wo Widersprüche und Paradoxien nur durch unsere Unaufmerksamkeit entstehen. Die Erreichung dieser Ziele ist offenbar nur möglich, wenn uns die volle Aufklärung über das Wesen des Unendlichen gelingt.*

Aus dem zweiten Absatz wird ersichtlich, wie ernst man damals das Problem der Axiomatisierung der gesamten Mathematik nahm.
Frege hatte 1893 seine *Grundgesetze der Arithmetik* veröffentlicht, mit denen er gehofft hatte, eben dieses Ziel erreicht zu haben - also die gesamte Mathematik axiomatisiert zu haben. Doch es stellte sich heraus, dass seine Theorie logisch inkonsistent, d.h. selbstwidersprüchlich war. Russell demonstrierte dies in seiner berühmten Antinomie, die wir uns in 2.1 genauer ansehen werden.
1908 veröffentlichte Zermelo, ein Schüler Hilberts, die erste Axiomatisierung der Mengenlehre. Er verschob den Fokus von den transfiniten Zahlen auf die gänzlich abstrakte Betrachtung von Mengen: Sie können mittels bestimmter Operationen aus anderen Mengen „gebaut“ werden, und ihre Struktur untereinander basiert nur auf der $\in$-Relation.
Nach einigem Hin und Her und durch die harte Arbeit vieler Mathematiker dieser Zeit (Zermelo, Fraenkel, Kuratowski, Skolem, Tarski, von Neumann, ...) wurde aus dieser ersten Axiomatisierung das Axiomensystem (ZFC), das bis heute das Fundament des Großteils der Mathematik ist.
Auch Cantors transfinite Zahlen wurden als $\in$-wohlgeordnete, transitive Mengen, d.h. *Ordinalzahlen* wiedergefunden - sie waren nicht mehr Abstraktionen, die Mengen beschrieben, sondern selbst Mengen.

Axiomensysteme und unerwartete Folgen

1921 rief Hilbert das Hilbertprogramm ins Leben, dessen Ziel es war, die gesamte Mathematik durch ein Axiomensystem auf der Ebene der Prädikatenlogik erster Stufe zu formalisieren, sowie natürlich die Widerspruchsfreiheit der dazugehörigen Axiome nachzuweisen.

In seiner Jugend teilte GÖDEL den Optimismus HILBERTs, dass sich die Mathematik wieder ganz machen ließe, nachdem die letzten Jahrzehnte so viele spaltende Unsicherheiten aufgeworfen hatten. Sollte das Hilbertprogramm erfolgreich sein, so würden sich intuitionistische Bedenken gegenüber nicht-konstruktiven Beweismethoden als grundlos herausstellen.
GÖDEL war also auf der Suche nach der Lösung des zweiten der 23 HILBERTschen Probleme: Die Frage nach der logischen Grundlage der gesamten Mathematik. Diese Suche sollte in ihm Ideen erzeugen, die schlussendlich die gesamte Mathematik revolutionieren würden.
Der erste große Erfolg gelang ihm mit seinem *Vollständigkeitssatz*. Er klärte den Unterschied zwischen Semantik und Syntax in der Prädikatenlogik erster Stufe auf, und sicherte ihre Schlüsseleigenschaft, die Kompaktheit. Die Aussage des Satzes ist in etwa die folgende: Ist die Wahrheit eines Satzes im Kontext gegebener Annahmen gesichert, so lässt sich dieser auch aus diesen Annahmen durch ein Beweiskalkül beweisen, und umgekehrt.
In den 1930ern transformierte GÖDEL mit seinen Untersuchungen die mathematische Logik. Die Hauptquelle dieser Transformationen waren seine *Unvollständigkeitssätze*, die zur Entdeckung der Unentscheidbarkeit der Validität der Prädikatenlogik erster Stufe, sowie der Entwicklung der Berechenbarkeitstheorie führten.
Der erste Unvollständigkeitssatz sagt, dass ein hinreichend mächtiges, rekursiv aufzählbares formales System immer entweder unvollständig (es gibt wahre Aussagen, die nicht bewiesen werden können) oder selbstwidersprüchlich ist. Der zweite sagt, dass kein hinreichend mächtiges formales System seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen kann.
Diese Einsichten waren zugleich revolutionär und zutiefst erschütternd. Ein großer mathematischer Traum war für immer geplatzt, das Hilbertprogramm gescheitert. Obwohl die Bedeutung der Sätze keineswegs ist, dass wir keine Mathematik mehr betreiben können, ist uns durch sie doch eine Unschuld genommen.
Doch die Geschichte der mathematischen Grundlagenforschung endet nicht mit GÖDELs Sätzen. Die letzten 100 Jahre dokumentieren die Entstehung und Reifung der Modelltheorie und der deskriptiven Mengenlehre. Heutzutage ist die Untersuchung *Großer Kardinalzahlen* - insbesondere solcher, die in ihren Eigenschaften der abzählbaren Unendlichkeit $\aleph_0$ ähneln - der Fokus der axiomatischen Mengenlehre.
Wie wir noch sehen werden, versteckt sich hinter dieser Untersuchung großer Zahlen in Wirklichkeit auch die Untersuchung der Axiomhierarchie, an deren Fuß wir unsere mathematische Hütte gebaut haben.

2.2 Mengen und Klassen

Wir haben nun also ein bisschen über die Geschichte der Mengenlehre geredet, und ein weiteres bisschen über die Mathematik und ihre Grundlagen sinniert. Natürlich könnten wir weiter auf der informell-philosophischen Ebene bleiben. Wir könnten etliche Seiten lang sehr bedeutsam scheinende Fragen aufwerfen, und wahlweise entweder verwerfen oder unbeantwortet lassen.
Wir müssen uns jedoch ehrlich sein, dass das eher mühsam und verwirrend als erkenntnisreich wäre. Deshalb wollen wir in die Fußstapfen der oben erwähnten Mathematiker treten, und nun die bisher angeschnittenen Themen auch rigoros untersuchen.
Wir haben bereits gesehen, dass man sich mit dem naiven Betreiben von Mathematik große Schwierigkeiten einhandeln kann. Gott sei Dank müssen wir das nicht, denn wir stehen auf den Schultern von mathematischen Riesen. Wir beginnen unser Abenteuer mit einer Art mathematischer *Tabula Rasa*.
Damit soll gemeint sein, dass wir uns *vollkommen* unwissend stellen - wir wissen von *gar nichts*. Wir kennen keine Funktionen, keine Rechenarten, keine Ableitung und kein Integral - ja, wir wissen noch nicht mal was Zahlen sind. Was sollen wir tun, wenn wir gar nichts aussagen können, geschweige denn vermuten oder beweisen?
Es bleibt uns eigentlich nichts anderes übrig, als uns folgende Frage zu stellen:

Was sind Dinge?

Diese Frage klingt hoffnungslos allgemein. Wir werden aber sehen, dass wir sie wenigstens im Terrain der reinen Mathematik so beantworten können, dass MathematikerInnen hinreichend zufrieden sind, um relativ unverwirrt arbeiten zu können. Die folgenden Inhalte basieren auf [2].
Intuitiv gesehen ist eine Menge eine Sammlung von Dingen, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Ein naheliegender Ansatz könnte es deshalb sein, folgende Regel aufzustellen:

Sei E eine Eigenschaft, d.h. $E(x)$ gdw. x E erfüllt.
Es gibt eine Menge $y = \{ x \mid E(x) \}$.

Darauf, dass dieses Prinzip jedoch **falsch** ist, machte bereits RUSSELL den ambitionierten FREGE aufmerksam:

Proposition 2.1 (RUSSELLsche Antinomie)
Das obige Prinzip ist selbstwidersprüchlich.

Beweis. Nach diesem Prinzip lässt sich die Menge S konstruieren, deren Elemente genau die Mengen sind, die sich nicht selbst enthalten: $S = \{\ x \mid x \notin x\ \}$.
Nun stellen wir uns folgende Frage: Gilt $S \in S$?
Nun, aus $S \in S$ folgt $E_S(S)$, also $S \notin S$, andererseits folgt jedoch aus $S \notin S$ dass $\neg E_S(S)$, und daher $S \in S$. Insgesamt also $S \in S \iff S \notin S$. ↯ □

Wir müssen also diese naive Konzeption einer Menge verfeinern. Wir können uns sicher sein, dass wir Paradoxien dieses Typs vermeiden, wenn wir das obige Prinzip wie folgt abschwächen:

Sei E eine Eigenschaft.
Für jede Menge x gibt es eine Menge $y = \{\ z \in x \mid E(z)\ \}$.

Dieses neue Prinzip nennen wir das *Aussonderungsschema*, (Aus_ϕ), das tatsächlich Teil unseres Axiomensystems (ZFC) sein wird.
Anstatt wie vorhin alle passenden Mengen aus der Gesamtheit aller Mengen zu sammeln, *sondern* wir hier lediglich aus einer Menge, die wir bereits haben, systematisch Elemente *aus*. Russell kann uns nun nichts mehr anhaben. Wir haben dadurch außerdem gelernt, dass die Gesamtheit aller Mengen keine Menge sein kann.
Nun haben wir aber ein Problem. Unser neues Prinzip ist tatsächlich signifikant schwächer als das alte: Wir können nun z.B. nicht mehr beweisen, dass die Vereinigung zweier Mengen, $x \cup y$, existiert!
Das ist aber auch kein großes Problem, schließlich können wir ja weitere Konstruktionsprinzipien zu unserem Axiomensystem hinzufügen. Die Axiome von (ZFC) werden im Allgemeinen als eine richtige Formalisierung der intuitiv gewohnten Regeln für den Umgang mit Mengen gesehen.
Nun kommt's: Beinahe alle Dinge, die in der Mathematik von Interesse sind, sind Mengen! Na gut, das ist nicht wirklich überraschend, schließlich hat man sich den Mengenbegriff genau für diesen Zweck gebaut...
Sprechen wir noch ein bisschen darüber, was wir oben eigentlich mit dem Wort „Eigenschaft“ meinen. Einen dermaßen wagen Begriff zu verwenden, wenn wir doch eigentlich ein präzises, rigoroses Fundament bauen wollen, wäre *Pfusch am Bau*, und das wollen wir vermeiden.
Wir verwenden die sog. *Prädikatenlogik erster Stufe*, von der wir wissen, dass sie uns aufgrund ihrer Vollständigkeit keine Schwierigkeiten bereiten wird.
Die Sprache der Mengenlehre verwendet neben dem Gleichheitsprädikat $=$ nur noch das binäre Prädikat $\in$, die *Elementrelation*.
Sind x, y beliebige *Variablensymbole*, so gibt es *atomare Formeln*

$$x \in y, \quad x = y.$$

Weitere Formeln lassen sich mittels *Junktoren*,

$$(\phi \vee \psi), \quad \neg\phi,$$

und *Quantoren*,

$$\forall x\phi, \quad \exists x\phi,$$

aus bereits bestehenden beliebigen Formeln ϕ, ψ bauen, jedoch nur in endlich vielen Schritten. Im Weiteren verwenden wir außerdem folgende Kürzel für bestimmte Komposita von Junktoren:

$$\begin{gathered}(\phi \wedge \psi) \text{ heißt } \neg(\neg\phi \vee \neg\psi),\\ (\phi \to \psi) \text{ heißt } (\neg\phi \vee \psi),\\ (\phi \leftrightarrow \psi) \text{ heißt } (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi).\end{gathered}$$

Natürlich behalten wir uns auch vor, jederzeit durch Kürzel neue *Konstanten-*, *Relations-*, oder *Funktionszeichen* einzuführen. Eine Formel ohne freie Variablen nennen wir eine *Aussage*.
Im Gegensatz zu alternativen Axiomatisierungen der Mengenlehre hat (ZFC) nur eine Art Objekt, nämlich die *Menge*. Allerdings wollen wir dennoch auf einer informellen Ebene *Klassen* einführen. Dies tun wir aus rein pragmatischen Gründen: Es ist leichter, mit Klassen zu operieren als mit Formeln.
Sei $\phi(x, p_1, ..., p_n)$ eine Formel. Wir verwenden unser zuerst gescheitertes Prinzip um die folgende *Klasse* zu definieren:

$$\begin{gathered}C = \{\ x \mid \phi(x, p_1, ..., p_n)\ \}\\ (x \in C \text{ gdw. } \phi(x, p_1, ..., p_n)).\end{gathered}$$

Aber wir müssen aufpassen: Damit Russell uns auch hier nichts anhaben kann, sammeln wir nicht aus der Gesamtheit aller Klassen, sondern nur aus der Gesamtheit aller Mengen. Die Elemente von Klassen sind also stets Mengen.
Wir nennen C wie oben *definierbar aus* $p_1, ..., p_n$. Wenn $\phi(x)$ keine Parameter hat, so nennen wir C einfach *definierbar*.
Zwei Klassen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben. Wenn:

$$C = \{\ x \mid \phi(x, p_1, ..., p_n)\ \}, \quad D = \{\ x \mid \psi(x, q_1, ..., q_m)\ \},$$

so gilt $C = D$ gdw.

