BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Das konstruierbare Gödelsche Mengenuniversum

Verfasser

Clemens Moser

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc)

Wien, Mai 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 033 621
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	Dr. Sandra Müller

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Konstruktion des Gödelschen Mengenuniversums L zu verstehen und den relativen Konsistenzbeweis von $Con(ZF) \rightarrow Con(ZFC + GCH)$ nachzuvollziehen. Dazu werden anfangs mehrere grundlegende Begriffe und Resultate der Mengenlehre aufgelistet, die für die Beweise notwendig sind. Die Aufgabe den Beweis von $Con(ZF) \rightarrow Con(ZFC + GCH)$ zu führen, kann mittels verschiedener Herangehensweisen gelöst werden. In dieser Bachelorarbeit wird dem Beweis wie er in [2] zu finden ist gefolgt. In ihm wird beobachtet, dass für eine transitive Menge M, die Menge aller über M definierbarer Mengen relativ einfach mittels Gödeloperationen beschrieben werden kann. Verschiedene Resultate über selbige helfen uns dann dabei, zu sehen, dass die Eigenschaft »eine Menge x ist konstruierbar« absolut für L ist, d.h. für Mengen aus L stimmen L und das Mengenuniversum aller Mengen darin überein, ob eine Menge konstruierbar ist oder nicht. Hieraus folgern wir; L glaubt, dass alle Mengen konstruierbar sind. Im weiteren zeigen wir dann, dass die Klasse der konstruierbaren Mengen wohlgeordnet werden kann, und somit im Fall, dass alle Mengen konstruierbar sind, eine zum Auswahlaxiom äquivalente Bedingung erfüllt ist. Am Schluß zeigen wir noch, dass aus dem bis dahin bewiesenen die relative Konsistenz der Allgemeinen Kontinuumshypothese mit ZF folgt.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

Grundlage dieses Abschnitts bildet [1].
Wir setzen im Verlauf des Textes eine gewisse Vertrautheit mit Begriffen der Modelltheorie voraus, wie sie in einer Grundvorlesung über Mathematische Logik vorkommen.
Im Rahmen dieser Arbeit verwenden wir das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre als unsere Theorie. Aussagen die wir beweisen, beweisen wir in ihm und tun dies im Vertrauen darauf, dass die uns aus dem Rest der Mathematik vertrauten Beweismethoden in einem Hilbertschen Beweissystem formalisiert werden können.

1.1 Historisches

Aufgrund des 2.ten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes kann eine Theorie die stark genug ist, wie ZF es zum Beispiel ist, nicht ihre eigene Widerspruchsfreiheit beweisen. Wenn wir also an Konsistenzaussagen interessiert sind, müssen wir uns auf relative Konsistenzbeweise beschränken. Im Jahr 1938 entwickelte Gödel ein Klassenmodell für ZF, das Gödelsche Mengenuniversum. Er konnte zeigen, dass in diesem sowohl das Auswahlaxiom als auch die Allgemeine Kontinuumshypothese gelten. Damit war gezeigt, dass aus der Konsistenz von ZF jene von ZFC+GCH folgt, d.h. die Hinzunahme der Kontinuumshypothese und des Auswahlaxioms ändern nichts an der Widerspruchsfreiheit der Theorie. Das bedeutet weiterhin, dass man aus ZF nicht die Negation der beiden Aussagen beweisen kann, da sonst ZFC bzw. ZF+GCH widerspruchsbehaftet wären. In den 1960er Jahren zeigte Cohen das umgekehrte Resultat, also die relative Widerspruchsfreiheit von ZF und $\neg AC$ bzw. $\neg GCH$, womit diese beiden Aussagen unabhängig von ZF sind.

1.2 Erweiterungen über Definition

Wir arbeiten im Rahmen dieser Arbeit in der Sprache der Mengenlehre, die nur aus dem zweistelligen Relationssymbol $\in$ besteht. Jedoch führen wir, um unnötig lange Formeln zu vermeiden, mehrere neue Funktions- und Relationssymbole ein. Wir definieren dies wie in [1] (Kapitel I.2) angegeben:

Definition 1.1. Angenommen es ist $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ und Γ eine Menge von Aussagen von $\mathcal{L}$.
Falls $p \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ ein n-stelliges Relationssymbol ist, dann ist eine Definition von p über $\mathcal{L}, \Gamma$ eine Aussage der Form $\forall x_1, \ldots, x_n(p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \ldots, x_n))$, mit θ eine $\mathcal{L}$-Formel.
Falls $f \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ ein n-stelliges Funktionssymbol ist, dann ist eine Definition von f über $\mathcal{L}, \Gamma$ eine Aussage der Form $\forall x_1, \ldots, x_n(\theta(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)))$, mit θ eine $\mathcal{L}$-Formel und es gilt

$$\Gamma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \exists! y(\theta(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Eine Menge von Aussagen Γ' von $\mathcal{L}'$ ist eine Erweiterung über Definition von Γ gdw. $\Gamma' = \Gamma \cup \Delta$. Mit $\Delta = \{\delta_s : s \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}\}$, δ_s die definierenden Aussagen.

Im Fall von 0-stelligen Funktionssymbolen sprechen wir von Konstanten, z.B. $\emptyset$, und im Fall von 0-stelligen Relationssymbolen von Propositionen, hier ist die Kontinuumshypothese ein Beispiel, die demnach als $\{\in\}$-Aussage geschrieben werden kann.
Folgender Satz sichert uns zu, dass in der erweiterten Theorie nichts essentiell Neues bewiesen werden kann.

Satz 1.2. *Angenommen es ist $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$, Γ eine Menge von Aussagen in $\mathcal{L}$. Weiters sei Γ' eine Menge von Aussagen in $\mathcal{L}'$, die eine Erweiterung über Definition von Γ ist. Dann haben wir:*

1. *Falls ϕ eine Aussage in $\mathcal{L}$ ist, dann gilt $\Gamma \vdash \phi$ gdw. $\Gamma' \vdash \phi$.*

2. *Falls ϕ eine Formel in $\mathcal{L}'$ ist, dann gibt es eine Formel $\hat{\phi}$ in $\mathcal{L}$ mit den gleichen freien Variablen, sodasss $\Gamma \vdash \forall x_1, \ldots, x_n(\hat{\phi} \leftrightarrow \phi)$ gilt, hier kommen alle freien Variablen in $x_1, \ldots, x_n$ vor.*

Da wir mitunter neue Symbole unter zuhilfenahme anderer, zuvor definierter, Symbole einführen weisen wir noch auch folgenden Satz hin.

Satz 1.3. *Es gelte $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}''$, und Γ ist eine Menge von Aussagen in $\mathcal{L}$, Γ' ist eine in $\mathcal{L}'$ und Γ'' ist eine in $\mathcal{L}''$. Weiters soll Γ' eine Erweiterung über Definition von Γ sein und Γ'' eine von Γ'. Dann ist Γ'' äquivalent zu einer Erweiterung über Definition von Γ.*

Bei jedem Erweiterungsschritt kommen also weder neue, in unserer Theorie beweisbare, Aussagen hinzu noch verlieren wir an Beweiskraft.
Einige Beispiele für über Definition eingeführte Funktionen sind.

- $u \cap v$ und $u \cup v$
- $\bigcup u$ und $\bigcap u$
- $\{u, v\}$, $\{u\}$ und (u, v)
- $u \setminus v$

Einzelheiten darüber wie diese definiert werden und die für die Sicherstellung einer sinnvollen Definition nötigen Beweise können z.B. in [1] oder [2] gefunden werden.

2 Zermelo - Fraenkel Aximonensystem

Wir stellen nun das Zermelo - Fraenkelschen Axiomensystem, kurz ZF, vor. ZF legt unser Mengenuniversum V fest, die Klasse aller existierender Mengen, und die Regeln denen diese Mengen gehorchen. Die genaue Form der Axiome unterscheidet sich von Autor zu Autor, wir wählen jene aus [1]. Der Rest dieses Abschnitts folgt den ersten Kapiteln der gleichen Quelle. Kleinere Anlehnungen sind [2] entnommen.

2.1 ZF und das Auswahlaxiom

Definition 2.1. ZF und ZFC

Extensionalität
$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Fundierung
$\forall x (\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$

Aussonderungsschema
für jede Formel ϕ, ohne y frei gilt:
$\forall p \forall v \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge \phi(x, p))$

Paar
$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$

Vereinigung
$\forall F \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in F \rightarrow x \in A)$

Ersetzungsschema

für jede Formel ϕ, ohne B frei gilt:
$\forall p \forall A(\forall x \in A \exists! y \phi(x,y,p) \to \exists B \forall x \in A \exists y \in B \phi(x,y,p))$

Unendlichkeit

$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\} \in x))$

Potenzmenge

$\forall x \exists y \forall z(z \subset x \to z \in y)$

Auswahlaxiom

$\forall F(\emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \leftrightarrow x \cap y = \emptyset) \to \exists C \forall x \in F \exists u(C \cap x = \{u\}))$

Die Liste der obigen Axiome ohne das Auswahlaxiom kürzen wir mit ZF ab, diejenige mit dem Auswahlaxiom als ZFC. Die p im Aussonderungsschema und Ersetzungsschema können auch für eine endliche Reihe von Parametern stehen.

Wir sehen, dass ZF eine unendliche Liste von Axiomen ist, bestehend aus sechs Axiomen und zwei Axiomsschemata die für jede Formel ein Axiom bestimmter Form liefern.
Wir erwähen bereits hier, dass folgende Äquivalenz gilt [1] I.12

Satz 2.2. *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zur Aussage, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.*

Der Ausdruck »wohlgeordnet« wird in 2.14 bzw. 4.16 definiert.

2.2 Klassen, Funktionen und Relationen

2.2.1 Begriffe auf Mengen

Wir wiederholen einige Begriffe für Funktionen und Relationen, die im Verlauf dieses Textes häufig vorkommen werden.

Definition 2.3.

- Wir nennen R eine (binäre) Relation, falls R eine Menge geordneter Paare (u,v) ist. Wir schreiben auch uRv für $(u,v) \in R$.
- Wir nennen R eine lineare Ordnung auf einer Menge A, falls R transitiv und irreflexiv auf A ist und die Trichotomie auf A erfüllt. D.h. es gelten folgende Aussagen
  - $\forall u,v,w \in A(uRv \wedge vRw \to uRw)$,
  - $\forall u \in A(\neg uRu)$,
  - $\forall u,v \in A(uRv \vee vRu \vee v = u)$.
- Wir nennen f eine Funktion, falls f eine Relation und es für jedes u höchstens ein v gibt, sodass $(u,v) \in f$.