$$\phi(x, p_1, ..., p_n) \leftrightarrow \psi(x, q_1, ..., q_m).$$

Die *Allklasse*, oder das *Universum*, ist die Klasse aller Mengen:

$$V = \{\ x \mid x = x\ \}.$$

Wir definieren die *Inklusion* von Klassen (C ist eine *Unterklasse* von D):

$$C \subseteq D \text{ gdw. } x \in C \text{ impliziert, dass } x \in D, \text{ und}$$
$$C \subset D \text{ gdw. } C \subseteq D \text{ und } C \neq D.$$

und die folgenden Operationen auf Klassen:

$$C \cap D = \{\ x \mid x \in C \text{ und } x \in D\ \},$$
$$C \cup D = \{\ x \mid x \in C \text{ oder } x \in D\ \},$$
$$C \setminus D = \{\ x \mid x \in C \text{ und } x \notin D\ \},$$
$$\bigcup C = \{\ x \mid x \in S \text{ für ein } S \in C\ \} = \{\ S \mid S \in C\ \}.$$

Jede Menge ist eine Klasse. Sei nämlich S eine Menge, so betrachten wir die Formel $x \in S$ und die Klasse:

$$\{\ x \mid x \in S\ \}.$$

Eine Klasse, die keine Menge ist, ist eine *echte Klasse*.
Das Grundgerüst des Großteils der modernen Mathematik sind die Aussagen des Axiomensystems (ZFC). Von ihnen werden all unsere Betrachtungen ausgehen - sie sind das erste, was wir auf unsere Tabula Rasa schreiben.
Zunächst wollen wir noch einige notationelle Kürzel einführen, die uns dabei helfen werden, die Axiome eleganter aufzuschreiben:

$$\begin{array}{ccc}
a = \varnothing, & \text{gdw.} & a = \{\ x \mid x \neq x\ \} \\
c = \{a, b\}, & \text{gdw.} & \forall x(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b). \\
a = \mathcal{P}(b), & \text{gdw.} & \forall x(x \in a \leftrightarrow x \subseteq b). \\
\exists x \in a : \phi, & \text{gdw.} & \exists x(x \in a \wedge \phi) \\
\forall x \in a : \phi, & \text{gdw.} & \forall x(x \in a \rightarrow \phi) \\
c = (a, b), & \text{gdw.} & c = \{\{a\}, \{a, b\}\} \\
c = a \times b, & \text{gdw.} & \forall x(x \in c \leftrightarrow (\exists y \in a : \exists z \in b : c = \{\{y\}, \{y, z\}\})). \\
d = a \times b \times c, & \text{gdw.} & d = (a \times b) \times c \\
b = a^n, & \text{gdw.} & b = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{n Mal}}
\end{array}$$

Hier sind die Axiome von (ZFC), jeweils sowohl in umgangssprachlicher, als auch formell-logischer Gestalt:

- (Ext), das *Extensionalitätsaxiom*:
  „Mengen werden durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.“
  $\forall x \forall y(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$.

- (Aus_ϕ), das *Aussonderungsschema*:
  „Aus Mengen lassen sich systematisch Elemente aussortieren."
  $\forall v_1 ... \forall v_p \forall a \exists b \forall x (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \phi(x, v_1, ..., v_p))$.

- (Paar), das *Paarmengenaxiom*:
  „Zwei Mengen lassen sich immer in eine dritte hüllen."
  $\forall x \forall y \exists z (z = \{x, y\})$.

- (Ver), das *Vereinigungsaxiom*:
  „Es gibt für jede Menge die Menge der Elemente ihrer Elemente."
  $\forall x \exists y (y = \bigcup x)$.

- (Pot), das *Potenzmengenaxiom*:
  „Es gibt für jede Menge die Menge all ihrer Teilmengen."
  $\forall x \exists y (y = \mathcal{P}(x))$.

- (Fund), das *Fundierungsaxiom*:
  „Jede nichtleere Menge hat ein $\in$-minimales Element."
  $\forall x (((\exists y (y \in x)) \rightarrow (\exists y ((y \in x) \wedge \neg (\exists z ((z \in y) \wedge (z \in x))))$.

- (Ers_ϕ), das *Ersetzungsschema*:
  „Das Bild einer Menge unter einer Funktion ist eine Menge."
  $\forall v_1 ... \forall v_p (\forall x \exists y' \forall y (y = y' \leftrightarrow \phi(x, v_1, ..., v_p))$
  $\rightarrow \forall a \exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x, v_1, ..., v_p))))$.

- (Inf), das *Unendlichkeitsaxiom*:
  „Es gibt eine induktive Menge."
  $\exists x (\varnothing \in S \wedge \forall x \in S : x \cup \{x\} \in S)$.

- (AC), das *Auswahlaxiom*:
  „Aus allen nichtleeren Elementen einer Menge lässt sich gleichzeitig jeweils ein Element auswählen."
  $\forall x ((\forall y \in x : y \neq \varnothing \wedge \forall y \in x : \forall y' \in x : (y \neq y' \rightarrow y \cap y' = \varnothing))$
  $\rightarrow \exists z \forall y \in x : \exists u (z \cap y = \{u\}))$.

2.3 Ein mathematisches Spiel

Wer sich die obigen Axiome in formeller Gestalt längere Zeit ansieht, fragt sich vielleicht folgendes: Wieso betreiben wir Mathematik überhaupt? Warum tun wir uns dieses furchtbare Kopfweh an?
Nun, wir haben im Laufe dieser Einleitung einige Erklärungsansätze besprochen. Mathematik ist...

- ein spannender Zeitvertreib in jedem Lebensalter,
- beständig und unbeugsam,
- ein Stück erfrischender Klarheit in einer sonst so ungewissen Welt,
- eine geeignete Sprache für unsere Modelle der Realität, ...

Doch es gibt auch eine kürzere Antwort, die wohl einige Überschneidung mit den obigen Punkten hat: Es ist unglaublich, *wie greifbar* diese merkwürdige Welt rein abstrakter Objekte ist, obwohl sie auf einem komplett formalistischen Fundament steht. (Egal, ob wir diese Welt nun entdeckt oder erschaffen haben.)
Das Wort „Banane“ ist nicht *wirklich* eine Banane, sondern nur ein Verweis auf die gelbe Frucht. Und so verhält es sich beinahe überall: Namen sind Namen, Worte sind Worte, und sie sind nicht die Dinge, auf die sie verweisen.
Und in der Mathematik? Auf eine gewisse Art und Weise gibt es in der Mathematik *nur* die Namen - denn was ist eine Menge schon, als ein Begriff, der auf eine bestimmte Art mit anderen Begriffen zusammenhängt?
Und doch können wir intuitiv mit ihnen arbeiten - so gut nämlich, dass wir unsere tiefsten Intuitionen zum axiomatischen Grundgerüst der Mathematik - und damit indirekt der ganzen Wissenschaft - machen haben können. *Das* darf einen schon verblüffen.
Wenn wir uns Fragen zu den Grundsätzen der Mathematik stellen, so betrachten wir eine Gänsehaut-induzierende Grauzone: Man könnte meinen, es ginge um das grundlegende Wesen der Existenz (Was sind Dinge? usw.). Es ist aber auch eine Tatsache dass wir Menschen sind, und dass unsere Beschreibungen der Welt nicht die Welt selbst sind, also geht es auch um das grundlegende Wesen menschlicher Intuition. Dieser verführerische Zauber hat bereits so manchen neugierigen Menschen zum/zur MathematikerIn gemacht.
So, wir sind also am Ende der Einleitung dieser Arbeit angekommen. Bis jetzt haben wir jedoch gar nicht darüber gesprochen, worum es in der Arbeit eigentlich gehen soll. Das wollen wir jetzt nachholen.

Alephs

Alle natürlichen Zahlen sind sowohl Ordinal-, als auch Kardinalzahlen. Das werden wir später noch etwas ausführlicher behandeln.
Die kleinste Unendlichkeit ist die Aufzählung aller natürlichen Zahlen, ω. Auch sie ist sowohl eine Ordinal-, als auch eine Kardinalzahl. Die nächste Ordinalzahl $\omega + 1$ ist jedoch keine Kardinalzahl. Es gibt also verschiedene Größen der Unendlichkeit, und ω und $\omega + 1$ sind gleich groß.
Cantor führte für diese verschiedenen Größen der Unendlichkeit die sog. *Aleph*-Notation ein. (Aleph, $\aleph$, ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.)
Er setzte $\aleph_0 = \omega$, und die nächste Größe der Unendlichkeit $\aleph_1$ ist die Antwort auf die Frage „Wie viele Ordinalzahlen gibt es, die maximal so groß wie ω sind?"
Cantor zeigte auch, dass $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ und ebenso $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Es war ihm gelungen, mit unendlichen Größen zu operieren.
Nun war ihm noch eine Größe der Unendlichkeit bekannt, nämlich $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, die Anzahl reeller Zahlen. Er stellte sich die Frage, welchen Index $\mathfrak{c}$ in der Aleph-Notation haben würde, also $\mathfrak{c} = \aleph_?$.
Wie bereits erwähnt, vermutete er, dass $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, also dass die Anzahl der reellen Zahlen tatsächlich die zweitgrößte Unendlichkeit sei. Gödel zeigte 1940, dass diese Aussage, die sog. *Kontinuumshypothese*, (CH), unabhängig von den Axiomen von (ZF), d.h. (ZFC) ohne (AC), ist. In (ZF) kann man sich also tatsächlich aussuchen, ob (CH) oder $\neg$(CH) gelten soll.
Ca. 1960 bewies Cohen dann, dass (AC) von (ZF) unabhängig ist, und dass (CH) von (ZFC) unabhängig ist. Er wandte dazu eine von ihm neu entwickelte Technik namens *Forcing* an: Er vergrößerte das Mengenuniversum von (ZFC) leicht, und sah, dass er zwar noch immer ein mit (ZFC) konsistentes Universum hatte, in dem aber (CH) nicht gelten konnte. Das zeigte die Unabhängigkeit.
Unendliche Kardinalzahlen haben einige interessante Eigenschaften: Zum Beispiel lässt sich zeigen, dass die Multiplikation *aller* Alephs trivial ist, d.h. $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ für jede Ordinalzahl α.
Man kann außerdem zeigen, dass es zu jeder Kardinalzahl eine größere Kardinalzahl gibt, und dass es zu einer Sammlung von Kardinalzahlen immer eine kleinste Kardinalzahl gibt, die größer ist als sie alle. Beweise dieser Aussagen finden sich in [2], ab Seite 29.

Die Reellen Zahlen

Wir wissen dank Cantor, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, also dass $\mathfrak{c} > \aleph_0$. Sein Beweis nutzt das bekannte *Diagonalargument*, ein etwas anderer Beweis findet sich in [2], auf Seite 37.
$\mathbb{R}$ ist (bis auf Isomorphismus) die eindeutige linear geordnete Menge, die dicht,

unbeschränkt und vollständig ist, und eine abzählbare dichte Teilmenge hat. (vgl. [2], S. 38 ff.)
Nun gibt es eine schwächere Version der Separabilität von $\mathbb{R}$, d.h. Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge - nämlich erfüllt $\mathbb{R}$ die *abzählbare Antikettenbedingung*: Jede Familie von offenen, paarweise disjunkten Intervallen von $\mathbb{R}$ ist höchstens abzählbar unendlich groß - schließlich können wir jedem solchen Intervall diejenige rationale Zahl aus dem Intervall zuweisen, die als erste in einer gewählten Aufzählung der rationalen Zahlen vorkommt.
Es stellt sich die Frage, ob diese abzählbare Antikettenbedingung ausreicht, um $\mathbb{R}$ zu charakterisieren, also ob sie uns bereits eine separable Menge liefert. Dies ist der Inhalt von SUSLINS Problem:

Frage 2.2
Sei P eine vollständige, dichte, unbeschränkte, linear geordnete Menge, die die abzählbare Antikettenbedingung erfüllt. Ist P isomorph zu $\mathbb{R}$?

Auch diese Frage ist in (ZFC) unbeantwortbar, d.h beide Antwortmöglichkeiten sind als Hypothesen von (ZFC) unabhängig.
Nun haben wir bereits zwei von (ZFC) unabhängige Hypothesen gesehen. Da wir dank GÖDEL wissen, dass es unendlich davon gibt, stellt sich uns nun die Frage, wie diese Hypothesen zueinander stehen: Impliziert die eine die andere? Schließen sie sich aus?
Solche Fragen können wir unter anderem mithilfe *Großer Kardinalzahlen* genauer unter die Lupe nehmen.

Was sind Große Kardinalzahlen?

Große Kardinalzahlen sind unter anderem Objekte, für die man zeigen kann, dass ihre Existenz in der üblichen Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZFC) nicht bewiesen (d.h. auch nicht gegenbewiesen) werden kann.
Es gibt viele verschiedene Arten Großer Kardinalzahlen - wir werden uns später mit den sogenannten *unerreichbaren*, *Mahlo-*, sowie den *messbaren* Kardinalzahlen auseinandersetzen.
Wir können für jede solche Art Kardinalzahl die Aussage „Es gibt sie“ als Axiom zu (ZFC) hinzufügen. Die verschiedenen Arten haben jeweils bestimmte Eigenschaften die sie ausmachen, also bekommen wir, wenn wir die Existenz einer solcher Art Kardinalzahlen als Axiom zu (ZFC) hinzufügen, salopp gesagt eine Mathematik mit „einer neuen Art Objekt“. Mit diesen neuen Objekten lassen sich dann Beweise für einige zuvor unentscheidbare Behauptungen finden.
Die Großen Kardinalzahlen bilden eine Hierarchie - in dem Sinne, dass die Existenz gewisser Großer Kardinalzahlen die Existenz gewisser anderer impliziert. (Am Ende von [3] gibt es eine recht nette visuelle Repräsentation dieser

Hierarchie, die wohl auch auf einem T-Shirt gut aussehen würde...)
Ob gewisse Große Kardinalzahlen existieren oder nicht, ist auch für andere Aussagen relevant: Zum Beispiel ist das von GÖDEL betrachtete Konstruierbarkeitsaxiom (V=L) - das (CH) und (AC) impliziert - inkonsistent mit der Existenz von $0^{\#}$, einer Großen Kardinalzahl.
Große Kardinalzahlen sind jedoch in einem gewissen Sinne „sehr natürliche“ Objekte - die impliziten Grundsätze, die wir mit der Formulierung der Axiome von (ZFC) verfolgt haben, scheinen uns auch nahezulegen, die Existenz Großer Kardinalzahlen zu fordern.
Was passiert, wenn wir *alle* Großen Kardinalzahlen axiomatisch existent setzen? Können wir *dann* vielleicht Aussagen wie (CH) beweisen? Wenn nicht, gibt es natürliche Axiome, die wir zusätzlich hinzufügen können, um (CH) zu klären? Mit solchen Fragen beschäftigt sich die heutige deskriptive Mengenlehre. Der Artikel [1], insbesondere das Ende, ist bei Interesse empfehlenswert.

Wie groß ist so eine Große Kardinalzahl?

Vielleicht ist es unsinnig, über die Größe unendlicher Dinge intuitiv nachdenken zu wollen. Wir wollen dennoch versuchen, ein Gefühl für die unglaubliche Riesigkeit Großer Kardinalzahlen zu entwickeln:
Die Aleph-Funktion $\aleph : \textsc{Ord} \to \textsc{Card}$, die einer Ordinalzahl α die Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ zuordnet, ist eine sog. *normale Funktion*. Man kann zeigen, dass normale Funktionen immer Fixpunkte besitzen - in diesem Fall heißt das, dass es $\alpha \in \textsc{Ord}$ gibt, sodass $\aleph_\alpha = \alpha$ gilt.
Der *erste* Fixpunkt dieser Funktion ist der Grenzwert der Folge

$$\langle\ \aleph_0, \aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}, \dots\ \rangle.$$

Puh, diese Kardinalzahl ist wirklich „groß“, oder nicht? Die Antwort ist *Jein*. Klar, sie ist unvorstellbar groß, aber sie ist keine *Große Kardinalzahl*.
Es sind zwar alle schwach unerreichbaren Kardinalzahlen - das sind die kleinsten der Großen Kardinalzahlen - Fixpunkte der Aleph-Funktion, aber sie sind *größer* als die obige Zahl.
Das ist zwar nur eine grobe Intuition, aber sie soll ja auch nur eine genauere Auseinandersetzung motivieren. Ist es nicht fantastisch, dass wir produktiv über so absurd große Zahlen sprechen können?

Teil II

Grundlagen

Nachdem wir nun im letzten Abschnitt die Axiome von ZFC rekapituliert, und somit einen Überblick über das Fundament der Standard-Mengenlehre gewonnen haben, wollen wir uns in diesem Teil der Arbeit vor allem den Grundlagen der Theorie der Ordinal- und Kardinalzahlen widmen.
Die Theorie der Kardinalzahlen ist in der gegenwärtigen Mengenlehre von geraumer Bedeutung. Unser Ziel ist es vorerst, uns mit den grundlegenden Begriffen so vertraut wie möglich zu machen, um uns im letzten Teil der Arbeit einen kurzen Einblick in die spannende moderne Theorie erlauben zu können.
Wir werden später unter anderem die Messbarkeit von Kardinalzahlen betrachten. Dazu wird es von Vorteil gewesen sein, uns gewisse Elemente der Maßtheorie in den Sinn gerufen zu haben. Eine Diskussion der grundlegenden Gedanken der Maßtheorie schließt daher diesen Teil der Arbeit.
Die Inhalte der nachfolgenden Kapiteln beruhen zum Großteil auf [6], aber auch auf [2] und [3].

3 Ordinalzahlen

3.1 Zahlen als Mengen

Das Unendlichkeitsaxiom (Inf) besagt, dass eine induktive Menge existiert. Erinnern wir uns an die Definition einer induktiven Menge: x ist induktiv, gdw. $\varnothing \in x$ und für alle $y \in x$ gilt, dass: $y \cup \{y\} \in x$.
Wir wollen nun den Übergang von den Mengen zu den Zahlen wagen. Dazu ändern wir nichts an der eigentlichen theoretischen Maschinerie, sondern vollziehen lediglich einen *notationellen Perspektivenwechsel*. Statt $\varnothing$ schreiben wir nun 0, und ersetzen auch das klobige $y \cup \{y\}$ durch das viel elegantere $y + 1$.
In unserer neuen Notation sagt das Unendlichkeitsaxiom also aus, dass es eine Menge x gibt, sodass $0 \in x$ und $y + 1 \in x$ für alle $y \in x$.
Wir werden die Zahlen außerdem bei ihren üblichen Namen nennen, also:

1	heißt	0+1	heißt	$\varnothing \cup \{\varnothing\}$
2	heißt	(0+1)+1	heißt	$(\varnothing \cup \{\varnothing\}) \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
3	heißt	((0+1)+1)+1	heißt	$((\varnothing \cup \{\varnothing\}) \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\}) \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Die Eleganz unserer (alten) neuen Schreibweise ist also ganz klar erkenntlich.

Jede induktive Menge enthält also per Definition 0, 1, 2, 3 usw., also die natürlichen Zahlen. Wir wollen nun *genau* alle natürlichen Zahlen in einer Menge zusammensammeln. Diese kleinste induktive Menge nennen wir ω:

$$\omega \ := \ \bigcap \{ \ x \mid x \ ist \ induktiv \ \}$$

Diese Menge existiert per (Inf) und dem Aussonderungsschema: Sei m induktiv, nun:

$$\omega \ = \ \{ \ y \in m \mid \forall x \ (x \ ist \ induktiv \rightarrow y \in x) \ \}$$

Das *Induktionsprinzip* besagt, dass die natürlichen Zahlen genau die 0 und all ihre Nachfolger sind:

Lemma 3.1
Sei $A \subseteq \omega$ so, dass $0 \in A$ und $y + 1 \in A$ für alle $y \in A$ gilt. Es gilt $A = \omega$.

Beweis. A ist induktiv, also muss $\omega \subseteq A$ gelten. Somit $A = \omega$. □

Wie der Name bereits vermuten lässt, ist dies das Prinzip hinter mathematischer Induktion. Sei nämlich ϕ eine Formel, sodass die Aussagen $\phi(0)$ und

$$\forall y \in \omega \ (\phi(y) \rightarrow \phi(y + 1))$$

gelten. Wie wir oben gesehen haben, gilt nun $\forall y \in \omega : \phi(y)$.

Bemerkung 3.2
Oben haben wir die Phrase „natürliche Zahlen“ *naiv* verwendet. Da wir nun eine zufriedenstellende Entsprechung im Kontext unseres Axiomensystems gefunden haben, legen wir nun unsere Terminologie fest:
Die Elemente von ω heißen *natürliche Zahlen*, und somit ist ω per Definitionem die Menge der natürlichen Zahlen.

3.2 Definitionen

Definition 3.3
Wir nennen eine Menge x genau dann eine *transitive Menge*, wenn alle ihre Elemente auch Teilmengen sind, also wenn $y \subset x$ für alle $y \in x$ gilt.

Bemerkung 3.4
Sei x transitiv. Ist $x + 1 = x \cup \{x\}$ auch transitiv?
Ja. Schließlich haben wir zu x nur ein weiteres Element hinzugefügt. Das stört die Transitivität auf den ursprünglichen Elementen von x nicht. Wir müssen also nur noch für das neue Element x die obige Eigenschaft nachweisen - und das ist trivial, denn $x \subset (x \cup \{x\})$ gilt immer.

Folgende Definition wurde von János Neumann isoliert. Darum nennt man Ordinalzahlen gelegentlich auch Neumann-Ordinalzahlen.

Definition 3.5
Eine Menge x nennen wir eine *Ordinalzahl*, gdw. x transitiv ist, und für alle $y, z \in x$ folgende $\in$-Trichotomie gilt:

$$\mathfrak{T}_{\in}(y, z) :\Leftrightarrow (y \in z \vee z \in y \vee z = y).$$

Für Ordinalzahlen werden traditionell griechische Kleinbuchstaben vom Anfang des Alphabets $(\alpha, \beta, \gamma, ...)$ verwendet. Die Klasse der Ordinalzahlen bekommt den Namen Ord:

$$\{ \ \alpha \mid \alpha \ \textit{ist Ordinalzahl} \ \} =: \mathrm{Ord}$$

Die so definierte Klasse ist, wie bereits erwähnt, tatsächlich eine *echte Klasse*, also keine Menge. Wir begründen diese Behauptung in Bemerkung 3.12.

Definition 3.6
Wir nennen $\alpha \in \mathrm{Ord}$ eine *Nachfolgerordinalzahl* gdw. eine Ordinalzahl β existiert, sodass $\alpha = \beta + 1$. Wir definieren analog zu oben die Klasse Nord aller solcher α. Wir nennen γ *Limesordinalzahl*, falls:

$$\gamma \in (\mathrm{Ord} \setminus \mathrm{Nord}) =: \mathrm{Lord}.$$

Wir bemerken, dass nach obiger Definition $0 \in \mathrm{Lord}$ gilt - dies ist in der Tat etwas merkwürdig, schließlich haben wir die leere Menge nicht durch einen Limesprozess irgendeiner Art erhalten.

Definition 3.7
Sei $X \subset \mathrm{Ord}$ eine Menge, und sei $0 \neq \alpha \in \mathrm{Lord}$.
Wir nennen α einen *Häufungspunkt* von X gdw. $\sup(X \cap \alpha) = \alpha$.
(Die topologisch anmutende Wortwahl ist übrigens nicht zufällig, dem/der interessierten LeserIn wird eine Recherche zum Begriff *„ordinal space“* empfohlen.)

Definition 3.8
Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$, und X eine Menge.
Eine *α-Folge* in X ist eine Funktion $f : \alpha \to X$. Mit $f(\xi) = x_\xi$ schreiben wir $\langle \ x_\xi \mid \xi < \alpha \ \rangle$ für eine solche Folge.
Diese Definition umfasst somit endliche, abzählbare, sowie alle anderen ordinalindizierten Folgen.

3.3 Eigenschaften und Beispiele

Wir kennen nun den Begriff „Ordinalzahl“ rein definitorisch. Jetzt wollen wir eine familiäre Beziehung zum Konzept hinter der Definition aufzubauen.
Zunächst wollen wir noch kurz zusammenfassen, was wir mit der Definition von Ordinalzahlen erreichen wollten:
Wir wollten aus Mengen Zahlen gewinnen, also aus der Elementrelation die <-Relation, und außerdem wollten wir, dass die Ordinalzahlen „geschachtelt“ sind - jede Ordinalzahl soll alle kleineren enthalten:

$$\alpha < \beta \text{ gdw. } \alpha \in \beta \text{ und } \alpha = \{ \beta \mid \beta < \alpha \}.$$

Lemma 3.9
Alle natürlichen Zahlen sind Ordinalzahlen.

Beweis. Wir wenden Induktion an:
$0 \in \textsc{Ord}$ gilt trivialerweise, denn die leere Menge hat keine Elemente.
Sei also $\alpha \in \textsc{Ord}$. Wir müssen zeigen, dass $\alpha + 1 \in \textsc{Ord}$ gilt.
Zuerst erinnern wir uns an 3.4, wo wir gesehen haben, dass $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ transitiv ist. Wir müssen also nur noch nachweisen, dass:

$$\forall y, z \in \alpha + 1 : \mathfrak{T}_{\in}(y, z).$$

Dies ist einfach, denn es gilt schon $\forall y, z \in \alpha : \mathfrak{T}_{\in}(y, z)$, und uns fehlen oBdA nur die Fälle $y, z \in \{\alpha\}$, also $y = z = \alpha$, und $y \in \alpha \wedge z \in \{\alpha\}$, also $y \in \alpha = z$. □

Lemma 3.10
ω ist eine Ordinalzahl.