Weitere wohlbekannte Definitionen, die vorallem für Funktionen verwendet werden, sind

Definition 2.4.

$dom(R) = \{u : \exists v((u,v) \in R)\}$,

$ran(R) = \{v : \exists u((u,v) \in R)\}$,

$R|_A = \{(u,v) \in R : u \in A\}$,

$F(A) = F''A = ran(F|_A)$.

Weiters

Definition 2.5.

1. $F : A \to B$ heißt, dass F eine Funktion ist mit $dom(F) = A$ und $ran(F) \subset B$.
2. F surjektiv bedeutet, dass $ran(F) = B$ gilt.
3. F injektiv bedeutet, dass $\forall u, v \in A(F(u) = F(v) \to u = v)$ gilt.
4. F bijektiv bedeutet, dass F injektiv und surjektiv ist.

Mittels der Formel $\psi(x, z) = \exists y(\phi(x, y) \wedge z = (x, y))$ ergibt sich folgendes Lemma:

Lemma 2.6. *Angenommen es gelte $\forall x \in A \exists! y \phi(x, y)$, A Menge, dann gibt es eine Funktion f mit $dom(f) = A$, sodass für jedes $x \in A$, $f(x)$ das eindeutige y ist, sodass $\phi(x, y)$ gilt.*

Beweis. Sei $\psi(x, z)$ die Formel $\exists y(\phi(x, y) \wedge z = (x, y))$.
Da $\forall x \in A \exists! y \phi(x, y)$ beweisbar ist, gilt selbiges auch für $\forall x \in A \exists! z\ \psi(x, z)$. Nachdem Ersetzungsschema finden wir eine Menge B, sodass

$$\forall x \in A \exists! z\ \psi(x, z) \to \forall x \in A \exists z \in B\ \psi(x, z)$$

erfüllt ist.
Aus dieser können wir f als $\{z \in B : \exists x \in A\ \psi(x, z)\}$ aussondern. □

2.2.2 Klassen und Relationen auf Ihnen

Das Aussonderungsschema sichert uns für jede Formel $\phi(x)$ und jede Menge u die Existenz der Menge $\{x \in u : \phi(x)\}$ im Mengenuniversum zu. Die Kollektion $\{x : \phi(x)\}$ muss jedoch nicht existieren. Für uns ist es allerdings nützlich solche Objekte zu betrachten. Der relative Konsistenzbeweis den wir führen werden, benutzt zum Beispiel, dass wir eine Formel finden können, die die Zugehörigkeit zum Gödelschen Mengenuniversum beschreibt und dass eingeschränkt auf diese Klasse die Axiome von ZFC und GCH gelten. Ein weiteres wichtiges Beispiel für eine Klasse sind die Ordinalzahlen.

Definition 2.7. Für jede Formel $\phi(x, p)$, p etwaige Parameter, definieren wir:

- $\{x : \phi(x, p)\}$ nennen wir eine Klasse.
- Gibt es keine Menge M mit $M = \{x : \phi(x, p)\}$, so nennen wir $\{x : \phi(x, p)\}$ eine echte Klasse

Lemma 2.8. *Jede Menge M ist eine Klasse.*

Beweis. Betrachte einfach $\{x : x \in M\}$. □

Wir geben folgende Notationen an, wobei wir mögliche Parameter unterdrücken:

Definition 2.9. Sei A eine Klasse. Dann gibt es eine Formel μ_A, sodass

$$x \in A \leftrightarrow \mu_A(x)$$

gilt. Wir schreiben

- $\exists x \in A \phi \leftrightarrow \exists x(\mu_A(x) \wedge \phi)$

- $\forall x \in A\phi \leftrightarrow \forall x(\mu_A(x) \rightarrow \phi)$

Wir sagen die Quantoren werden auf A eingeschränkt.

Wenn wir nun eine definierte Relation einführen, können wir uns diese als eine Klasse denken, deren Elemente geordnete Mengen sind. Ebenso können wir, wenn wir diese Definition auf Elemente einer weiteren Klasse A einschränken, von Relationen auf Klassen sprechen. Gleichfalls können wir über die Gültigkeit von Eigenschaften erster Ordnung (d.h. solche die nur Aussagen über Elemente von A machen) entscheiden, indem wir sagen, dass die sie beschreibende Formel eingeschränkt auf A beweisbar ist. Zum Beispiel können wir nun entscheiden wann eine Relation eine lineare Ordnung über eine Klasse A ist.

Definition 2.10. Wir sagen eine Formel $\phi(x_1, \dots, x_n, p)$, wobei p für mögliche Parameter aus A steht und alle freien Variablen von ϕ in $x_1, \dots, x_n$ vorkommen, ist auf einer Klasse A gültig, falls ihr universeller Abschluss relativiert auf A beweisbar ist. D.h.

$$\forall x_1, \dots, x_n \in A\ \phi(x_1, \dots, x_n, p)$$

ist beweisbar.

Definition 2.11. Sei A eine definierte Klasse und R eine definierte Relation.

- Wir nennen R eine (binäre) Relation, falls die R definierende Formel nur von geordneten Paaren (u, v) erfüllt wird. Wir schreiben auch uRv für $(u, v) \in R$.
- Wir nennen R eine lineare Ordnung auf der Klasse A, falls R transitiv und irreflexiv auf A ist und die Trichotomie auf A erfüllt. D.h. es gelten folgende Aussagen
  - $\forall u, v, w \in A(uRv \wedge vRw \rightarrow uRw)$,
  - $\forall u \in A(\neg uRu)$,
  - $\forall u, v \in A(uRv \vee vRu \vee v = u)$.
- Wir nennen f eine Funktion, falls f eine Relation ist und folgende Aussage gilt

$$\forall v_1, v_2(\exists u(\theta(u, v_1) \wedge \theta(u, v_2)) \rightarrow v_1 = v_2)$$

Definition 2.12.
1. $F : A \rightarrow B$ heißt, dass F eine Funktion ist mit $dom(F) = A$ und $ran(F) \subset B$.
2. F surjektiv bedeutet, dass $ran(F) = B$ gilt.
3. F injektiv bedeutet, dass $\forall u, v \in A(F(u) = F(v) \rightarrow u = v)$ gilt.
4. F bijektiv bedeutet, dass F injektiv und surjektiv ist.

Hier bezeichnen nun $ran(F)$ und $dom(F)$ die entsprechend definierten Klassen, die Interpretation von $A \subset B$ ist, das jedes Element der Klasse A auch in B ist, also $\forall x(\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(x))$ ist beweisbar.

Nun noch einige Definitionen die wir im weiteren Verlauf benötigen werden.

Definition 2.13. Seien A und B Klassen, R_A und R_B lineare Ordnungen auf ihnen und $F : A \to B$ eine Funktion.
Wir nennen F einen Ordnungsisomorphismus zwischen $(A; R_A)$ und $(B; R_B)$, falls F eine Bijektion ist und $\forall u, v \in A(uR_Av \leftrightarrow F(u)R_BF(v))$ gilt.
Wir sagen $(A; R_A)$ und $(B; R_B)$ sind ordnungsisomorph zueinander, falls ein Ordnungsisomorphismus zwischen ihnen existiert. Wir schreiben dann $(A; R_A) \cong (B; R_B)$.

Definition 2.14. Sei R eine Relation auf einer Klasse A. Wir sagen

- R ist fundiert auf A, wenn jede Teilmenge u von A ein R-kleinstes Element enthält, d.h. für $u \subset A$ gilt
$$\exists y \in u \forall z \in u(\neg zRy).$$
- R ist mengenartig auf A, falls für jedes $a \in A$ die Klasse
$$ext_{(A;R)} = ext_R = \{x \in A : xRa\}$$
eine Menge ist.
- R ist eine Wohlordnung auf A, falls R eine fundierte, mengenartige lineare Ordnung auf A ist.

3 Der relative Konsistenzbeweis

Unser Ziel ist es mittels des Gödelschen Mengenuniversums einen Beweis für $Con(ZF) \to Con(ZFC + GCH)$ zu erbringen. Wir sagen hierbei, dass $Con(\Gamma)$ für eine Theorie Γ gilt, sofern es keine Aussage ψ gibt, sodass $\Gamma \vdash \neg\psi \wedge \psi$. Die grundlegende Logik hierfür soll nun besprochen werden. Dabei beschränken wir uns auf den für uns interessanten Spezialfall, der allgemeine Fall kann in [1] (Kapitel I.16) gefunden werden.

In unserem Beweis verwenden wir das Mengenuniversum L, das wir in ZF konstruiert haben werden, als Klassenmodell von $\{\in\}$, die Interpretation von $\in$ erbt L von V. Wir werden zeigen, dass L alle Axiome von $ZFC + GCH$ erfüllt und daraus auf die relatvie Konsistenz schließen.

Definition 3.1. Sei A eine nicht-leere, in ZF konstruierte Klasse. Wenn wir A die Interpretation von $\in$ vererben so nennen wir A eine relative Interpretation von $\{\in\}$ in ZF bzw. ein Klassenmodell. Die Relativierung ϕ^A einer $\{\in\}$-Formel ϕ auf A definieren wir als:

- $\phi^A \leftrightarrow \phi$ im Fall, dass ϕ eine atomare Formel ist,
- $(\neg\phi)^A \leftrightarrow \neg\phi^A$,
- $(\phi \wedge \psi)^A \leftrightarrow \phi^A \wedge \psi^A$,
- $(\exists x\phi)^A \leftrightarrow \exists x \in A\phi^A$,

ϕ^A sind also $\{\in\}$-Formeln.
Es gilt nun

Lemma 3.2. *Sei A eine relative Interpretation von $\{\in\}$ in ZF.*
Seien ψ und $\theta_1, \ldots, \theta_k$ $\{\in\}$-Aussagen und gelte $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\} \vdash \psi$, dann gilt
$$ZF \vdash (\theta_1^A \wedge \ldots \wedge \theta_k^A) \to \psi^A.$$