Beweis. Zuerst zeigen wir

$$\forall y \in \omega : y \subset \omega.$$

Für $y = 0$ ist das trivial. Sei nun $y \in \omega$ mit $y \subset \omega$ fix. Dann ist $\{y\} \subset \omega$ und daher $y + 1 = y \cup \{y\} \subset \omega$.
Nun zeigen wir

$$\forall y, z \in \omega : \mathfrak{T}_{\in}(y, z).$$

Dafür zeigen wir folgende drei Aussagen:

(i). $\mathfrak{T}_{\in}(0, 0)$

(ii). $\forall z \in \omega : (\mathfrak{T}_{\in}(0, z) \implies \mathfrak{T}_{\in}(0, z + 1))$, und

(iii). $\forall y \in \omega : ((\forall z' \in \omega : \mathfrak{T}_{\in}(y, z')) \implies (\forall z \in \omega : \mathfrak{T}_{\in}(y + 1, z)))$

Die ersten zwei gemeinsam ergeben mittels Induktion $\forall z \in \omega : \mathfrak{T}_\in(0,z)$, und diese Aussage lässt sich wieder mittels Induktion mit der dritten kombinieren, um $\forall y, z \in \omega : \mathfrak{T}_\in(y,z)$ zu erhalten.

(i). $0 = 0$. ✓

(ii). $\mathfrak{T}_\in(0,z) \implies (0 \in z \vee 0 = z) \implies (0 \in z+1) \implies \mathfrak{T}_\in(0,z+1)$. ✓

(iii). Sei $y \in \omega$ fix, und angenommen $\forall z' \in \omega : \mathfrak{T}_\in(y,z')$ gilt. Wir zeigen nun $\forall z \in \omega : \mathfrak{T}_\in(y+1,z)$ mittels Induktion.
Wir wissen bereits, dass $\forall z \in \omega : \mathfrak{T}_\in(0,z)$, also wissen wir insbesondere $\mathfrak{T}_\in(0,y+1)$. Symmetrie gibt uns daraus $\mathfrak{T}_\in(y+1,0)$, also wollen wir nun $\mathfrak{T}_\in(y+1,z+1)$ aus $\mathfrak{T}_\in(y+1,z)$ schließen:

$$\mathfrak{T}_\in(y+1,z) \Longleftrightarrow ((y+1 \in z) \vee (y+1 = z) \vee (z \in y+1))$$

Nun

$$(y+1 \in z) \Longrightarrow (y+1 \in z \cup \{z\}) \Longleftrightarrow (y+1 \in z+1),$$

und ebenso

$$(y+1 = z) \Longrightarrow (y+1 \in z+1).$$

Sei also $z \in y+1 = y \cup \{y\}$. Falls $z \in \{y\}$, so ist $y+1 = z+1$. Also nehmen wir an, dass $z \in y$. Wir wissen aufgrund unserer Annahme, dass:

$$((y \in z+1) \vee (y = z+1) \vee (z+1 \in y)).$$

Aber $z \in y \in z+1$ widerspricht (Fund) (man betrachte $\{z,y\}$).
Somit also

$$(z \in y) \Longrightarrow ((y = z+1) \vee (z+1 \in y)) \Longrightarrow (z+1 \in y+1),$$

daher insgesamt

$$(\mathfrak{T}_\in(y+1,z) \Longrightarrow \mathfrak{T}_\in(y+1,z+1)) \wedge \mathfrak{T}_\in(y+1,0),$$

und per Induktion ist (iii) gezeigt. ✓

□

Lemma 3.11
Die folgenden Aussagen sind wahr.

(i). $0 \in \text{Ord}$, und aus $\alpha \in \text{Ord}$ folgt $\alpha+1 \in \text{Ord}$.

(ii). Gilt $\alpha \in \text{Ord}$ und $x \in \alpha$, so folgt $x \in \text{Ord}$.

(iii). Aus $\alpha, \beta \in \textsc{Ord}$ und $\alpha \subset \beta$ folgt $\alpha \in \beta$.

(iv). Für $\alpha, \beta \in \textsc{Ord}$ gilt: $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$.

Beweis. (i). Diese Aussage haben wir oben bereits gezeigt. ✓

(ii). Sei $x \in \alpha \in \textsc{Ord}$. Da α transitiv ist, wissen wir, dass $x \subset \alpha$ gilt.
Also sind die Elemente von x auch Elemente von α und somit $\in$-vergleichbar.
Wir prüfen die Transitivität von x: Sei $z \in y \in x$. Wir wollen, dass $z \in x$.
Aus $x \subset \alpha$ folgt $y \in \alpha$, und aus $z \in y \in \alpha$ folgt $z \in \alpha$, da α transitiv ist.
Nun gilt in α die $\in$-Trichotomie, also muss $z \in x$, da die anderen Optionen widersprüchlich sind. ✓

(iii). Seien $\alpha, \beta \in \textsc{Ord}$ und $\alpha \subset \beta$. Weiters sei $\gamma \in \beta \setminus \alpha$ so, dass $\gamma \cap (\beta \setminus \alpha) = \varnothing$. (Dass es so ein γ geben muss, ist per (Fund) gegeben.) Wir zeigen nun zuerst $\gamma \subseteq \alpha$, und dann $\alpha \subseteq \gamma$:
Für ein beliebiges $\xi \in \gamma$ liefert die Transitivität von β auch $\xi \in \beta$. Nun muss aber $\xi \in \alpha$ sein, sonst wäre $\xi \in \gamma \cap (\beta \setminus \alpha) = \varnothing$. Damit haben wir $\gamma \subseteq \alpha$.
Betrachten wir $\xi \in \alpha \subset \beta$, so gilt $\mathfrak{T}_\in(\xi, \gamma)$, da β transitiv ist. Die zwei Fälle $\xi = \gamma$ und $\gamma \in \xi$ in $\mathfrak{T}_\in(\xi, \gamma)$ implizieren beide $\gamma \in \alpha$, da $\xi \in \alpha$ und α transitiv ist. Wir hatten aber $\gamma \in \beta \setminus \alpha$ gewählt. ↯
Insgesamt folgt aus $\xi \in \alpha$ also bereits $\xi \in \gamma$, in anderen Worten haben wir also $\alpha \subseteq \gamma$ und damit $\alpha = \gamma \in \beta$ gezeigt. ✓.

(iv). Angenommen nicht: Sei $\alpha \in \textsc{Ord}$ so, dass es ein $\beta \in \textsc{Ord}$ gibt, für das $\neg((\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha))$. Sei nun α_0 das $\in$-kleinste Element von $\alpha + 1$ mit $\neg((\alpha_0 \subseteq \beta_0) \vee (\beta_0 \subseteq \alpha_0))$ für ein $\beta_0 \in \textsc{Ord}$.
Es ist klar, dass $\alpha_0 \cup \beta_0$ transitiv ist, und wenn $\delta, \delta' \in \alpha_0 \cup \beta_0$, so gilt entweder $\delta \subseteq \delta'$ oder $\delta' \subseteq \delta$ aufgrund ???. Wegen (ii) sind $\delta, \delta' \in \textsc{Ord}$ und wegen (iii) folgt für sie dann das Element-Sein aus dem Echte-Teilmenge-Sein. Somit gilt also $\mathfrak{T}_\in(\delta, \delta')$.
Also ist $\alpha_0 \cup \beta_0 =: \gamma_0$ eine Ordinalzahl. Falls nicht $\gamma_0 = \alpha_0$ oder $\gamma_0 = \beta_0$ gilt, so also $\gamma_0 \supset \alpha_0$ und $\gamma_0 \supset \beta_0$, woraus nach (iii) $\alpha_0, \beta_0 \in \gamma_0$ folgt. Aber das heißt ja, dass entweder $\alpha_0 \in \alpha_0$ oder $\beta_0 \in \beta_0$ oder $\alpha_0 \in \beta_0 \in \alpha_0$ gelten müsste.
Daher muss also entweder $\alpha_0 = \alpha_0 \cup \beta_0$ oder $\beta_0 = \alpha_0 \cup \beta_0$, d.h entweder $\alpha_0 \supseteq \beta_0$ oder $\beta_0 \supseteq \alpha_0$ respektive. Das widerspricht unserer Wahl von α_0, β_0. ↯

□

Bemerkung 3.12
Das obige Lemma liefert uns auch, dass $\textsc{Ord}$ *keine Menge sein kann.* Schließlich gilt per (iv) die $\in$-Trichotomie auf $\textsc{Ord}$, und dass $\textsc{Ord}$ transitiv ist, folgt wegen (ii). Sei dazu $\alpha \in \textsc{Ord}$:

$$x \in \alpha \implies x \in \textsc{Ord} \implies \{ \, x \mid x \in \alpha \, \} = \alpha \subseteq \textsc{Ord}.$$

Aber $\alpha \in \textsc{Ord}$, und $\alpha \notin \alpha$ per (Fund), daher $\alpha \subset \textsc{Ord}$.
Wäre $\textsc{Ord}$ eine Menge, so wäre sie also per definitionem auch eine Ordinalzahl, d.h es gälte $\textsc{Ord} \in \textsc{Ord}$. $\lightning$

Lemma 3.13
Sei $X \subset \textsc{Ord}$ eine Menge von Ordinalzahlen.

(i). Gilt $X \neq \varnothing$, so ist $\bigcap X$ das $\in$-minimale Element von X.

(ii). $\bigcup X$ ist eine Ordinalzahl, und $\bigcup X = \sup X$, die kleinste obere $\in$-Schranke.

Beweis. (i). $\bigcap X$ ist mit Sicherheit eine Ordinalzahl, denn

$$a \in \bigcap X \implies \forall \alpha \in X : a \in \alpha \overset{X \subseteq \textsc{Ord}}{\implies} a \in \textsc{Ord},$$

Nun gilt 3.11 (iv), daher:

$$\forall \alpha \in \bigcap X : a \subset \alpha \implies a \subset \bigcap X.$$

$$a, b \in \bigcap X \implies a, b \in \alpha \in X \subset \textsc{Ord} \implies \mathfrak{T}_{\in}(a, b)$$

Angenommen, $\bigcap X$ ist nicht $\in$-minimal in X. Für jedes $\alpha \in X$ muss nun $\bigcap X$ eine *echte* Teilmenge von α sein. Insbesondere also $\bigcap X \in \bigcap X$ $\lightning$.

(ii). Aus 3.11 wissen wir, dass echte Teilmengen von $\alpha \in \textsc{Ord}$ auch Elemente von α sind, und dass Elemente von OZen wieder OZen sind. Da nun $X \notin X$ für alle Mengen gilt, ist $\bigcup X \subset X$, und daher gilt $\bigcup X \in \textsc{Ord}$.
Dass die Vereinigung von Mengen deren kleinste Obermenge ist, ist auch klar.

$\square$

3.4 Konfinalität

In diesem Abschnitt besprechen wir den Begriff der Konfinalität. Anzumerken ist, dass heutzutage die Schreibweise „Kofinalität“ geläufiger ist (in Anlehnung an das englische *cofinality*), jedoch habe ich mich zu Ehren Hausdorffs für die von ihm ursprünglich verwendete Schreibweise entschieden.

Man kann sich das Wort *Konfinalität* wie folgt erklären. Betrachten wir z.B. das Bild der Identität auf ω als Folge:

$$\langle\ 0, 1, 2, ..., 1000, 1001, ...\ \rangle$$

Wohin führt diese Folge? Sie führt nach ω, ihr Ziel (lat. *finis*) ist ω.
Eine in $\alpha \in \textsc{Ord}$ konfinale Funktion ist grob gesagt eine Funktion, die dasselbe Ziel hat, wie die Identität auf α, sie gehen gemeinsam (lat. *con-*) nach α.

Definition 3.14
Sei $\alpha \in \textsc{Ord}$ eine Ordinalzahl, und A eine Menge. Eine Funktion $f : A \to \alpha$ heißt *konfinal in* α gdw.:

$$\forall \beta < \alpha : \exists a \in A : f(a) \geq \beta.$$

Die *Konfinalität* von α, geschrieben $\mathrm{cf}(\alpha)$, ist das kleinste $\gamma \leq \alpha$ für das eine konfinale Funktion $f : \gamma \to \alpha$ existiert.

Wir bemerken, dass $\mathrm{cf}(\alpha)$ für alle $\alpha \in \textsc{Ord}$ definiert ist, da zumindest die Identität auf jedem α immer konfinal ist.
Weiters gilt $\mathrm{cf}(\alpha + 1) = 1$ für alle α, da die konstante Funktion $f \equiv \alpha + 1$ immer konfinal in $\alpha + 1$ ist. Die Konfinalität ist also nur für Limesordinalzahlen überhaupt interessant.