Beweis. Wir beziehen uns hier auf den Hilbertschen Beweisbegriff wie er in [3] vorgestellt wird. Wir haben also nach Voraussetzung eine Kette von Aussagen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ mit $\phi_n = \psi$, und jedes restliche ϕ_i ist aus $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$, oder ist logisches Axiom oder folgt mittels Modus Pones aus ϕ_j, ϕ_k mit $j, k < i$. Wir zeigen nun $ZF \vdash (\theta_1^A \wedge \ldots \wedge \theta_k^A) \rightarrow \phi_i^A$ durch Induktion über i.
Gilt $\phi_i \in \{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ dann ist alles klar.
Im Modus Pones Fall ist ϕ_j von der Form $\phi_k \rightarrow \phi_i$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt $ZF \vdash (\theta_1^A \wedge \ldots \wedge \theta_k^A) \rightarrow \phi_k^A$ und $ZF \vdash (\theta_1^A \wedge \ldots \wedge \theta_k^A) \rightarrow (\phi_k^A \rightarrow \phi_i^A)$. Aus der Tautologie $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ folgt $ZF \vdash (\theta_1^A \wedge \ldots \wedge \theta_k^A) \rightarrow \phi_i^A$.
Für den Fall der logischen Axiome beweist man $ZF \vdash \pi^A$ für alle Axiome π. Wir beweisen dies jedoch nur für das Substitutionsaxiom $\forall x \phi \rightarrow \phi(x/\tau)$, mit τ ein Term für den x frei in ϕ vorkommt, d.h. kein freies Vorkommen von x in ϕ liegt im Wirkungsbereich eines Quantors, der eine in τ vorkommende Variable bindet. Da wir in der Sprache $\{\in\}$ arbeiten, sind die einzigen Terme Variablen. Das Axiom reduziert sich also auf $\forall x \phi \rightarrow \phi(y)$, mit y frei in ϕ und wir müssen $ZF \vdash (\forall x \phi(x) \rightarrow \phi(y))^A$ bzw. ihren universellen Abschluss relativiert auf A beweisen. Also ist $ZF \vdash (\forall y (\mu(y) \rightarrow ((\forall x (\mu(x) \rightarrow \phi^A(x))) \rightarrow \phi^A(y)))$ zu zeigen.
Wir übernehmen aus [3] (1.4.27), dass mit $ZF \vdash \psi$ auch $ZF \vdash \forall x \psi$ gilt, damit reduziert sich unsere Aufgabe darauf, $ZF \vdash (\mu(y) \rightarrow ((\forall x (\mu(x) \rightarrow \phi^A(x))) \rightarrow \phi^A(y))$ nachzuweisen. Dies gelingt uns jedoch, da laut Substitutionsaxiom $ZF \vdash \forall x (\mu(x) \rightarrow \phi^A(x)) \rightarrow (\mu(y) \rightarrow \phi^A(y))$ gilt und $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ eine Tautolgie ist. (Wir wählen $A = \forall x (\mu(x) \rightarrow \phi^A(x))$, $B = \mu(y)$ und $C = \phi^A(y)$.)

□

Unser Konsistenzbeweis folgt nun aus folgendem Korollar.

Korollar 3.3. *Sei A eine relative Interpretation von $\{\in\}$ in ZF. Sei Γ eine Menge von $\{\in\}$-Aussagen und es gelte $ZF \vdash \theta^A$ für alle Aussagen aus Γ. Dann können wir auf $Con(ZF) \rightarrow Con(\Gamma)$ schließen.*

Beweis. Angenommen es gäbe einen Beweis eines Widerspruches in Γ, also $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\} \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ mit $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\} \subset \Gamma$. Laut unserem Lemma gilt dank Modus Pones $ZF \vdash (\psi \wedge \neg\psi)^A$ was definitionsgemäß gleichbedeutend mit $ZF \vdash \psi^A \wedge \neg\psi^A$ ist. Somit wäre schon ZF inkonsistent. □

Da wir auch mit Relationssymbolen und Funktionssymbolen die wir über Definition eingeführt haben arbeiten, soll noch erklärt werden wie ihre Relativierung funktioniert.

Definition 3.4. Sei p ein n-stelliges, über Definition eingeführtes Relationssymobl. Die Definition soll über $\forall x_1 \ldots \forall x_n (p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \ldots, x_n))$ erfolgen. Dann ist $p^A(x_1, \ldots, x_n)$ die Formel $\theta^A(x_1, \ldots, x_n)$. Um eine Formel ϕ die p verwendet zu relativieren, ersetzen wir p in ϕ durch p^A, bzw. schreiben wir sie zunächst in äquivalenter Form $\hat{\phi}$ ohne p und relativieren diese.
Sei f ein n-stelliges Funktionssymbol und $\forall x_1 \ldots \forall x_n \theta(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ die Definition mittels der es eingeführt wird. Wir nehmen an, dass wir $(\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! y \theta(x_1, \ldots, x_n, y))^A$ beweisen können. Dann soll, für alle $x_1, \ldots, x_n \in A$, $f^A(x_1, \ldots, x_n)$ das eindeutige $y \in A$ bezeichnen, das $\theta(x_1, \ldots, x_n, y))^A$ erfüllt. Um nun die Relativierung ϕ^A einer Formel ϕ zu erhalten in der f vorkommt, verwenden wir die zu ϕ äquivalente Formel $\hat{\phi}$ die f nicht verwendet und relativieren diese.
Wir sagen, dass f absolut für A ist, falls $f^A(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in A$.

4 Ergebnisse aus der Mengenlehre

Aus [1] übernehmen wir folgende Resultate. Es sei angemerkt, das ZF für sie alle mehr als ausreichend ist.

4.1 Transfinite Rekursion und Induktion

Satz 4.1. *(Transfinite Induktion auf fundierten Relationen) Sei R eine fundierte und mengenartige Relation auf einer Klasse A, dann hat jede nicht-leere Unterklasse X von A ein R-kleinstes Element.*

Auf Ord können wir dank dieses Satzes Induktionsbeweise führen. Dazu bilden wir die Klasse aller Mengen aus Ord die eine gewisse Bedingung nicht erfüllen, wählen aus dieser Klasse eine R-kleinste Menge und führen für diese einen Widerspruch herbei.
D.h. also wenn wir nach dem typischen Schema vorgehen, dass wir Induktionsanfang und Induktionsschritte beweisen ist der Widerspruch dadurch gegeben, dass es keine Ordinalzahl geben kann, die unsere Aussage nicht erfüllt.

Satz 4.2. *(Satz über die transfinite Rekursion) Sei R eine fundierte und mengenartige Relation auf der Klasse A. Weiters gelte $\forall x, s \exists! y \phi(x, s, y)$. Wir definieren $G(x, s)$ als das eindeutige y, sodass $\phi(x, s, y)$ gilt. Dann existiert eine Formel ψ für die folgendes beweisbar ist:*

1. *$\forall x \exists! y \psi(x, y)$. D.h. ψ definiert eine Funktion F, für die wir $F(x)$ als das eindeutige y definieren, sodass $\psi(x, y)$ gilt.*
2. *$\forall a \in A(F(a) = G(a, F|_{ext_R(a)}))$.*

In unseren Anwendungen des Satzes beschränken wir uns meist auf $A = Ord$ mit der Wohlordnung $\in$. Wir können somit eine Funktion, nur durch Angabe von Vorschriften wie aus $\alpha \in Ord$ und $F|_{ext_R(\alpha)}$ die Funktionswerte $F(\alpha)$ bestimmt werden, definieren. Die Vorschriften müssen jedoch stets zu einer eindeutig bestimmten Menge führen, damit $\forall x, s \exists! y \phi(x, s, y)$ gilt. Dass dies laut Voraussetzung für alle Mengen gültig sein muss und nicht nur für $x \in Ord$ und s, wo s eine Funktion mit Definitionsbereich α ist, stellt kein Problem dar, denn $G(x, s)$ kann immer der Wert $\emptyset$ zugeordnet werden.

4.2 Der transitive Kollaps

Definition 4.3. Wir nennen eine Relation R extensionell auf A gdw. gilt

$$\forall x, y \in A(ext_R(x) = ext_R(y)).$$

Im Speziellen trifft diese Definition, wegen des Extensionalitätsaxioms, im Fall transitiver Klassen A auf $\in$ zu.
Mittels transfiniter Rekursion kann man den transitiven Kollaps für eine Relation R definieren.

Definition 4.4. Angenommen R ist fundiert und mengenartig auf der Klasse A. Wir definieren rekursiv, für $y \in A$, den transitiven Kollaps $\pi(y)$ als,

$$\pi(y) = \pi_{(A;R)}(y) = \{\pi(x) : x \in ext_R(y)\}$$

Für den transitiven Kollaps gilt folgender Satz.

Satz 4.5. *Angenommen R ist fundiert und mengenartig auf der Klasse A. Es gilt:*

1. *das Bild von A unter dem transitiven Kollaps $\pi''A$ ist transitiv.*
2. *der transitive Kollaps π ist injektiv gdw. A extensionell ist. Insbesondere ist dann π ein Isomorphismus von (A, R) auf $(\pi''A, \in)$.*
3. *Angenommen $\in$ ist fundiert und extensionell auf A. Sei $T \subset A$ transitiv. Dann gilt $\pi(y) = y$ für alle $y \in T$*

Da wir in ZF arbeiten ist für uns $\in$ stets fundiert.

4.3 Ordinal- und Kardinalzahlen

Wir fassen im Folgenden einige Ergebnisse über Ordinal- bzw. Kardinalzahlen zusammen. Ihre Beweise können in [2] bzw. [1] gefunden werden. Fast alle Resultate gelten, solange ZF gilt, ist an einer Stelle das Auswahlaxiom nötig, so bemerken wir dies extra.
Für Ordinalzahlen verwenden wir im späteren Verlauf des Textes, wie in der Literatur üblich, griechische Kleinbuchstaben, vorallem α, β, γ und δ.

4.3.1 Ordinalzahlen

Definition 4.6. Eine Menge u ist transitiv, falls $\forall v \in u(v \subset u)$ gilt.

Definition 4.7. Wir nennen eine Menge α eine von Neumann Ordinalzahl, kurz Ordinalzahl, falls α eine transitive, durch $\in$ wohlgeordnete Menge ist.

Da uns das Fundierungsaxiom die Fundiertheit jeder Menge und das Aussonderungschema die Mengenartigkeit von $\in$ zusichern, folgt leicht:

Lemma 4.8. *α ist eine Ordinalzahl gdw. α transitiv ist und $\in$ eine lineare Ordnung auf α ist.*

Wir fassen einige der wichtigsten Erkenntnisse über Ordinalzahlen im folgenden Satz zusammen.

Satz 4.9.

1. *$0 = \emptyset$ ist eine Ordinalzahl.*
2. *Die Kollektion aller Ordinalzahlen, wir schreiben hierfür Ord, ist eine echte, transitive Klasse. D.h. ist $\alpha \in Ord$ und $u \in \alpha$, dann ist auch $u \in Ord$.*
3. *Ord wird durch $\in$ wohlgeordnet.*
4. *Ist X eine transitive Teilmenge von Ord, so gilt $X \in Ord$.*
5. *Falls $\alpha, \beta \in Ord$, so auch $\alpha \cup \beta = max(\alpha, \beta)$ und $\alpha \cap \beta = min(\alpha, \beta)$.*
6. *Falls X eine nicht-leere Teilmenge von Ord ist, dann auch $\bigcap X = min(X)$ und $\bigcup X = sup(X)$.*
7. *Ist $\alpha \in Ord$ dann auch $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. Wir nennen $S(\alpha)$ die Nachfolgerordinalzahl von α.*

Da Ord von $\in$ wohlgeordnet wird, schreiben wir für $\alpha \in \beta$ auch $\alpha < \beta$, $\alpha \leq \beta$ heißt $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$.
Wir definieren noch einige spezielle Bezeichnungen für Ordinalzahlen.

Definition 4.10. Eine Ordinalzahl α heißt:

- eine Nachfolgerordinalzahl, falls es eine Ordinalzahl γ gibt mit $\alpha = S(\gamma)$.
- eine Limesordinalzahl, falls $\alpha \neq 0$ und keine Nachfolgerordinalzahl ist.
- eine natürliche Zahl, falls jedes $\beta \leq \alpha$ entweder 0 oder Nachfolgerordinalzahl ist.

Lemma 4.11. *Zwei Ordinalzahlen α, β sind genau dann zueinander ordnungsisomorph, wenn $\alpha = \beta$ gilt.*

Satz 4.12. *Falls R eine Wohlordnung auf A ist, dann existiert eine eindeutige Ordinalzahl α, sodass $(A; R) \cong (\alpha; \in)$ gilt.*

Definition 4.13. Falls R eine Wohlordnung auf A ist, dann ist der Ordnungstyp $type(A; R)$ von $(A; R)$ die eindeutige Ordinalzahl α für die, $(A; R) \cong (\alpha; \in)$ gilt.

Über den Ordnungsytp einer Wohlordnung auf einer Menge können wir eine Arithmetik auf den Ordinalzahlen definieren.

Definition 4.14. $\alpha \cdot \beta = type(\beta \times \alpha)$ und $\alpha + \beta = type(\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta)$. Wobei in beiden Fällen die lexikographische Ordnung verwendet wird.

Wir sehen schon hier, dass es also über ω hinausgehende Ordinalzahlen gibt.

4.3.2 Kardinalzahlen und GCH

Definition 4.15. Eine (von Neumann) Kardinalzahl ist eine Ordinalzahl α für die gilt; ist $\beta < \alpha$ so existiert keine bijektive Funktion $F : \alpha \to \beta$.
D.h. für eine Kardinalzahl α existiert keine Bijektion auf eine kleinere Ordinalzahl.

Kardinalzahlen werden als Maß für die Größe von wohlordnungsbaren Mengen verwendet.

Definition 4.16. Eine Menge A kann wohlgeordnet werden gdw. es eine Ordnung R gibt die A wohlordnet.

Für solche Mengen verwenden wir folgendes Lemma, um zu einer Definition ihrer Kardinalitäten zu gelangen.

Lemma 4.17. *A kann genau dann vom Ordnungstyp α wohlgeordnet werden, wenn es eine Bijektion $F : A \to \alpha$ gibt.*

Somit bietet sich folgende Definition an.

Definition 4.18. Kann A wohlgeordnet werden, dann definieren wir $|A|$, die Kardinalität von A, als die kleinste Ordinalzahl α, sodass eine Bijektion $F : A \to \alpha$ existiert.

Gilt das Auswahlaxiom, so können wir also jeder Menge eine Kardinalität zuordnen. In diesem Fall sieht man aus folgendem Satz, dass es beliebig große Kardinalzahlen gibt.

Satz 4.19 (Cantor)**.** *Es gibt keine Bijektion zwischen einer Menge A und ihrer Potenzmenge $P(A)$.*
D.h. $P(A)$ und A können nicht die gleiche Kardinalität besitzen.

Beweis. Angenommen es gäbe eine Bijektion $f : A \to P(A)$ bijektiv, dann sei $D = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Nun gibt es ein $b \in A$, sodass $f(b) = D$.
Wir bemerken nun, dass wenn $b \in D$, dann nach Definition $b \notin f(b) = D$.
Umgekehrt gilt, dass wenn $b \notin D = f(b)$, dann wieder nach Definition $b \in D$, also $b \in D \leftrightarrow b \notin D$.
Widerspruch. □

Es ist klar, nach folgendem Satz, dass die Kardinalität von $P(A)$ größer ist, als jene von A. Ansonsten gäbe es ein injektives $f : P(A) \to A$ und klarerweise ein injektives $g : A \to P(A)$, woraus also die Existenz einer Bijektion zwischen $P(A)$ und A folgen würde.

Satz 4.20 (Satz von Schröder-Bernstein)**.** *A, B Mengen. Es gilt, es existiert eine Bijektion zwischen A und B gdw. wenn es eine Injektion von A nach B gibt und umgekehrt.*

Wir definieren eine Aufzählung der überabzählbaren Kardinalzahlen. Hierbei steht α^+ für die kleinste größere Kardinalzahl als α (Ordinalzahl).

Definition 4.21. Wir definieren $\aleph_\xi = \omega_\xi$.

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$.
- $\aleph_{\xi+1} = \omega_{\xi+1} = (\aleph_\xi)^+$
- $\aleph_\gamma = \omega_\gamma = sup\{\aleph_\xi : \xi < \gamma\}$

Die Konvention ist, dass man $\aleph_\xi$ verwendet, wenn über Kardinalitäten gesprochen wird und ω_ξ, wenn von Ordnungstypen die Rede ist.

4.3.3 Kontinuumshypothese

Die allgemeine Kontinuumshypothese ist nun die negative Antwortmöglichkeit auf die Frage, ob es zwischen der Kardinalität einer überabzählbaren Kardinalzahl und der Kardinalität ihrer Potenzmenge weitere Kardinalzahlen gibt. Also

Definition 4.22. Die allgemeine Kontinuumshypothese (GCH) ist die Behauptung, dass

$$\forall \alpha \in Ord\, |P(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$$

gilt.

4.4 Modelltheorie in ZF

Wie in [1] Kapitel I.15 nachzulesen ist kann man die Modelltheorie für abzählbare Sprachen in ZF entwickeln. Wir wollen hier nur die Ergebnisse zusammenfassen, die wir im weiteren Verlauf des Textes benötigen.
Wir übernehmen zuerst Folgendes.

Bemerkung Man kann die Eigenschaft $\mathcal{A} \models \phi[\sigma]$, wobei $\mathcal{A}$ ein Modell einer Sprache $\mathcal{L}$, ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel und σ eine Belegung von ϕ ist als Eigenschaft über Mengen $\mathcal{A}$, ϕ und σ definieren. D.h. es existiert eine $\{\in\}$-Formel die in ZF bewiesen werden kann, sofern das Modell $\mathcal{A}$ die Formel ϕ unter der Belegung σ glaubt.
Analoges gilt für $\mathcal{A} \models \phi$ mit ϕ eine Aussage.

Wir führen folgende Notation ein

Definition 4.23. Sei $\mathcal{A}$ ein Modell der Sprache $\mathcal{L}$ und ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel mit freien Variablen in $x_1, \ldots x_n$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$, dann bedeuten $\mathcal{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$ und $A \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$ und $(\phi(a_1, \ldots, a_n))^A$ alle dasselbe.

Definition 4.24. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Modelle der Sprache $\mathcal{L}$. Dann schreiben wir $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, wenn für die Universen $A \subset B$ gilt und die Interpretation der Funktionssymbole und Relationssymbole des Modells $\mathcal{B}$ eingeschränkt auf A jenen des Modells $\mathcal{A}$ entsprechen.
Man nennt $\mathcal{A}$ ein Submodell von $\mathcal{B}$. Bzw. $\mathcal{B}$ eine Erweiterung von $\mathcal{A}$.

Definition 4.25. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Modelle der Sprache $\mathcal{L}$. Weiters sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
Wir schreiben $\mathcal{A} \prec_\phi \mathcal{B}$, wenn gilt $\mathcal{A} \models \phi[\sigma]$ gdw. $\mathcal{B} \models \phi[\sigma]$ für jede Belegung σ für ϕ in A.
$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ heißt $\mathcal{A} \models \phi[\sigma]$ für alle ϕ.

Die weiteren für uns wichtigen Resultate sind.

Satz 4.26. *(Löwenheim-Skolem-Tarski abwärts) Gelte AC. Sei $\mathcal{B}$ ein beliebiges $\mathcal{L}$-Modell. Zu jedem beliebigen aber fixen κ mit $max(|\mathcal{L}|, \aleph_0) \leq \kappa \leq |B|$, und jedem beliebigen aber fixen $S \subset B$ mit $|S| \leq \kappa$, existiert ein $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, sodass $S \subset A$ und $|A| \leq \kappa$.*

Satz 4.27. *Sei Γ eine Theorie von $\mathcal{L}$. Dann gilt,*

1. *$Con(\Gamma)$ gdw. ein $\mathcal{A}$ existiert, sodass $\mathcal{A} \models \Gamma$.*

2. *Für jeden $\mathcal{L}$-Satz ϕ gilt, $\Gamma \vdash \phi$ gdw. ϕ von jedem $\mathcal{A}$ geglaubt wird, das $\mathcal{A} \models \Gamma$ erfüllt.*

4.5 Definierbare Mengen

Dadurch, dass wir $\models$ in ZF beschreiben können, gelingt es uns, die definierbaren Mengen über ein Modell $\mathcal{A}$ zu beschreiben. Da wir im Rahmen dieser Arbeit jedoch nur an Modellen der Sprache $\{\in\}$ interessiert sind, betrachten wir nur diesen Fall genauer. Wir verwenden die Notation und übernehmen aus [2].

Definition 4.28. Sei M eine Menge, zusammen mit der von V (dem Mengenuniversum von ZF) vererbten $\in$-Relation bildet M eine $\{\in\}$-Modell $(M, \in)$. Wir sagen eine Menge X ist über dem Modell $(M, \in)$ definierbar, falls es $a_1, \ldots, a_n \in M$ gibt sodass

$$X = \{x \in M : (M, \in) \models \phi[x, a_1, \ldots, a_n]\}$$

gilt.
Die Menge

$$def(M) = \{X \subset M : X \text{ ist definierbar über } (M, \in)\}$$

nennen wir die Menge der definierbaren Mengen über $(M, \in)$.

Später für uns nützliche Eigenschaften im Beweis, dass das Gödelsche Mengenuinversum alle Axiome von ZF erfüllt, sind im folgenden Lemma aufgelistet.