Definition 3.15
Sei $\alpha \in \textsc{Ord}$ eine Ordinalzahl. Wir nennen α *regulär*, gdw. $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$, und *singulär*, gdw. $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$.

Beispiel 3.16
Es gilt Folgendes:
$\mathrm{cf}(\omega) = \omega = \mathrm{cf}(\omega + \omega) = \mathrm{cf}(\omega \cdot 3) = \cdots = \mathrm{cf}(\omega \cdot \omega) = \cdots = \mathrm{cf}(\omega^\omega)$.
Also ist von den hier genannten Ordinalzahlen nur ω regulär, alle anderen sind singulär.

Bemerkung 3.17
Gilt $\beta = \mathrm{cf}(\alpha)$, so existiert also ein in α konfinales $f : \beta \to \alpha$.
Tatsächlich existiert dann bereits auch ein *monotones* (in α konfinales) f^*. Wir definieren nämlich für $\xi < \beta$:

$$f^*(\xi) = \sup\{\ f(\eta) \mid \eta < \xi\ \}.$$

Stellen wir sicher, dass f^* tatsächlich wohldefiniert ist: Dazu benötigen wir lediglich, dass $f^*(\xi) < \alpha$ für alle $\xi < \beta$ gilt. Das ist aber ganz sicher der Fall, sonst würde $f \restriction \xi$ bezeugen dass:

$$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \xi < \beta = \mathrm{cf}(\alpha).$$

Also ist f^* wohldefiniert, und klarerweise auch konfinal in α. (Denn $f(\xi) \leq f^*(\xi)$.)
Nun gilt $\xi \leq \xi' \implies f^*(\xi) \leq f^*(\xi')$, d.h f^* ist monoton.
Betrachten wir nun die monotone Aufzählfunktion $\pi : \gamma \to \mathrm{ran}(f^*)$. Es gilt $\gamma \leq \mathrm{cf}(\alpha)$ und daher $\gamma = \mathrm{cf}(\alpha)$. Per Definition ist π streng monoton, und sie ist auch *stetig* im folgenden Sinne:

$$\forall \gamma \in (\textsc{Lord} \cap \mathrm{dom}(\pi)) : \pi(\gamma) = \sup\{\ \pi(\gamma') \mid \gamma' < \gamma\ \}.$$

4 Kardinalzahlen

4.1 Definitionen

Der bekannte Wohlordnungssatz von Zermelo sagt uns, dass es für jede Menge x eine Ordinalzahl $\alpha \in \textsc{Ord}$ gibt, sodass $x \sim \alpha$. Dieser Satz ist logisch äquivalent zu (AC). Genaueres dazu lässt sich in [2], auf Seite 48 nachlesen.

Definition 4.1
Sei x eine Menge. Die *Kardinalität* von x, kurz $\mathrm{Card}(x)$, ist die kleinste Ordinalzahl $\alpha \in \textsc{Ord}$ sodass $x \sim \alpha$, d.h. eine Bijektion $f : x \to \alpha$ existiert.

Bemerkung 4.2
Jede Menge hat eine Kardinalität, d.h. für jede Menge x existiert $\mathrm{Card}(x) \in \textsc{Ord}$.
Sei nämlich $x \sim \alpha \in \textsc{Ord}$. Dann ist entweder $\alpha = \mathrm{Card}(x)$ oder $\mathrm{Card}(\alpha)$ ist das kleinste $\beta < \alpha$ mit $\beta \sim \alpha$.
Weiters gilt klarerweise $x \sim y \iff \mathrm{Card}(x) = \mathrm{Card}(y)$.

Ein klassisches Resultat Cantors lautet:

Satz 4.3 (Cantor)
Für jede Menge x gilt: $\mathrm{Card}(x) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(x))$

Beweis. Sei $f : X \to \mathcal{P}(X)$ beliebig. Betrachten wir die Menge:

$$Y = \{\ x \in X \mid x \notin f(x)\ \}.$$

Sie ist auf keinen Fall im Bild von f - gäbe es nämlich $z \in X$ mit $f(z) = Y$, so wäre $z \in Y$ gdw. $z \notin Y$. $\lightning$
Somit kann f keine Surjektion sein, und $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(X)) \neq \mathrm{Card}(X)$.
Betrachten wir nun folgende Injektion von X nach $\mathcal{P}(X)$:

$$g(x) = \{x\},$$

so sehen wir, dass $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$ gilt, und daraus folgt das gewünschte Resultat. $\square$

Beispiel 4.4
Es gilt:

(i). $\mathrm{Card}(n) = n$ für alle $n \in \omega$.

(ii). $\mathrm{Card}(\omega) = \omega$
$= \mathrm{Card}(\omega + 1) = \mathrm{Card}(\omega + 2) = \dots$
$= \mathrm{Card}(\omega + \omega) = \mathrm{Card}(\omega + \omega + \omega) = \dots$
$= \mathrm{Card}(\omega \cdot \omega) = \mathrm{Card}(\omega \cdot \omega \cdot \omega) = \dots$
$= \mathrm{Card}(\omega^\omega) = \dots$

Definition 4.5
Eine Ordinalzahl $\alpha \in \textsc{Ord}$ nennen wir *Kardinalzahl*, gdw. $\alpha = \mathrm{Card}(\alpha)$ gilt.
Die Klasse aller Kardinalzahlen ist:

$$\{\ \alpha \in \textsc{Ord} \mid\ \mathrm{Card}(\alpha) = \alpha\ \} =: \textsc{Card}$$

Bemerkung 4.6
Es ist klar, dass $\alpha \in \textsc{Card}$ genau dann gilt, wenn es eine Menge x gibt, sodass $\alpha = \mathrm{Card}(x)$. Traditionell werden für Kardinalzahlen griechische Kleinbuchstaben ab κ verwendet $(\kappa, \lambda, \mu, \dots)$.
Nach dem Satz von Cantor, 4.3, gibt es für eine beliebige Menge x niemals eine Surjektion $f : x \to \mathcal{P}(x)$. Also, wenn κ eine Kardinalzahl ist, dann gibt es eine Kardinalzahl $\lambda > \kappa$, und somit auch eine *kleinste* Kardinalzahl $\lambda > \kappa$, welche auch als das kleinste $\lambda \in \textsc{Card}$ mit $\kappa < \lambda \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\kappa))$ identifiziert werden kann.
Das *Schubfachprinzip* besagt, dass für $\kappa, \lambda \in \textsc{Card}$ mit $\lambda > \kappa$, eine Funktion $f : \lambda \to \kappa$ niemals injektiv sein kann.

Definition 4.7
Sei $\kappa \in \textsc{Card}$ eine Kardinalzahl.
Die kleinste Kardinalzahl λ, für die $\lambda > \kappa$ gilt, nennen wir *kardinaler Nachfolger* (oder einfach Nachfolger) von κ, abgekürzt mit κ^+. Eine Kardinalzahl $\kappa \in \textsc{Card}$

heißt *Nachfolgerkardinalzahl*, gdw. es ein $\mu \in \textsc{Card}$ gibt mit $\mu^+ = \kappa$.
Wie bei den Ordinalzahlen definieren wir die Klassen $\textsc{Nard}, \textsc{Lard}$:

$$\textsc{Nard} := \{ \ \kappa \in \textsc{Card} \mid \exists \mu \in \textsc{Card} : \mu^+ = \kappa \ \} = \textsc{Card} \setminus \textsc{Lard}.$$

Es gibt also wie bei den Ordinalzahlen wieder das Konzept eines Limes.
Eine Kardinalzahl ist eine *Limeskardinalzahl* (oder *schwacher Limes*) gdw. sie keine Nachfolgerkardinalzahl ist.
Hinzu kommt nun jedoch die folgende Definition: κ heißt *starker Limes*, gdw.

$$\forall \lambda < \kappa : 2^\lambda < \kappa.$$

Alle natürlichen Zahlen bis auf die 0 sind Nachfolgerkardinalzahlen, ω ist eine Limeskardinalzahl, und es gibt $\omega^+, \omega^{++}, \dots \in \textsc{Nard}$.
Der Nachfolger κ^+ einer gegebenen Kardinalzahl kann auch folgendermaßen charakterisiert werden:

Lemma 4.8
Sei $\kappa \in \textsc{Card}$. Es gilt:

$$\kappa^+ = \{ \ \alpha \in \textsc{Ord} \mid \alpha \leq \kappa \ \}$$

Definition 4.9
Seien $\kappa, \lambda \in \textsc{Card}$ Kardinalzahlen. Wir definieren:

(i). $\kappa + \lambda = \mathrm{Card}((\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\}))$,

(ii). $\kappa \cdot \lambda = \mathrm{Card}(\kappa \times \lambda)$,

(iii). $\kappa^\lambda = \mathrm{Card}({}^\lambda\kappa)$, wobei:

(iv). ${}^\lambda\kappa = \{ \ f \mid f \text{ ist Funktion mit } \mathrm{dom}(f) = \lambda \text{ und } \mathrm{ran}(f) \subset \kappa \ \}$.

4.2 Eigenschaften und Beispiele

Lemma 4.10
Sei $X \subset \textsc{Card}$ eine Menge von Kardinalzahlen.
Dann ist $\bigcup X$ eine Kardinalzahl.

Beweis. Wir haben in 3.13 (ii) schon gesehen, dass $\bigcup X$ eine Ordinalzahl ist. Wir müssen also zeigen, dass es keine Ordinalzahl $\alpha < \bigcup X$ mit $\alpha \sim \bigcup X$ gibt. Nun, wenn $\alpha < \bigcup X$ gilt, d.h. wenn $\alpha \in \bigcup X$, dann gibt es ein $\kappa \in X$ mit $\alpha \in \kappa$ - in anderen Worten muss dann $\alpha < \kappa$ sein.
Da nun κ eine Kardinalzahl ist, und α eine kleinere Ordinalzahl, gibt es keine Surjektion von α nach κ. Letztlich ist also wegen $\kappa \in X$ auch $\kappa \subseteq \bigcup X$ und es gibt keine Surjektion von α nach $\bigcup X$. □

Lemma 4.11
Für alle $\kappa \in \textsc{Card}$ gilt: $2^\kappa = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\kappa))$

Beweis. Um eine Teilmenge von κ eindeutig zu bestimmen, müssen wir lediglich für jedes Element von κ wissen, ob es in der jeweiligen Teilmenge enthalten ist oder nicht. Wir definieren für jedes solches $p \in \mathcal{P}(\kappa)$ eine Funktion $f_p : \kappa \to \{0, 1\}$ mit $f_p(x) = 1$ gdw. $x \in p$.
Diese Zuordnung ist eine Bijektion zwischen ${}^\kappa 2$ und $\mathcal{P}(\kappa)$. Nun liefern 4.9 und 4.2 die gewünschte Aussage. □

Korollar 4.11.1
Es gilt: $\kappa^+ \leq 2^\kappa$, denn es ist ausgeschlossen (siehe 4.6), dass $\kappa = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\kappa))$.
Cantors *Kontinuumshypothese*, abgekürzt mit `(CH)`, können wir also nun wie folgt formulieren:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Die Behauptung

$$\forall \alpha \in \textsc{Ord} : 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

heißt *Verallgemeinerte Kontinuumshypothese*, und wird mit `(GCH)` abgekürzt. Man kann zeigen, dass sowohl `(GCH)` als auch $\neg$`(CH)` konsistent mit `(ZFC)` sind.

4.3 Konfinalität und Kardinalzahlvergleiche

Erinnern wir uns an die Begriffe *Konfinalität, regulär, singulär* aus dem letzten Kapitel - wir werden sie nun verwenden:

Lemma 4.12
Sei $\alpha \in \textsc{Ord}$ beliebig. $\mathrm{cf}(\alpha)$ ist regulär.

Beweis. Sei $\beta = \mathrm{cf}(\alpha)$. Wir müssen uns davon überzeugen, dass $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$. Seien dazu $f : \beta \to \alpha$ und $g : \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ konfinal in α und β respektive.
Wir haben (in 3.17) gesehen, dass wir annehmen können, dass f monoton ist, sei also f oBdA monoton. Nun wollen wir $(f \circ g) : \mathrm{cf}(\beta) \to \alpha$ betrachten:
Konfinalität von f: Für $\xi < \alpha$ gibt es stets ein $\eta < \beta$ mit $f(\eta) \geq \xi$.

Konfinalität von g: Für dieses $\eta < \beta$ gibt es stets $\zeta < \mathrm{cf}(\beta)$ mit $g(\zeta) \geq \eta$.
Insgesamt heißt das - da f monoton ist:

$$(f \circ g)(\zeta) = f(g(\zeta)) \geq f(\eta) \geq \xi.$$

D.h. $(f \circ g)$ ist konfinal, also ist $\beta = \mathrm{cf}(\beta)$. $\square$

Lemma 4.13
Sei $\alpha \in$ Ord regulär. Dann gilt $\alpha \in$ Card.