Lemma 4.29. *1. $M \in def(M)$,*

2. $def(M) \subset P(M)$,

3. $M \subset def(M)$, falls M transitiv ist.

Beweis. 1. Betrachten $x = x$ als definierende Formel.

2. Ist klar.

3. $M \subset def(M)$ gilt, denn mit $a \in M$ ist vermöge der Formel $x \in a$ mit Parameter a auch $a \in def(M)$.

□

4.6 $A \prec_\phi B$ für Klassen und Absolutheit

Für Klassen A können wir in ZF $A \models \phi$ nicht als Eigenschaft der Klasse A und der Formel ϕ definieren [1] und dementsprechend auch nicht $A \prec_\phi B$, mit A und B Klassen, im bisherigen Sinn. Wir behelfen uns jedoch mit der Relativierung ϕ^A der Formel ϕ und definieren,

Definition 4.30. Seien A und B Klassen mit $A \subset B$ und ϕ eine $\{\in\}$-Formel. Wir sagen $A \prec_\phi B$ falls

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in A(\phi^A \leftrightarrow \phi^B)$$

in ZF beweisbar ist, wobei alle freien Variablen von ϕ in $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen.

Wir definiern nun was es für eine Formel ϕ heißt absolut zu sein.

Definition 4.31 (Absolutheit)**.**
Seien A, B Mengen. ϕ ist absolut für A, B gdw. $A \prec_\phi B$.
Sei A eine Klasse. ϕ ist absolut für A gdw. $A \prec_\phi V$, mit V das Mengenuniversum, im Sinne der vorangegangenen Definition.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass für Mengenmodelle die beiden Interpretationen von $\phi^A(a)$, als $A \models \phi[a]$ und als universeller Abschluss über A, äquivalent sind (siehe [2] Kapitel 12).

4.7 Der Reflektionssatz und das Kollektionsprinzip

Wir übernehmen aus [1] II.5 folgenden Satz.

Satz 4.32 (Reflektionssatz)**.** *Sei $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ eine Liste von $\{\in\}$-Formeln. Angenommen B ist eine nicht-leere Klasse und A_ξ für jedes $\xi \in Ord$ eine Menge, wobei gelten soll:*

1. $\xi < \eta \to A_\xi \subset A_\eta$.
2. $A_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} A_\xi$ *für Limesordinalzahlen* η.
3. $B = \bigcup_{\xi \in Ord} A_\xi$.

Dann gilt $\forall \xi \exists \eta > \xi (A_\eta \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{i<n} (A_\eta \prec_{\phi_i} B) \wedge$ *η ist eine Limesordinalzahl*$)$.

Und aus [2] Kapitel 6 folgendes Lemma.

Lemma 4.33 (Kollektionsprinzip)**.** *Es gilt*

$$\forall X \exists Y (\forall x \in X (\exists y \phi(x, y, p) \to \exists y \in Y \phi(x, y, p)))$$

mit p Parameter.

5 Δ_0-Formeln

Wir beschränken uns bei der Definition von Δ_0-Formeln auf den Fall der Sprache $\{\in\}$. Formeln mit Funktionssymbolen und Relationssymbolen die durch Erweiterung über Definitionen von $\{\in\}$ entstehen, können, wie besprochen, auf Formeln über $\{\in\}$ zurückgeführt werden.

Definition 5.1 (Δ_0-Formeln)**.** Sei ϕ eine Formel der Sprache $\{\in\}$.
Wir nennen ϕ eine Δ_0-Formel der Sprache $\{\in\}$, wenn gilt:

1. ϕ ist eine atomare Formel.
2. ϕ ist von der Form $\neg\phi$, $\chi \wedge \psi$, $\chi \vee \psi$, $\chi \to \psi$ oder $\chi \leftrightarrow \psi$, wobei χ und ψ jeweils Δ_0-Formeln sind.
3. ϕ ist von der Form $\exists x \in y\ \psi$ bzw. $\forall x \in y\ \psi$, mit ψ eine Δ_0-Formel, x und y Variablen.

Hier steht $\exists x \in y\ \psi$ für $\exists x (x \in y \wedge \psi)$ und $\forall x \in y\ \psi$ für $\forall x (x \in y \to \psi)$.
Für uns wird folgendes Lemma wichtig sein. Mit ihm werden wir beweisen können, dass L die Axiome von ZF erfüllt und die Absolutheit von verschiedenen Funktionen zeigen können.

Lemma 5.2. *Sei M eine transitive Klasse und ϕ eine Δ_0-Formel, dann gilt*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in M (\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt per Induktion über den Aufbau von Δ_0-Formeln.
Die atomaren Fälle $x = y$ und $x \in y$ sind klar.
Die Fälle $\neg\phi$, $\chi \wedge \psi$, $\chi \vee \psi$, $\chi \rightarrow \psi$ oder $\chi \leftrightarrow \psi$ sind ebenso klar. Für $\phi \wedge \psi$ betrachten wir zum Beispiel die Tautologie $(\phi \rightarrow \chi \wedge \psi \rightarrow \mu) \rightarrow (\phi \wedge \psi \rightarrow \chi \wedge \mu)$.
Sei also ϕ von der Form $\exists u \in x\ \psi(u,x)$, wobei wir eventuelle weitere Variablen nicht ausdrücklich schreiben. Sei $x \in M$.

- Es gelte ϕ^M, d.h. $(\exists u(u \in x \wedge \psi))^M$, was nichts anderes ist als $\exists u \in M(u \in x \wedge \psi^M)$. Wir wissen, dass $u \in x \subset M$, laut Transitivität von M, und $\psi^M(u,x)$, wegen der Validität von ϕ^M, gelten. Da wir nach Voraussetzung $\psi^M(u,x) \leftrightarrow \psi(u,x)$ für alle $u, x \in M$ haben, können wir auf $\psi(u,x)$ und damit auf $\exists u \in x\ \psi$ d.h. ϕ schließen.

- Nun gelte $\exists u \in x\psi(u,x)$ mit $x \in M$. Da M transitiv, haben wir $u \in M$, womit nach Voraussetzung für ψ die Formel $\exists u(u \in x \wedge \psi^M(u,x))$ d.h. $\exists u \in x\ \psi^M(u,x)$ erfüllt ist.

Der Fall für $\forall x \in y\ \psi$ folgt aus dem schon gezeigten wegen

$$\forall u(u \in x \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg\exists u(u \in x \wedge \neg\psi).$$

$\square$

Falls eine Eigenschaft durch eine Formel beschrieben wird die äquivalent zu einer Δ_0-Formel ist, so sagen wir, dass diese Eigenschaft Δ_0 ist. Die Gültigkeit der Äquivalenz ist vom verwendeten Axiomensystem abhängig.
Bei Funktionen die über Formeln definiert werden, ist die Existenz eines Bildes in einer transitiven Klasse M nicht durch die Gültigkeit der Äquivalenz garantiert. Um zum Beispiel zu zeigen, dass $x = \{u, v\}$ eine Δ_0-Formel ist, benötigt man nur das Extensionalitätsaxiom, die Existenz der Menge x benötigt jedoch zusätzlich, dass das Paaraxiom und das Aussonderungsschema in M gelten. Wir können jedoch sagen, dass wenn eine transitive Klasse x, u und v enthält, dann gilt $x = \{u, v\}$, sofern dies in V erfüllt ist, nach dem obigen Lemma in der Klasse.
Wir fassen im Folgenden einige nützliche Δ_0-Ausdrücke zusammen und nehmen stillschweigend ZF an.

Lemma 5.3. *Die folgenden Formeln sind Δ_0.*

1. $x = \{u, v\}$, $x = (u, v)$, *x ist leer*, $x \subset y$, *x ist transitiv, x ist eine Ordinalzahl, x ist eine Limesordinalzahl, x ist eine natürliche Zahl, x ist eine Nachfolgerordinalzahl und* $x = \omega$.
2. (a) $z \in dom(X)$, $z \in ran(X)$.
   (b) *Wenn ϕ eine Δ_0-Formel ist, so auch* $\forall z \in dom(X)\ \phi$, $\exists z \in dom(X)\ \phi$, $\forall z \in ran(X)\ \phi$ *und* $\exists z \in ran(X)\ \phi$.
3. $Z = X \times Y$, $Z = X - Y$, $Z = X \cap Y$, $Z = \bigcup X$, $Z = dom(X)$, $Z = ran(X)$.
4. *R ist eine Relation, f ist eine Funktion,* $y = f(x)$, $g = f|_X$.

Beweis. Wir werden hier nur einige Beispiele beweisen, der Rest kann in [2] gefunden werden.

1. $x = \{u, v\} \leftrightarrow u \in x \wedge v \in x \wedge (\forall w \in x(w = u \vee w = v))$
   Man kann anhand der Definition leicht nachprüfen, dass die rechte Seite Δ_0 ist.

$$x = (u, v) \leftrightarrow \exists w \in x \exists z \in x(w = \{u\} \vee z = \{u, v\}) \\ \wedge \forall w \in x(w = \{u\} \vee w = \{u, v\})$$

Wieder ergibt sich unter Betrachten der Definition und Ausnützen des vorigen Resultates, dass die rechte Seite Δ_0 ist.

Als Beispiel dafür wie Aussagen die in Worten abgefasst sind, als Δ_0-Formeln identifziert werden können, betrachten wir folgende Resultate.

x ist transitiv $\leftrightarrow \forall u \in x(u \subset x)$

x ist Ordinalzahl $\leftrightarrow x$ ist transitiv $\wedge \forall u \in x \forall v \in x(u \in v \vee v \in u \vee u = v)$

$\wedge \forall u \in x \forall v \in x \forall w \in x(u \in v \wedge v \in w \rightarrow u \in w)$

Hier drückt $\forall u \in x \forall v \in x(u \in v \vee v \in u \vee u = v)$ die geforderte Trichotomie der Ordnung die $\in$ auf den Ordinalzahlen iniziert aus und $\forall u \in x \forall v \in x \forall w \in x(u \in v \wedge v \in w \rightarrow u \in w)$ ihre Transitivität. Fundiertheit und Irreflexivität folgen allgemein für Mengen aus den Axiomen von ZF und müssen nicht extra erwähnt werden.
Ähnlich können wir nun auch mittels der Zusatzbedingung $\forall u \in x \exists v \in x(u \in v)$, was insbesondere bedeutet, dass x weder Nachfolgerordinalzahl noch leer ist, den Fall der Limesordinalzahlen behandeln.
Die restlichen Fälle ergeben sich ähnlich wie die besprochenen.