Beweis. Jede Bijektion (oder einfach Surjektion) $f : \mathrm{Card}(\alpha) \to \alpha$ ist klarerweise konfinal, denn unter *allen* Elementen von α - dem Bild von f - können wir uns immer eines aussuchen, sodass wir α „beliebig nahe“ kommen. $\square$

Lemma 4.14
Sei $\kappa \in$ Nard eine unendliche Nachfolgerkardinalzahl. Dann ist κ regulär.

Beweis. Sei $\kappa = \mu^+$. Angenommen, $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, d.h. $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mu$ wegen 4.13.
Sei nun $f : \mu \to \kappa$ konfinal, und $\langle\, g_\xi \mid \xi < \mu \,\rangle$ so, dass $g_\xi : \mu \to f(\xi)$ für jedes $\xi < \mu$ surjektiv ist. (Wir verwenden hier (AC), das Auswahlaxiom.)
Sei nun $h : \mu \to \mu \times \mu$ bijektiv (vgl. [6] 4.6). Wir können dann eine Surjektion $F : \mu \to \kappa$ wie folgt definieren: Sei $\eta < \mu$, und sei $(\alpha, \beta) = h(\eta)$. Nun setzen wir $F(\eta) = g_\alpha(\beta)$. Aber da $\mu < \kappa$ und $\kappa \in$ Card, kann es keine solche Surjektion geben. $\square$

Wir erhalten also, dass $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ...$ alle regulär sein müssen, aber $\aleph_\omega$ singulär ist, da $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega < \aleph_\omega$. Die nächste Kardinalzahl, $\aleph_{\omega+1}$, ist wieder regulär, etc. Hausdorff stellte sich deshalb die Frage, ob *jede* Limeskardinalzahl singulär ist.

Lemma 4.15
Eine unendliche Kardinalzahl $\kappa \in$ Card ist genau dann singulär, wenn sie die Vereinigung weniger als κ-vieler Mengen mit jeweils weniger als κ-vielen Elementen ist.
D.h. $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ gdw. es eine Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ und eine Familie $\{\, S_\xi \mid \xi < \lambda \,\}$ von Teilmengen von κ gibt, sodass $\mathrm{Card}(S_\xi) < \kappa$ für alle $\xi < \lambda$ und $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi$.
Das kleinste λ, für das κ die obige Bedingung erfüllt, ist $\mathrm{cf}(\kappa)$.

Beweis. Zunächst die Richtung ($\Longrightarrow$):
Sei $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Nach 3.17 existiert eine monoton wachsende Folge $\langle\, \alpha_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa) \,\rangle$ mit $\lim_\xi \alpha_\xi = \kappa$. Sei nun $\lambda := \mathrm{cf}(\kappa)$, und $S_\xi := \alpha_\xi$ für alle $\xi < \lambda$.
Für monoton wachsende, konvergente Folgen gilt „$\lim = \sup$“, daher also

$$\kappa = \lim_{\xi \to \lambda} \alpha_\xi = \sup_{\xi<\lambda} S_\xi = \bigcup_{\xi<\lambda} S_\xi.$$

Nun ($\Longleftarrow$):
Es gelte die Bedingung an κ. Sei $\lambda_0 \in \textsc{Card}$ das kleinste λ, für das κ die Bedingung erfüllt. Für $\xi < \lambda_0$ bezeichne β_ξ den Ordnungstyp von $\bigcup_{\nu<\xi} S_\nu$.
Die Folge $\langle\ \beta_\xi \mid \xi < \lambda_0\ \rangle$ ist monoton wachsend, und die Minimalität von λ_0 liefert $\beta_\xi < \kappa$ für alle $\xi < \lambda_0$. Nun zeigen wir, dass $\lim_\xi \beta_\xi = \kappa$, womit $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda_0$ gezeigt ist:
Sei $\beta = \lim_{\xi\to\lambda_0} \beta_\xi$. Es gibt eine injektive Abbildung $f : \kappa \to \lambda \times \beta$, nämlich:

$$f(\alpha) = (\xi_\alpha, \gamma_\alpha),$$

wobei ξ_α das kleinste ξ mit $\alpha \in S_\xi$ ist, und γ_α der Ordnungstyp von $S_\xi \cap \alpha$. Weil nun $\lambda_0 < \kappa$ und $\mathrm{Card}(\lambda \times \beta) = \lambda \cdot \mathrm{Card}(\beta)$, folgt also $\beta = \kappa$. $\square$

Bemerkung 4.16
Man benötigt (AC) um zu zeigen, dass ω_1 nicht die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist. Für ω_2 lässt sich diese Aussage schon in (ZF) beweisen.
Wir haben vorhin gesehen, dass $\kappa < 2^\kappa$. Es folgt klarerweise dass $\kappa < \lambda^\kappa$ für alle $\lambda > 1$, und insbesondere $\kappa < \kappa^\kappa$ für $\kappa \neq 1$.
Der folgende Satz gibt uns noch eine bessere Ungleichung. Diese und andere wichtige Kardinalzahlvergleiche ergeben sich aus dem Satz von König, der in [6], auf Seite 38 zu finden ist.

Satz 4.17
Sei $\kappa \in \textsc{Card}$ unendlich. Es gilt $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Beweis. Sei F eine Sammlung von κ-vielen Funktionen von $\mathrm{cf}(\kappa)$ nach κ, also $F = \{\ f_\alpha : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa \mid \alpha < \kappa\ \}$.
Wir müssen nur noch ein weiteres $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ finden, das nicht schon in F ist.
Sei dazu $\langle\ \alpha_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\ \rangle$ eine Folge mit Grenzwert κ. Für $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$, sei:

$$f(\xi) = \text{kleinstes } \gamma < \kappa \text{ mit } \gamma \neq f_\alpha(\xi) \text{ für alle } \alpha < \alpha_\xi.$$

So ein γ existiert immer, da $\mathrm{Card}(\{\ f_\alpha(\xi) \mid \alpha < \alpha_\xi\ \}) \leq \mathrm{Card}(\alpha_\xi) < \kappa$. Nun haben wir also ein $f \neq f_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. $\square$

Bemerkung 4.18
Somit folgt aus $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$ also $\kappa^\lambda > \kappa$.

Wir dringen langsam aber sicher zu den *unerreichbaren* Kardinalzahlen, den kleinsten der Großen Kardinalzahlen, vor:
Eine überabzählbare Kardinalzahl heißt *schwach unerreichbar*, wenn sie eine reguläre Limeskardinalzahl ist. Wir heben uns eine genauere Besprechung unerreichbarer Kardinalzahlen für später auf.

Wir haben in der Einleitung bereits versucht, ein Gefühl für die Größe unerreichbarer Kardinalzahlen zu bekommen. Gehen wir genauer darauf ein: Falls $\aleph_\alpha > \aleph_0$ ein regulärer Limes ist, so gilt $\aleph_\alpha = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$, und somit $\aleph_\alpha = \alpha$.
Weil die Folge der Alephs - wie bereits erwähnt - eine Normalfolge ist, hat sie beliebig große Fixpunkte. Eine stellenswerte Frage ist dann, ob manche dieser Fixpunkte reguläre Kardinalzahlen sind. Zum Beispiel hat der kleinste Fixpunkt die Konfinalität ω:

$$\kappa = \lim\langle \omega, \omega_\omega, \omega_{\omega_\omega}, ...\rangle = \lim_{n\to\omega} \kappa_n,$$

wobei $\kappa_0 = \omega; \kappa_{n+1} = \omega_{\kappa_n}$

Beispiel 4.19
Beispiele für singuläre Kardinalzahlen sind etwa $\aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}$.
Allgemeiner sind das alle $\aleph_\lambda$ mit $\lambda \in \textsc{Lord}$ und $\lambda < \aleph_\lambda$. Allerdings impliziert $\lambda = \aleph_\lambda$ *nicht*, dass λ regulär ist.

Satz 4.20 (Hausdorff)
Für alle unendlichen $\kappa, \lambda \in \textsc{Card}$ gilt: $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- **Fall 1:** $\kappa^+ \leq \lambda$.
  Es gilt $(\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$. ✓

- **Fall 2:** $\kappa^+ > \lambda$.
  Wegen 4.14 wissen wir, dass κ^+ regulär ist, also dass jedes $f : \lambda \to \kappa^+$ beschränkt ist. D.h. es gibt ein $\xi < \kappa^+$ mit $\mathrm{ran}(f) \subseteq \xi$. Daher also $(\kappa^+)^\lambda = \mathrm{Card}({}^\lambda(\kappa^+)) = \mathrm{Card}(\bigcup^\lambda_{\xi<\kappa^+} \xi) = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$. ✓

□

5 Maßtheorie

Die Maßtheorie ist eine Art „Naht“ im Stoff der Mathematik. Zieht man nämlich zu sehr an einem Stoff, so besteht an der Naht oft eine größere Gefahr, dass sich ein Loch auftut. Tatsächlich haben Mathematiker am Stoff gezogen, und es hat sich auch ein kleines Loch aufgetan. Wenn man nun ein kleines Loch in seiner Kleidung hat, ist es sehr verlockend, es zu vergrößern, und mit den losen Enden am Rand zu spielen.
So könnte man die Betrachtungen von Banach, Ulam, Tarski, etc. beschreiben, wenn es ihnen auch nicht gerecht werden würde. Die Frage nach dem Maß hat jedenfalls zu sehr bedeutsamen und unintuitiven Resultaten in der Mengenlehre

geführt - sie hat mehr oder weniger die Theorie der Großen Kardinalzahlen geboren. Dieser Teil der Arbeit basiert auf [3].
Bevor wir über das Maßproblem sprechen, wollen wir noch eine Definition nachholen:

Definition 5.1
Zwei Mengen a, b heißen *disjunkt*, gdw.:

$$a \cap b = \varnothing.$$

Sei I eine Indexmenge. Eine Familie von Mengen $A = \{ a_i \mid i \in I \}$ heißt *paarweise disjunkt*, gdw.:

$$\mathfrak{D}_p(A) :\Leftrightarrow \forall i, j \in I : ((i \neq j) \implies (a_i \cap b_j = \varnothing))$$

5.1 Das Maßproblem

Die moderne Maßtheorie wurde mit LEBESGUEs Arbeit *„Intégrale, longueur, aire.“* geboren. In der genannten Arbeit formulierte er das sogenannte *Maßproblem*. In einer Dimension lautet die Frage wie folgt:

Frage 5.2
Sei $\mathcal{P}(\mathbb{R})_b$ die Menge der beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$.
Gibt es eine Funktion $m : \mathcal{P}(\mathbb{R})_b \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden drei Eigenschaften?

(i). m ist nicht die Nullfunktion,

(ii). m ist translationsinvariant, d.h.:

$$\exists r \in \mathbb{R} : Y = \{ x + r \mid x \in X \} \implies m(X) = m(Y),$$

(iii). m ist *abzählbar additiv* (σ-additiv), d.h. für paarweise disjunkte, abzählbare Familien von Mengen $F = \{ X_n \mid n \in \omega \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})_b$ gilt:

$$m(\bigcup_n X_n) = \sum_n m(X_n).$$

LEBESGUE entwickelte seinen Maßbegriff als Ansatz zu einer Lösung des Problems - dieser ist heutzutage *integral* für die mathematische Analysis.
Teil des Problems war es zu entscheiden, was denn überhaupt alles Mengen von reellen Zahlen sein könnten. GIUSEPPE VITALI konstruierte unter Verwendung der Existenz einer Wohlordnung auf $\mathbb{R}$ - also mittels (AC) - eine nicht Lebesgue-messbare Menge reeller Zahlen, und zeigte damit, dass die Antwort auf das Maßproblem unter dem Auswahlaxiom ein ganz klares „Nein“ ist.

Dies war die erste explizite Verwendung von (AC) zur Konstruktion einer spezifischen Menge reeller Zahlen nach ZERMELOs Einführung des Axioms.
Für LEBESGUE warf die Konstruktion von VITALI nicht so sehr Zweifel an der Lösbarkeit des Maßproblems, wie Zweifel an der Sinnhaftigkeit von (AC) auf.
BANACH schlug eine Verallgemeinerung des Maßproblems vor, in der (ii) durch folgende schwächere Bedingung ersetzt wird, um weiterhin triviale Lösungen zu vermeiden:

$$\forall x \in \mathbb{R} : m(\{x\}) = 0.$$

Eine wichtige Einsicht ist, dass eine Lösung m des Maßproblems wegen (ii) und (iii) schon vollständig von ihren Werten auf $\mathcal{P}([0,1])$ bestimmt wird.
Das heißt, dass bereits ein passendes $m : \mathcal{P}([0,1]) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ das Maßproblem löst.
Nun nimmt BANACHs Ersatzbedingung dem Problem sogar den geometrischen Aspekt, wodurch sich oben das Intervall $[0,1]$ durch eine beliebige Menge S ersetzen lässt.
In diesem Fall muss nun, da m nicht die Nullfunktion auf $\mathcal{P}(S)$ ist, $m(S) > 0$ gelten. Normieren wir $m(S) = 1$, so erhalten wir damit auch eine Ersatzbedingung für (i). Das BANACH'sche Maßproblem könnte man also wie folgt stellen:

Frage 5.3
Gibt es eine Menge $S \neq \varnothing$ und eine Funktion $m : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$, mit folgenden drei Eigenschaften?

(i). $m(S) = 1$,

(ii). $\forall x \in S : m(\{x\}) = 0$,

(iii). $((F = \{\ X_n \mid n \in \omega\ \} \subseteq \mathcal{P}(S)) \ \wedge\ \mathfrak{D}_p(F)) \implies m(\bigcup_n X_n) = \sum_n m(X_n)$.

BANACH erkannte, dass in seiner Version des Maßproblems nur die *Kardinalität* der Menge S wirklich eine Rolle spielte, und dass man statt 5.3 (iii) genauso gut eine stärkere Eigenschaft fordern konnte.
Deshalb wollen wir den Begriff der σ-Additivität verallgemeinern:

Definition 5.4
Sei S eine Menge, m ein Maß über S, und $\lambda \in \text{CARD}$
Wir nennen m *λ-additiv*, gdw. für alle $\gamma \in \text{ORD}$ mit $\gamma < \lambda$, und alle paarweise disjunkten $F = \{\ X_\alpha \mid \alpha < \gamma\ \} \subseteq \mathcal{P}(S)$ gilt: $m(\bigcup_\alpha X_\alpha) = \sum_\alpha m(X_\alpha)$

Oben kommen reelle Summen mit unendlich vielen Summanden vor. Wir definieren den Wert einer solchen Summe als das Supremum der Summen endlicher Teilmengen der Summanden. Sei also $\{ r_\alpha \mid \alpha < \gamma \}$ eine Menge reeller Zahlen. Es ist:

$$\sum_{\alpha<\gamma} r_\alpha = \sup\{ \sum_{k=0}^{n} r_{\alpha_k} \mid n \in \omega;\ \forall k \leq n : \alpha_k < \gamma \}.$$

Es lässt sich folgendes zeigen (und der Beweis findet sich in [3], auf Seite 23):

Proposition 5.5
Sei κ die kleinste Kardinalzahl über der ein Maß wie in 5.3 existiert. Dann ist jedes Maß über κ sogar κ-additiv.

Tatsächlich ist so ein κ-additives Maß ein Teil der Definition einer messbaren Kardinalzahl κ...

Teil III

Höhere Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir noch etwas höher auf den Turm der Kardinalzahlen klettern.
Zuerst betrachten wir unerreichbare Kardinalzahlen, dann erweitern wir unser mengentheoretisches Vokabular, um schließlich etwas über Mahlo- und messbare Kardinalzahlen sprechen zu können.
Die Inhalte stammen wieder aus [3], [6], und [2].

6 Große Kardinalzahlen

6.1 Unerreichbare Kardinalzahlen

Definition 6.1
Eine Kardinalzahl $\kappa \in \textsc{Card}$ nennen wir *schwach unerreichbar*, gdw. κ eine überabzählbare, reguläre Limeskardinalzahl ist, und *(stark) unerreichbar* gdw. sie überabzählbar, regulär, und ein starker Limes ist.

Warum genau nennen wir diese Kardinalzahlen *unerreichbar*? Die Antwort auf diese Frage ist, dass sich unerreichbare Kardinalzahlen nicht durch die üblichen Mengenoperationen aus kleineren Kardinalzahlen erzeugen lassen.
Dies ähnelt der Tatsache, dass sich ω nicht durch endliche Operationen aus endlichen Zahlen gewinnen lässt - Ähnlichkeiten zwischen Großen Kardinalzahlen und ω ziehen sich durch die gesamte Theorie...

Satz 6.2
Die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen ist in (ZFC) nicht beweisbar. Weiters kann nicht gezeigt werden, dass die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen mit (ZFC) konsistent ist.

Man nimmt für die erste Behauptung das folgende Lemma zur Hilfe, und verwendet danach den zweiten GÖDELschen Unvollständigkeitssatz, um den Beweis abzuschließen.

Lemma 6.3
Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl. Dann ist V_κ ein Modell von (ZFC).

Beweis. Der Beweis findet sich in [3], auf Seite 18, und in [2], auf Seite 167. $\square$

6.2 Filter, Clubs, Stationäre Mengen

Filter - und die konzeptuell dualen Ideale - spielen eine wichtige Rolle in einigen mathematischen Disziplinen (Algebra, Topologie, Logik, Maßtheorie). In diesem Teil definieren wir das Konzept eines Filters auf einer gegebenen Menge.

Definition 6.4
Sei $S \neq \varnothing$ eine Menge und seien $X, Y \subseteq S$.
Ein *Filter auf* S ist eine Sammlung $\mathcal{F}$ von Teilmengen von S sodass gilt:

(i). $S \in \mathcal{F}$ und $\varnothing \notin \mathcal{F}$,

(ii). $X, Y \in \mathcal{F} \implies (X \cap Y) \in \mathcal{F}$,

(iii). $Y \supseteq X \in \mathcal{F} \implies Y \in \mathcal{F}$.

Definition 6.5
Sei $\mathcal{U}$ ein Filter auf S.
Wir nennen $\mathcal{U}$ genau dann einen *Ultrafilter*, wenn für jede Teilmenge X von S entweder X selbst, oder ihr Komplement in $\mathcal{U}$ enthalten ist:

$$\forall X \subseteq S : ((X \in \mathcal{U}) \vee (S \setminus X \in \mathcal{U}))$$

Definition 6.6
Ein Filter $\mathcal{M}$ auf S ist ein *maximaler Filter*, gdw. es keinen feineren Filter auf S gibt, also wenn $(\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F} \implies \mathcal{M} = \mathcal{F})$ für alle Filter $\mathcal{F}$ auf S gilt.

Lemma 6.7
Ein Filter $\mathcal{F}$ auf S ist genau dann ein Ultrafilter, wenn $\mathcal{F}$ maximal ist.

Beweis. Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist klarerweise maximal: Sei $\mathcal{F}$ ein weiterer Filter. Angenommen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ und $X \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$. Dann gilt $S \setminus X \in \mathcal{U}$, und somit sowohl $S \setminus X \in \mathcal{F}$ als auch $X \in \mathcal{F}$, was einen Widerspruch liefert. $\lightning$
Sei nun $\mathcal{F}$ ein Filter, der kein Ultrafilter ist. Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ nicht maximal sein kann. Sei $Y \subseteq S$ so, dass weder Y noch $S \setminus Y$ in $\mathcal{F}$ ist. Wir betrachten die Familie $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{Y\}$. $\square$

Definition 6.8
Wir nennen einen Filter $\mathcal{F}$...

(i). *fixiert*, gdw. $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing$, und

(ii). *frei*, gdw. er nicht fixiert ist, d.h. $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \varnothing$.

Definition 6.9
Sei $\lambda \in \textsc{Card}$ und $A_\gamma = \{ F_\alpha \mid \alpha < \gamma \} \subseteq \mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von S mit γ-vielen Elementen. Ein Filter $\mathcal{F}$ ist λ-*vollständig*, gdw.:

$$\forall \gamma < \lambda : \bigcap_{\alpha < \gamma} F_\alpha \in \mathcal{F}.$$

Nun betrachten wir abgeschlossen-unbeschränkte und stationäre Untermengen von regulären, überabzählbaren Kardinalzahlen.

Definition 6.10
Sei κ eine reguläre, überabzählbare Kardinalzahl, und seien $C, S \subseteq \kappa$ Mengen. Wir nennen C genau dann *abgeschlossen-unbeschränkt*, bzw. *club* (engl. *cl*osed *un**b*ounded), wenn gilt:

(i). $\sup C = \kappa$, d.h. C ist in κ unbeschränkt, und

(ii). $\{ \alpha < \kappa \mid \sup(C \cap \alpha) = \alpha \} \subseteq C$, d.h. alle Häufungspunkte von C, die kleiner als κ sind, liegen bereits in C.

Wir nennen S genau dann *stationär*, wenn $S \cap C \neq \varnothing$ für alle abgeschlossen-unbeschränkten $C \subseteq \kappa$.

Bemerkung 6.11
Eine in κ unbeschränkte Menge $C \subseteq \kappa$ ist abgeschlossen, gdw. für jede γ-Folge $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \gamma \rangle \subseteq C$ gilt, dass: $\lim_{\xi \to \gamma} \alpha_\xi \in C$.

Lemma 6.12
Seien C, D abgeschlossen-unbeschränkt. Dann ist auch $C \cap D$ abgeschlossen-unbeschränkt.

Beweis. Es folgt sofort, dass $C \cap D$ abgeschlosssen ist. Um zu zeigen, dass $C \cap D$ unbeschränkt ist, sei zunächst $\alpha < \kappa$. Da C unbeschränkt ist, existiert ein $\alpha_1 > \alpha$ mit $\alpha_1 \in C$. Analog existiert ein $\alpha_2 > \alpha_1$ mit $\alpha_2 \in D$. Auf diese Art erzeugen wir eine streng monoton wachsende Folge

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < ...$$

mit $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, ... \in C$, und $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, ... \in D$. Wenn wir nun den Grenzwert der obigen Folge β nennen, so gilt $\beta < \kappa$, $\beta \in C$, und $\beta \in D$. ??? $\square$

Bemerkung 6.13
Der Filter, der von den abgeschlossen-unbeschränkten Mengen „generiert“ wird, besteht aus allen $X \subseteq \kappa$ die eine abgeschlossen-unbeschränkte Teilmenge haben. Dieser Filter heißt *abgeschlossen-unbeschränkter Filter* auf κ.

Die Menge aller Limesordinalzahlen $\alpha < \kappa$ ist abgeschlossen-unbeschränkt in κ. Wenn A eine unbeschränkte Teilmenge von κ ist, so ist die Menge aller Häufungspunkte $\alpha < \kappa$ von A abgeschlossen-unbeschränkt.
Eine Funktion $f : \kappa \to \kappa$ nennen wir *normal* gdw. sie streng monoton wachsend und stetig ist. Der Bildbereich einer normalen Funktion ist eine abgeschlossen-unbeschränkte Menge. Umgekehrt gibt es für abgeschlossen-unbeschränktes C eine eindeutige normale Funktion, die C aufzählt.

Satz 6.14
Der abgeschlossen-unbeschränkte Filter auf κ ist κ-vollständig, d.h. der Schnitt von weniger als κ-vielen abgeschlossen-unbeschränkten Teilmengen von κ ist stets abgeschlossen-unbeschränkt.

Beweis. Wir beweisen, mittels Induktion über $\gamma < \kappa$, dass der Schnitt einer Folge $\langle\ C_\alpha \mid \alpha < \gamma\ \rangle$ abgeschlossen-unbeschränkter Teilmengen von κ abgeschlossen-unbeschränkt ist. Der Induktionsschritt funktioniert bei Nachfolgerordinalzahlen wegen 6.12. Wenn γ eine Liemesordinalzahl ist, so nehmen wir an, dass die Behauptung für alle $\alpha < \gamma$ wahr ist. Dann können wir jedes C_α durch $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$ ersetzen, und erhalten eine monoton fallende Folge mit demselben Schnitt. Daher nehmen wir an, dass

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots \supseteq C_\alpha \supseteq \ldots \quad (\alpha < \gamma)$$

abgeschlossen-unbeschränkt sind, und sei $C = \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$.
Es ist ersichtlich, dass C abgeschlossen ist. Um die Unbeschränktheit von C zu zeigen, sei $\alpha < \kappa$. Wir konstruieren eine γ-Folge

$$\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_\xi < \ldots \quad (\xi < \gamma)$$

wie folgt: Wir setzen β_0 so, dass $\beta_0 > \alpha$, und für alle $\xi < \gamma$ sei $\beta_\xi \in C_\xi$ so, dass $\beta_\xi > \sup\{\ \beta_\nu \mid \nu < \xi\ \}$. Da κ regulär ist und $\gamma < \kappa$ gilt, existiert eine Folge wie oben gefordert, und ihr Grenzwert β ist kleiner als κ. Für alle $\eta < \gamma$ ist β der Grenzwert einer Folge $\langle\ \beta_\xi \mid \eta \leq \xi < \gamma\ \rangle$ in C_η, und somit $\beta \in C_\eta$. Daher also $\beta \in C$. $\square$

Definition 6.15
Sei $\langle\ X_\alpha \mid \alpha < \kappa\ \rangle$ eine Folge von Teilmengen von κ. Der *Diagonalschnitt* dieser Folge ist wie folgt definiert:

$$\underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha = \{\ \xi < \kappa \mid \xi \in \bigcup_{\alpha<\xi} X_\alpha\ \}.$$

Bemerkung 6.16
Es folgt:

(i). Definieren wir $Y_\alpha = \{ \xi \in X_\alpha \mid \xi > \alpha \}$ für alle $\alpha < \kappa$, so erhalten wir, dass $\triangle X_\alpha = \triangle Y_\alpha$.