2. $z \in ran(X) \leftrightarrow \exists x \in X \exists u \in x \exists v \in u(x = (v, z))$
   Hier betrachten wir $x = (v, z) = \{\{v\}, \{v, z\}\}$, d.h. $u = \{v\}$ oder $u = \{v, z\}$
   $\exists z \in ran(X)\ \phi(z) \leftrightarrow \exists x \in X \exists u \in x \exists v, z \in u(x = (v, z) \wedge \phi(z))$
   Etwaige Variablen nebst y in ϕ wurden unterdrückt.
   Die weiteren Beweise sind ähnlich.

3. $Z = ran(X) \leftrightarrow \forall z \in Z(z \in ran(X)) \wedge \forall z \in ran(X)(z \in Z)$
   Für die weiteren Beweise sei auf [2] verwiesen.

4. R ist eine Relation $\leftrightarrow \forall x \in R \exists u \in dom(R) \exists v \in ran(R)\ x = (u, v)$
   f ist eine Funktion $\leftrightarrow f$ ist eine Relation$\wedge \forall x \in dom(f) \forall y, z \in ran(f)$
   $(\exists u, v \in f(u = (x, y) \wedge v = (x, z)) \rightarrow y = z)$
   $g = f|_X \leftrightarrow g$ ist eine Funktion $\wedge\, g \subset f \wedge \forall x \in dom(g)(x \in X)$
   $\wedge \forall x \in X(x \in dom(f) \rightarrow x \in dom(g))$
   $g \subset f$ sichert zu, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in dom(g) \subset dom(f)$ gilt, die letzten beiden Terme drücken die Bedingungen $dom(g) \subset X$ und $dom(f) \cap X \subset dom(g)$ aus.

□

6 Die Levy Hierarchie

Wir führen neben den Δ_0-Formeln noch eine Hierarchie von Formeln ein, die das Arbeiten mit bestimmten Eigenschaften (Funktionen, Relationen, Klassen, etc.) vereinfacht, besonders bei transitiven Modellen, die Σ_n- und Π_n-Formeln.
Wir sagen, dass eine Eigenschaft Σ_n oder Π_n ist, falls die sie definierende Formel äquivalent zu einer Σ_n- oder Π_n-Formel ist, d.h. für eine Klasse A, dass die Formel $\mu(x)$, die $x \in A$ beschreibt, eine Σ_n- bzw. Π_n-Formel ist.
Im Fall einer Funktion F sagen wir, dass F Σ_n oder Π_n ist, falls die Relation $y = F(x)$, d.h. $\phi_F(x, y)$ die F beschreibende Formel, Σ_n oder Π_n ist.
Wie bei Δ_0-Formeln hängt die Klassifikation einer Eigenschaft vom Axiomensystem ab indem

die Äquivalenz der Formeln bewiesen wird. Ohne es weiters extra zu erwähnen, setzen wir wieder ZF voraus.

Definition 6.1. Eine Formel heißt Σ_0- oder Π_0-Formel, falls sie eine Δ_0-Formel ist.
Eine Formel heißt Σ_{n+1}-Formel, falls sie von der Form $\exists x \phi$ mit ϕ eine Π_n-Formel ist.
Eine Formel heißt Π_{n+1}-Formel, falls sie von der Form $\forall x \phi$ mit ϕ eine Σ_n-Formel ist.
Eine Formel heißt Δ_n-Formel, falls sie sowohl Σ_n-Formel als auch Π_n-Formel ist.

Es folgen einige Beispiele.

Lemma 6.2. *Sei $n \geq 1$.*

1. *Falls P, Q jeweils Σ_n-Eigenschaften sind, so auch $\exists x P, P \wedge Q, P \vee Q, \exists u \in x\ P$ und $\forall u \in x\ P$.*
2. *Falls P, Q jeweils Π_n-Eigenschaften sind, so auch $\forall x P, P \wedge Q, P \vee Q, \exists u \in x\ P$ und $\forall u \in x\ P$.*
3. *Falls P eine Σ_n-Eigenschaft ist, so gilt $\neg P$ ist Π_n, und falls P eine Π_n-Eigenschaft ist, so gilt $\neg P$ ist Σ_n.*
4. *Gilt, P ist Π_n und Q ist Σ_n, dann gilt $P \to Q$ ist Σ_n. Gilt, P ist Σ_n und Q ist Π_n, dann gilt $P \to Q$ ist Π_n.*
5. *Gilt P und Q sind Δ_0, so gilt Selbiges für $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \to Q, P \leftrightarrow Q, \forall u \in x\ P, \exists u \in x\ P$*
6. *Ist F eine Σ_n-Funktion, dann ist dom(F) eine Σ_n-Klasse.*
7. *Ist F eine Σ_n-Funktion und dom(F) ist Δ_n, dann ist F ebenso Δ_n.*
8. *Sind F und G jeweils Σ_n-Funktionen, so auch $F \circ G$.*
9. *Ist F eine Σ_n-Funktion und P eine Σ_n-Eigenschaft, dann ist $P(F(x))$ ebenso Σ_n.*

Beweis. Die Beweise laufen über Induktion nach n. Zum bequemeren Schreiben beweisen wir 1-5 für den Schritt n+1, den Rest für n.

1. Sei

$$P(x) \leftrightarrow \exists z \phi(z, x, \dots)$$
$$Q(x) \leftrightarrow \exists y \psi(y, x, \dots)).$$

wobei gilt, ϕ und ψ beide Π_n-Formeln sind, d.h P und Q sind Σ_{n+1}.

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \exists x P(x) &\leftrightarrow \exists x \exists z \phi(z, x \dots) \\ &\leftrightarrow \exists v \exists w \in v \exists x, z \in w (v = (x, z) \wedge \phi(z, x, \dots) \end{aligned}$$

$v = (x, z)$ ist als Δ_0-Formel auch Π_n-Formel (bzw. Σ_n-Formel), wir können nämlich nach belieben Quantoren über Variablen hinzufügen, die nicht frei in der Formel vorkommen. Damit ist nach Induktionsvoraussetzung $\exists w \in v \exists x, z \in w (v = (x, z) \wedge \phi(z, x, \dots))$ ebenso

wie ϕ eine Π_n-Formel, $\exists xP$ damit Σ_{n+1}.
Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned} P(x,\ldots) \wedge Q(x,\ldots) &\leftrightarrow \exists z \exists y(\phi(z,x,\ldots) \wedge \psi(y,x,\ldots) \\ P(x,\ldots) \vee Q(x,\ldots) &\leftrightarrow \exists z \exists y(\phi(z,x,\ldots) \vee \psi(y,x,\ldots) \\ \exists u \in x\ P(u,\ldots) &\leftrightarrow \exists z \exists u(u \in x \wedge \phi(z,u,\ldots) \end{aligned}$$

alle Σ_{n+1} sind.
Um zu zeigen, dass $\forall u \in x\ P$ ebenso Σ_{n+1} ist, verwenden wir das Kollektionsprinzip. Es gilt;

$$\begin{aligned} \forall u \in x\ P(u,\ldots) &\leftrightarrow \forall u \in x \exists z \phi(z,u,\ldots) \\ &\leftrightarrow \exists y \forall u \in x \exists z \in y\ \phi(z,u,\ldots) \end{aligned}$$

nach dem schon bewiesenen ist die rechte Seite Σ_{n+1}.

2. folgt direkt aus 1 und 3 ($\forall x\phi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi$).

3. $$\begin{aligned} \neg\exists z\phi(z,x,\ldots) &\leftrightarrow \forall z\neg\phi(z,x,\ldots) \\ \neg\forall z\phi(z,x,\ldots) &\leftrightarrow \exists z\neg\phi(z,x,\ldots \end{aligned}$$

   Laut Induktionsannahme gilt, dass wenn ϕ eine $\Sigma_n(\Pi_n)$-Formel ist, dann ist $\neg\phi$ eine $\Pi_n(\Sigma_n)$-Formel.

4. Es gilt $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$, somit folgen die Aussagen dank 1-3.

5. Folgt aus 1-4.

6. $$x \in dom(F) \leftrightarrow \exists y\ y = F(x)$$

   $y = F(x)$ ist nach Definition eine Σ_n Funktion, nach 1 gilt 6.

7. Es gilt:
   $$y = F(x) \leftrightarrow x \in dom(F) \wedge \forall z(z = F(x) \to y = z)$$

   Da $dom(F)$ eine Δ_n-Formel ist, ist sie auch Π_n, $z = F(x)$ ist Σ_n und $y = z$ ist als Δ_0-Formel auch Π_n. Somit ist die rechte Seite nach 2 und 4 also Π_n.

8. $$y = F(G(x)) \leftrightarrow \exists z(z = G(x) \wedge y = F(z))$$

9. $$P(F(x)) \leftrightarrow \exists y(y = F(x) \wedge P(y))$$

$\square$

Lemma 6.3. *Seien $n \geq 1$, G eine Σ_n-Funktion über V und F definiert über transfinite Rekursion auf den Ordinalzahlen mit:*

$$F(\alpha) = G(F|_\alpha)$$

Dann gilt, F ist eine Δ_n-Funktion über den Ordinalzahlen.

Beweis. Die Ordinalzahlen sind eine Δ_0-Klasse, somit auch eine Δ_n-Klasse, es reicht nach 7 von Lemma 6.2 zu zeigen, dass F eine Σ_n-Funktion auf Ord ist. Es gilt:

$$y = F(\alpha) \leftrightarrow \exists f(f \text{ ist eine Funktion} \wedge dom(f) = \alpha \wedge \forall \xi \in \alpha(f(\xi) = G(f|_\xi)) \wedge y = G(f))$$

»f ist eine Funktion« und $dom(f) = \alpha$ entsprechen Δ_0-Formeln, $y = G(f)$ ist nach Voraussetzung Σ_n und es gilt

$$f(\xi) = G(f|_\xi) \leftrightarrow \exists s \exists y \in ran(f)(s = f|_\xi \wedge y = f(\xi) \wedge y = G(s))$$

Da $\exists y \in ran(f)\phi \leftrightarrow \exists s \in f \exists t \in s \exists x, y \in t(s = (x, y) \wedge \phi)$ gilt, sehen wir, dass mit ϕ eine Σ_n-Formel auch $\exists y \in ran(f)\phi$ eine Σ_n-Formel ist, womit nun alles gezeigt ist, da $y = G(s)$ nach Voraussetzung Σ_n ist. □

7 Gödeloperationen

Definition 7.1. Die folgenden Funktionen werden als Gödeloperationen bezeichnet.

$$\begin{aligned}
G_1(X, Y) &= \{X, Y\} \\
G_2(X, Y) &= X \times Y \\
G_3(X, Y) &= \epsilon(X, Y) = \{(u, v) : u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\} \\
G_4(X, Y) &= X - Y \\
G_5(X, Y) &= X \cap Y \\
G_6(X) &= \bigcup X \\
G_7(X) &= dom(X) \\
G_8(X) &= \{(u, v) : (v, u) \in X\} \\
G_9(X) &= \{(u, v, w) : (u, w, v) \in X\} \\
G_{10}(X) &= \{(u, v, w) : (v, w, u) \in X\}
\end{aligned}$$

Das Aussonderungsschema sichert uns zu, dass wir aus jeder Menge x die Elemente aussondern können, welche eine bestimmte Formel $\phi(y)$ erfüllen. Wie sich herausstellt, kann diese Aussonderung für Δ_0-Formeln durch eine endliche Kombination von Gödeloperationen beschrieben werden.

Satz 7.2 (Gödelscher Normalformensatz)**.** *Sei $\phi(u_1, \ldots, u_n)$ eine Δ_0-Formel, dann existiert eine Komposition G der Gödeloperationen, sodass für alle $X_1, \ldots, X_n$ gilt*

$$G(X_1, \ldots, X_n) = \{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1, \ldots, u_n \in X_n \text{ und } \phi(u_1, \ldots, u_n)\}.$$

Beweis. Die Aussage des Satzes wird mittels Induktion über den Aufbau von Δ_0-Formeln bewiesen. Wie in [2] angegeben können wir uns auf Formeln folgender Form beschränken:

1. in ϕ kommen nur die logischen Symbole $\neg, \wedge$ und $\exists$ vor.
2. $=$ kommt nicht vor, $x = y$ wird durch $\forall u \in x\ (u \in y) \wedge \forall u \in y\ (u \in x)$ ersetzt.
3. $\in$ kommt nur in der Form $u_i \in u_j$ mit $i \neq j$ vor, $x \in x$ wird durch $\exists u \in x\ (u = x)$ ersetzt.
4. $\exists$ kommt nur in der Form
$$\exists u_{m+1} \in u_i\ \psi(u_1, \ldots, u_{m+1})$$
mit $i \leq m$ vor. Ggf. kann die Variable, die gebunden wird, umbennant werden.

Die Schreibweise $\phi(u_1, \ldots, u_n)$ bedeutet hier, dass alle freien Variablen von ϕ in der Liste der Argumente vorkommen. D.h. $\phi(u_1, \ldots, u_5) = u_4 \in u_5$ und $\phi(u_1, \ldots, u_6) = u_4 \in u_5$ sind zwei echte unterschiedliche Instanzen von Formeln, die zu unterschiedlichen Gödeloperationen führen. Dementsprechend muss bei der Induktion für den atomaren Fall auch über die Anzahl der Argumente induziert werden, da aber keine Gleichheitszeichen in den Formeln vorkommen gibt es nur den Fall $u_i \in u_j$. Die Beweise für diesen sind nicht schwer, in ihrer Vollständigkeit jedoch umfangreich. Deshalb werden wir hier nur den letzten Teil des Beweises, den Fall für das Vorkommen des Existenzquantors, vorführen. Der ausführliche Beweis kann in [2] gefunden werden.

Wir betrachten also eine Formel $\phi(u_1, \ldots, u_n)$ der Form $\exists(u_{n+1} \in u_i)\psi(u_1, \ldots, u_{n+1})$. Wir wissen, dass die Formel $\psi(u_1, \ldots, u_{n+1}) \wedge u_{n+1} \in u_i$, wir bezeichnen sie mit $\chi(u_1, \ldots, u_{n+1})$, weniger komplex ist als ϕ, damit gilt für sie die Induktionsannahme. D.h. es existiert eine Komposition G von Gödeloperationen mit;

$$G(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \{(u_1, \ldots, u_{n+1}) : u_1 \in X_1, \ldots, u_{n+1} \in X_{n+1} \text{ und } \chi(u_1, \ldots, u_{n+1})\} \tag{1}$$

für alle $X_1, \ldots, X_{n+1}$.
Wir verwenden nun die Abkürzungen $u = (u_1, \ldots, u_n)$ und $X = X_1 \times \ldots \times X_n$. Es gilt für alle $u \in X$:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &\leftrightarrow \exists v \in u_i\ \psi(u, v) \\
&\leftrightarrow \exists v(v \in u_i \wedge \psi(u, v) \wedge v \in \bigcup X_i) \\
&\leftrightarrow u \in dom\{(u, v) \in X \times \bigcup X_i : \chi(u, v)\} \\
&\leftrightarrow (u_1, \ldots, u_n) \in dom\{(u_1, \ldots, u_n, v) \in X_1 \times \ldots \times X_n \times \bigcup X_i : \chi(u_1, \ldots, u_n, v)\} \\
&\leftrightarrow (u_1, \ldots, u_n) \in dom(G(X_1, \ldots, X_n, \bigcup X_i)).
\end{aligned}$$

Die erste Implikation ist die Definition von ϕ, die Zweite gilt, da hier lediglich $\exists v \in u_i \ldots$ als $\exists v(v \in u_i \wedge \ldots)$ umgeschrieben wird und $v \in \bigcup X_i$ klar ist, da $v \in u_i \in X_i$ gilt. Die dritte Implikation verwendet die Definition von $dom(\cdot)$ und χ, die Vierte ist lediglich Einsetzen der Abkürzungen und die Fünfte gilt Dank 1.
Hieraus ist nun ersichtlich, dass

$$\begin{aligned}
&\{(u_1, \ldots, u_n) : u_1 \in X_1, \ldots, u_n \in X_n \text{ und } \phi(u_1, \ldots, u_n)\} \\
&\qquad = (X_1 \times \ldots \times X_n) \cap dom(G(X_1, \ldots, X_n, \bigcup X_i))
\end{aligned}$$

gilt. Da $\times, \bigcup$ und $dom(\cdot)$ Gödeloperationen sind, haben wir diesen Teil des Satzes bewiesen.

□

Definition 7.3 (Δ_0-Aussonderung)**.** Ein Satz der Form

$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n \forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \phi(u, p_1, \ldots, p_n))$$

mit ϕ eine Δ_0-Formel heißt Beispiel für eine Δ_0-Aussonderung.
Sei M eine transitive Klasse, wir sagen M erfüllt Δ_0-Aussonderung, falls M jedes Beispiel für eine Δ_0-Aussonderung erfüllt.

Definition 7.4. Eine Klasse M heißt abgeschlossen unter den Funktionen $F_1, \ldots, F_n$, falls für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, $F_i(x_1, \ldots, x_{m_i}) \in M$ für alle $x_1, \ldots, x_{m_i} \in M$.
Die Klasse ist dann auch abgeschlossen unter beliebigen Kompositionen der Funktionen.

Korollar 7.5. *Sei M eine, unter Gödeloperationen abgeschlossene, transitive Klasse, dann erfüllt M Δ_0-Aussonderung.*

Beweis. Sei $\phi(u, p_1, \dots, p_n)$ eine Δ_0-Formel und $X, p_1, \dots, p_n \in M$. Es gilt

$$Y = \{u \in X : \phi(u, p_1, \dots, p_n)\} = \{u \in X : \phi^M(u, p_1, \dots, p_n)\}.$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt, da ϕ eine Δ_0-Formel und M transitiv ist. Wir müssen also nur mehr überprüfen, ob Y Element von M ist, denn dann gilt

$$(\forall p_1, \dots, \forall p_n \forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \phi(u, p_1, \dots, p_n)))^M.$$

Laut Gödelschem Normalformensatz, gibt es eine Komposition von Gödeloperationen, mit

$$G(X, \{p_1\}, \dots, \{p_n\}) = \{(u, p_1, \dots, p_n) : u \in X \wedge \phi(u, p_1, \dots, p_n)\}.$$

Hieraus können wir mithilfe der Gödeloperationen $\{\cdot, \cdot\}$ und $dom(\cdot)$ Y gewinnen, denn es gilt

$$\begin{aligned} Y &= \{u : \exists u_1 \dots \exists u_n (u, u_1, \dots, u_n) \in G(X, \{p_1\}, \dots, \{p_n\})\} \\ &= dom(\dots dom(G(X, \{p_1\}, \dots, \{p_n\})) \dots) \end{aligned}$$

wobei $dom(\cdot)$ n-mal auftritt. Also $Y \in M$, da M, laut Voraussetzung, abgeschlossen unter Gödeloperationen ist. □

Lemma 7.6. *Sei G eine Gödeloperation, dann gilt:*

1. *$u \in G(X, \dots)$ kann als Δ_0-Formel geschrieben werden.*
2. *Falls ϕ eine Δ_0-Formel ist, so auch $\forall u \in G(X, \dots)\ \phi$ und $\exists u \in G(X, \dots)\ \phi$.*
3. *$Z = G(X, \dots)$ kann als Δ_0-Formel geschrieben werden.*
4. *Ist ϕ eine Δ_0-Formel, so auch $\phi(G(X, \dots))$.*

Beweis. Der Beweis verwendet Induktion über die Komplexität von G. Für jeden Komplexitätsgrad (Anzahl der verwendeten Basisoperationen) beweisen wir 1-4, wobei wir in jedem Schritt zuerst 1 und 2 beweisen, 3 folgt aus diesen Beiden und 4 dann aus 1-3.
Die Beweise funktionieren nach der gleichen Logik, wie wir es schon für Δ_0-Formeln gesehen haben. Wir beweisen 1 und 2 nur für ein Beispiel, weitere Beispiele können in [2] gefunden werden.

Wir zeigen 1 und 2 im Fall von $G_8(X) = \{(u, v) : (v, u) \in X\}$.
Für 1

$$a \in G_8(G(X, \dots)) \leftrightarrow \exists z \in G(X, \dots) \exists s \in z \exists t \in s \exists u, v \in t (z = (u, v) \wedge a = (v, u)).$$

Im Fall des Induktionsanfangs ist $G(X, \dots) = X$. Bei der Äquivalenz wurden $z = (u, v) = \{\{u\}, \{u, \{u, v\}\}\}$, $s = \{u, \{u, v\}\}$ und $t = \{u, v\}$ benutzt.
Für 2 beschränken wir uns auf den Fall $\exists$. Hier gilt

$$\exists a \in G_8(G(X, \dots)) \phi(a, \dots) \leftrightarrow \exists z \in G(X, \dots) \exists s \in z \exists t \in s \exists u, v \in t (z = (u, v) \wedge \phi((v, u) \dots)).$$

Hier haben wir, neben der Bedingung, dass 2 für einen weniger komplexen Aufbau schon bewiesen ist, benutzt, dass mit $\phi(a, \dots)$ auch $\phi((v, u), \dots)$ eine Δ_0-Formel ist. Der Beweis hierfür macht gebrauch von der Induktion über den Aufbau von Δ_0-Formeln und läuft ähnlich wie der für 4. Wir betrachten nur die atomaren Fälle und den Fall für $\exists$, $\neg\phi$ und $\phi \wedge \psi$ sind dann klar.