(ii). Außerdem ist $\triangle X_\alpha = \bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha \cup \{ \xi \mid \xi \leq \alpha \})$.

Lemma 6.17
Der Diagonalschnitt einer κ-Folge abgeschlossen-unbeschränkter Mengen ist abgeschlossen-unbeschränkt.

Beweis. Sei $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ eine Folge abgeschlossen-unbeschränkter Mengen. Aus der Definition ist klar, dass der Diagonalschnitt unverändert bleibt, wenn wir C_α für jedes $\alpha < \kappa$ durch $\bigcap_{\xi \leq \alpha} C_\xi$ ersetzen.
Wegen 6.14 können wir annehmen, dass

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq ... \supseteq C_\alpha \supseteq ... \quad (\alpha < \kappa).$$

Sei nun also $C = \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} C_\alpha$. Um zu zeigen, dass C abgeschlossen ist, sein α ein Häufungspunkt von C. Wir wollen zeigen, dass $\alpha \in C$, d.h. $\alpha \in C_\xi$ für alle $\xi < \alpha$.
Sei $\xi < \alpha$. Wir setzen $X = \{ \nu \in C \mid \xi < \nu < \alpha \}$. Jedes $\nu \in X$ ist in C_ξ aufgrund 6.16 (i). Daher gilt $X \subseteq C_\xi$ und $\alpha = \sup X \in C_\xi$. Somit $\alpha \in C$, und C ist abgeschlossen.
Um zu zeigen, dass C unbeschränkt ist, sei $\alpha < \kappa$. Wir konstruieren eine Folge $\langle \beta_n \mid n < \omega \rangle$ wie folgt: Sei $\beta_0 > \alpha$ so, dass $\beta_0 \in C_0$, und für jedes $n \in \omega$ sei $\beta_{n+1} > \beta_n$ so, dass $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$. Wir wollen nun zeigen, dass der Grenzwert $\beta = \lim_{n\to\omega} \beta_n$ in C enthalten ist: Sei $\xi < \beta$, wir zeigen $\beta \in C_\xi$. Da $\xi < \beta$ ist, gibt es ein n, sodass $\xi < \beta_n$. Jedes β_k für $k > n$ ist in C_{β_n}, und daher $\beta \in C_{\beta_n}$. Somit gilt also $\beta \in C_\xi$, wodurch $\beta \in C$ - also ist C unbeschränkt. □

6.3 Mahlo-Kardinalzahlen

In dieser Arbeit bleibt uns leider nicht der Raum für die Beschäftigung mit Mahlo-Kardinalzahlen. Dennoch sind sie jedenfalls erwähnenswert.

Definition 6.18
Sei $\kappa \in \textsc{Card}$ eine Kardinalzahl. Unter der Bedingung, dass die Menge

$$\{ \mu < \kappa \mid \mu \text{ ist regulär} \}$$

stationär ist, nennen wir κ...

(i). *schwach Mahlo*, gdw. κ schwach unerreichbar ist, und

(ii). *stark Mahlo*, gdw. κ (stark) unerreichbar ist.

6.4 Messbare Kardinalzahlen

Definition 6.19
Eine überabzählbare Kardinalzahl $\kappa \in \textsc{Card}$ heißt genau dann *messbar*, wenn es einen κ-vollständigen, freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf κ gibt.

Bemerkung 6.20
Eine überabzählbare Kardinalzahl $\kappa \in \textsc{Card}$ heißt also genau dann *messbar*, wenn es ein zweiwertiges, nichttriviales, κ-additives Maß $m : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$ über κ gibt.
Die Äquivalenz dieser beiden Charakterisierungen bzw. Definitionen ist leicht zu sehen: Wir können eine zweiwertige Abbildung aus unserem κ-vollständigen, freien Ultrafilter wie folgt bauen:

$$m_{\mathcal{U}}(X) = \mathbb{1}_{X \in \mathcal{U}}$$

und umgekehrt können wir aus einem zweiwertigen, nichttrivialen, κ-additiven Maß den entsprechenden gewollten Filter generieren.

7 Messbar ist Unerreichbar

Zuletzt kommen wir zu folgendem Satz, der unseren Betrachtungen ein relativ arbiträres Ende setzt. Der Satz ist [3] entnommen, das bei weiterem Interesse an Großen Kardinalzahlen wärmstens zu empfehlen ist.

7.1 Der Satz und sein Beweis

Satz 7.1
Ist eine Kardinalzahl κ messbar, so ist sie unerreichbar.

Beweis. Zuerst wollen wir sehen, warum κ regulär ist: Die κ-Additivität von m gibt uns, dass Mengen mit Kardinalität kleiner κ Maß 0 haben müssen, also:

$$\mathrm{Card}(X) < \kappa \implies m(X) = \sum_{x \in X} m(x) = 0.$$

Was würde es heißen, dass κ singulär ist?
Sie wäre dann, wie wir in 4.15 gesehen haben, die Vereinigung von weniger als κ-vielen Mengen mit weniger als κ-vielen Elementen, also:

$$\exists \gamma < \kappa : \kappa = \bigcup_{\alpha<\gamma} K_\alpha$$

für disjunkte K_α mit $\mathrm{Card}(K_\alpha) < \kappa$.
Nun wäre aber:

$$1 = m(\kappa) = \sum_{\alpha<\gamma} m(K_\alpha) = \sum_{\alpha<\gamma} 0 = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch. ↯ Also ist κ regulär. ✓
Um die Unerreichbarkeit zu zeigen, benötigen wir also nur noch, dass messbare Kardinalzahlen starke Limiten sind.
Sei also $\kappa \in \textsc{Card}$ messbar, und $\mathcal{U}$ ein κ-vollständiger freier Ultrafilter auf κ.
Angenommen κ ist kein starker Limes, d.h. angenommen es gibt $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda \geq \kappa$, also einer injektiven Funktion $f : \kappa \to {}^\lambda 2$.

Betrachten wir also die Werte von f: Sie sind Funktionen $f(\xi) : \lambda \to \{0,1\}$, mit $\xi < \kappa$. Da U ein Ultrafilter ist, gibt es für jedes $\alpha < \lambda$ ein $i_\alpha \in \{0,1\}$, sodass:

$$X_\alpha = \{ \ \xi < \kappa \mid f(\xi)(\alpha) = i_\alpha \ \} \in U.$$

Daher ist wegen der κ-Vollständigkeit von U:

$$X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$$

und es gilt

$$\forall \xi \in X : \forall \alpha < \lambda : f(\xi)(\alpha) = i_\alpha.$$

Nun hatten wir aber f injektiv angenommen - d.h. es kann nur maximal ein solches ξ in X geben. Das würde aber bedeuten, dass U ein $\subset$-kleinstes Element hätte, wodurch U nicht frei sein könnte! ↯ $\square$

7.2 Ein metamathematisches Spiel?

Wir sind also am Ende der Arbeit angekommen. Ich bin jedoch kein Freund davon, wenn theoretisch aufwändige Werke einfach abrupt enden.
Schließlich sind wir uns alle einig, dass man sich auslaufen sollte, nachdem man laufen war, und dass man nach dem Schwimmtraining stets noch ein paar gemächlichere Längen schwimmen sollte. Der Zweck ist die schonende Zurückversetzung des Körpers in den Ruhezustand – Puls und Blutdruck bekommen Zeit, wieder ruhig hinabzusinken, der Körper wird weniger Stress ausgesetzt als

beim abrupten Abbruch intensiver Anstrengung.
Meiner Meinung nach lässt sich analog dafür argumentieren, dass ein jeder – auch noch so abstrakt mathematischer – Text, zur Schonung des Verstandes des Lesers, einen gemächlichen finalen Abschnitt haben sollte. Wer bei seiner Leserschaft mentale Anspannung und Gedankendichte hebt, sollte auch so freundlich sein, einen sinnvollen Rahmen für die organische Rückkehr zur Alltagsfunktion der Psyche zur Verfügung zu stellen.
Wie bitte sollen wir aber eine Verbindung zwischen dieser kuriosen abstrakten Theorie unendlich großer Zahlen und unserem Alltag herstellen? Nun, KANAMORI, der Autor von [3], teilt anscheinend meine obige Ansicht. Im Anhang des vorhin erwähnten Texts liefert er eine etwas „umgangssprachlichere" Behandlung der Thematik. Jene paar Seiten, sowie den Eintrag [4] in der *Stanford Encyclopedia of Philosophy* möchte ich an dieser Stelle empfehlen - obwohl wahrscheinlich in umgekehrter Reihenfolge.
Es ist jedenfalls keine gänzlich illegitime Annahme, dass der Hang zu dem, was wir Mathematik nennen, einen äußerst tiefen Teil unserer kollektiven Menschlichkeit darstellt. Darauf möchte ich auch nochmals eingehen: Mathematiker befassen sich mit den allgemeinen Gesetzmäßigkeiten möglichst eleganter abstrakter Objekte.
Diese Abstraktion, die in der Mathematik so grundlegend ist, ist eine Fähigkeit, die den Menschen ausmacht. Es ist wohl auch angebracht, darüber zu staunen, dass wir überhaupt mathematisch abstrahieren können. Wir sind nicht nur in der Lage zu erkennen, dass Dinge auf eine bestimmte Art sind, sondern können zwischen verschiedenen „Arten des Seins" unterscheiden, und diese Unterscheidungen symbolisch festhalten und weitergeben.
Freilich ist diese Fähigkeit nicht vom Himmel gefallen, sondern war eine natürliche Konsequenz der Existenz von Sprachen. Und auch die sind nicht einfach erschienen, sie entwickelten sich als natürliche Konsequenz einfacher Kommunikation in sozialen Tieren. Diese Kommunikation ergibt sich selber im Endeffekt durch die Tatsache, dass sich große physikalische Systeme (d.h. solche mit sehr vielen Einzelkomponenten) oft im Wesentlichen so verhalten wie viel kleinere Systeme (mit extra Ungewissheit in der zeitlichen Entwicklung).
Das wiederum heißt, dass es einen sinnvollen quantitativen Ähnlichkeitsbegriff zwischen physikalischen Zuständen geben muss. Ansonsten könnten wir im Endeffekt nicht abstrahieren, d.h. viele konkrete Beispiele nicht in eine allgemeine Theorie komprimieren. Nun scheint es also, dass sich die Frage nach dem Ursprung der Mathematik in der Natur nicht schon auf der psychologischen oder biologischen Ebene klären lässt.
Es scheint, als wären bereits die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten unserer Realität eine Manifestation dessen, was wir Mathematik nennen, oder etwa nicht?

Zumindest lässt sich keine Mathematik vorstellen, die sich nicht fundamental mit Gleichheit und Ähnlichkeit (quantitativer wie qualitativer) bestimmter Objekte auseinandersetzt.
Wir sagen, zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben, wir vergleichen Mengen nach ihrer Kardinalität und Ordinalität, und wir stellen fest, dass sich sogar Eigenschaften für Mengen bestimmter Größen ergeben, die sie „im Wesentlichen" charakterisieren.
Ist die gesamte Realität eine Art Menge? So etwas wie eine Kardinalzahl? Gibt es so etwas wie „Axiome der Realität"? Wenn ja, wie viele und welche?
Solche Fragen stellen sich Mathematiker zwar nicht hauptberuflich, aber sie waren auf jeden Fall eine meiner Motivationen für die manchmal recht trockene Arbeit mit Abstraktionen während des Erstellens dieser Arbeit.
Leider liefern selbst Überlegungen wie die obige, die die Mathematik eng an die fundamentale Struktur der Realität binden, nur *ex post facto* Antworten auf die Frage „Warum betreiben wir Mathematik?".
Vielleicht ist es am ehrlichsten, einfach zu sagen, dass die gesamte Mathematik (und nicht zuletzt die Untersuchung *Großer Kardinalzahlen*) eine Art Spiel ist, das oft irgendwie einfach Spaß macht, auch wenn es keine ersichtliche „Gewinnstrategie" gibt, und sich das Spiel ewig fortsetzen lässt.

Literatur

[1] Joan Bagaria. *A Short Excursion to Cantor's Paradise*. 2012. URL: https://andso0n.wordpress.com/2012/08/18/a-short-excursion-to-cantors-paradise/.

[2] Thomas Jech. *Set Theory, Third Millenium Edition*. Springer, 2003.

[3] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Springer, 2009.

[4] Peter Koellner. „Independence and Large Cardinals". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hrsg. von Edward N. Zalta. Summer 2011. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2011.

[5] Luke Mastin. *The Story of Mathematics*. 2010. URL: https://www.storyofmathematics.com/index.html.

[6] Ralf Schindler. *Set Theory: Exploring Independence and Truth*. Springer, 2014.

Verzeichnis definierter Begriffe