- $z = (v, u)$ klar, da schon bewiesen.
- $z \in (v, u) \leftrightarrow z = \{v\} \vee z = \{v, \{v, u\}\}$.
- $(v, u) \in z \leftrightarrow \exists s \in z\ s = (v, u)$.
- $\exists a \in (v, u)\psi(a, (v, u), \ldots) \leftrightarrow \psi(\{v\}, (v, u), \ldots) \vee \psi(\{v, u\}, (v, u), \ldots)$, hier nützen wir aus, dass $\psi(\{v, u\})$ eine Δ_0-Formel ist, man beweist dies analog wie hier.

Wir wollen nun 3 zeigen, dies folgt aber sogleich, mit dem, für den aktuellen Komplexitätsgrad, schon Bewiesenen, aus

$$Z = G(X, \ldots) \leftrightarrow \forall u \in Z\ u \in G(X, \ldots) \wedge \forall u \in G(X, \ldots) u \in Z.$$

4 wird wie schon erwähnt mittels Induktion bewiesen und ist strukturell ähnlich dem, was wir bei $\phi((v, u))$ gesehen haben, verwendet aber 1-3 für den aktuellen Komplexitätsgrad. Wieder sind $\neg\phi$ und $\phi \wedge \psi$ klar.

- $u \in G(X, \ldots)$ schon bewiesen.
- $G(X, \ldots) \in Y \leftrightarrow \exists Z \in Y\ Z = G(X, \ldots)$
- $Z = G(X, \ldots)$ schon bewiesen.
- $\exists a \in G(X, \ldots)\ \psi(G(X, \ldots), \ldots)$ klar nach 2 und Induktionsvoraussetzung.

□

Wir können nun folgendes Korollar beweisen

Korollar 7.7. *Sei M eine transitive Menge, und cl bezeichne den Abschluss unter Gödeloperationen, dann gilt:*

$$def(M) = cl(M \cup \{M\}) \cap P(M)$$

Beweis. Um $def(M) \subset cl(M \cup \{M\}) \cap P(M)$ einzusehen, beachten wir, dass wenn ϕ eine Formel ist, dann ist ϕ^M eine Δ_0-Formel (alle nicht schon eingeschränkten Quantoren werden auf M eingeschränkt). Ist nun eine Menge X über M mit Parametern $a_1, \ldots, a_n \in M$ definierbar, dann haben wir

$$\begin{aligned} X = \{x \in M : M \models \phi[x, a_1, \ldots, a_n]\} &= \{x \in M : \phi^M(x, a_1, \ldots, a_n)\} \\ &= G(M, a_1, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

für eine Komposition von Gödeloperationen G.
Das zweite Gleichheitszeichen gilt definitionsbedingt, das dritte da nach 7.2 eine Gödeloperation H existiert, sodass $H(M, \{a_1\}, \ldots, \{a_n\}) = \{(x, a_1, \ldots, a_n) : x \in M \wedge \phi^M(u, a_1, \ldots, a_n)\}$ (da ϕ^M Δ_0-Formel ist), hieraus gewinnen wir X wie im Beweis von 7.5. $G(M, a_1, \ldots, a_n)$ ist klarerweise aus $cl(M \cup \{M\}) \cap P(M)$.
Umgekehrt, sei $X = G(M, a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in M$, also $X \in cl(M \cup \{M\})$. Da $x \in G(M, a_1, \ldots, a_n)$ nach 7.6 einer Δ_0-Formel ϕ entspricht, können wir

$$X = \{x : \phi(M, x, a_1, \ldots, a_n)\}$$

schreiben. Gilt nun M transitiv und $X \subset M$, also $X \in P(M)$, so haben wir:

$$\begin{aligned} X &= \{x \in M : \psi^M(x, a_1, \ldots, a_n)\} \\ &= \{x \in M : M \models \psi[x, a_1, \ldots, a_n]\}, \end{aligned}$$

wobei ψ die Formel ist, sodass $\psi^M(x, a_1, \ldots, a_n) = \phi(M, x, a_1, \ldots, a_n)$ gilt (alle Vorkommen von $\exists u \in M$ in ϕ werden durch $\exists u$ ersetzt). Somit haben wir auch $def(M) \supset cl(M \cup \{M\}) \cap P(M)$ gezeigt. $\square$

8 Das konstruierbare Mengenuniversum

Wir führen nun die Gödelsche Klasse L aller konstruierbaren Mengen ein und zeigen sogleich, dass L ein Klassenmodell von ZF ist.

Definition 8.1. Wir definieren L mittels Rekursion über die Ordinalzahlen:

1. $L_0 = \emptyset$
2. $L_{\alpha+1} = def(L_\alpha)$
3. $L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$ für γ Limesordinalzahl.

und schließlich $L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha$ die Gödelsche Klasse.

Lemma 8.2. *Für alle Ordinalzahlen α und β gilt:*

1. *L_α ist transitiv und L damit eine transitive Klasse.*
2. *$\alpha \leq \beta \to L_\alpha \subseteq L_\beta$.*
3. *$\alpha \subset L_\alpha$ für alle Ordinalzahlen α.*
4. *$L_\alpha \in L_{\alpha+1}$*

Beweis.

1. Durch Induktion über α.
   - Der Fall $\alpha = 0$ ist klar.
   - Wenn α Limesordinalzahl ist, gilt für $x \in L_\alpha$, laut Definition von L_α, dass es ein β mit $\beta < \alpha$, sodass $x \in L_\beta$. Weiters sehen wir aus der Definition von L_α, dass $L_\beta \subset L_\alpha$ erfüllt ist. Da nun $x \subset L_\beta$ nach Induktionsvoraussetzung, ist x auch Teilmenge von L_α.
   - Der Nachfolgerfall $L_{\alpha+1}$. Es gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass L_α transitiv ist. Wir beobachten zuerst, dass $L_\alpha \subset L_{\alpha+1}$ gilt, denn für $a \in L_\alpha$ haben wir, dank der Transitivität von L_α, dass $a = \{x \in L_\alpha : x \in a\}$, d.h. $a \in L_{\alpha+1}$, gilt.
     Aus $L_{\alpha+1} \subset P(L_\alpha)$ folgt, dass die Elemente von $L_{\alpha+1}$ Teilmengen von L_α ist. Haben wir also ein $x \in L_{\alpha+1}$ gegeben, so sehen wir aus der vorangegangenen Beobachtung, dass folgende Inklusionen erfüllt sind $x \subset L_\alpha \subset L_{\alpha+1}$, also ist $L_{\alpha+1}$ transitiv.
2. Wir beweisen $\forall \beta \geq \alpha \to [L_\alpha \subset L_\beta]$ durch Induktion über β und somit die Aussage.
   - Im Fall $\beta = \alpha$ ist die Behauptung klar.
   - Falls β eine Limesordinalzahl ist, ist $L_\alpha \subset L_\beta$ der Definition nach offensichtlich.
   - Nehmen wir nun an die Behauptung ist für β schon gezeigt, also $L_\alpha \subset L_\beta$, dann folgt die Gültigkeit für $\beta + 1$ aber aus $L_\beta \subset L_{\beta+1}$, was wir im Beweis von 1 gezeigt haben.
3. Wieder mittels Induktion über α. Die Fälle für 0 und Limesordinalzahlen sind klar. Sei also $\alpha \subset L_\alpha$ bereits gezeigt, und somit auch $\alpha \subset L_{\alpha+1}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\alpha \in L_{\alpha+1}$. Da aber $\alpha = \{x \in L_\alpha : x \text{ ist eine Ordinalzahl}\} = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models x \text{ ist eine Ordinalzahl}\}$ ist dies klar. Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da »x ist eine Ordinalzahl eine« Δ_0- Formel und L_α transitiv ist.

4. Klar, da $L_\alpha = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models x = x\} \in L_{\alpha+1}$.

$\square$

Wir definieren nun den Begriff des L-Ranges.

Definition 8.3 (L-Rang)**.** Sei $x \in L$ gegeben, als L-Rang $\rho(x)$ von x bezeichnen wir die kleinste Ordinalzahl ρ, für die gilt $x \in L_{\rho+1}$.

Lemma 8.4. *Für alle α gilt: $L_\alpha = \{x \in L : \rho(x) < \alpha\}$ und $L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha = \{x \in L : \rho(x) = \alpha\}$.*

Nun ein, im Folgenden, nützliches Lemma.

Lemma 8.5. *Sei x eine Teilmenge von L, dann existiert eine Ordinalzahl α mit $x \subset L_\alpha$.*

Beweis. Wir verwenden das Ersetzungsschema mit der Formel:

$$\phi(y, z) \leftrightarrow \text{ es existiert eine Ordinalzahl } \rho \text{ mit } z = \rho + 1 \text{ und } y \in L_{\rho+1} \setminus L_\rho.$$

Für jedes $y \in x$ ist dieses z eindeutig bestimmt.
Wir erhalten nun eine Menge B, sodass $\forall y \in x \exists z \in B\ \phi(y, z)$ erfüllt ist. Vermöge des Aussonderungsschemas ist uns die Existenz von $\{z \in B : \exists y \in x\ \phi(y, z)\} = \{\rho(y) + 1 : y \in x\}$ zugesichert. Bilden des Supremums dieser Menge liefert uns eine Ordinalzahl α, sodass $x \subset L_\alpha$. $\square$

Satz 8.6. *L ist ein Klassenmodell von ZF*

Beweis. Wir beweisen, dass σ^L für jedes Axiom σ von ZF gilt. Wir merken noch an, dass $\cup$, $\cap$, $\subset$ und $\{\cdot, \cdot\}$ alle mittels Δ_0-Formeln definiert werden können, und somit L und V in ihrer Interpretation übereinstimmen, sofern die Argumente aus L sind. Wir schreiben dementsprechend z.B. $x \subset y$ und nicht $x \subset^L y$, wo dies eigentlich der Fall sein müsste.

Extensionalität

Gilt, da mit $x, y \in L$ auch alle Elemente von x und y in L (L transitiv) liegen, also

$$(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))^L \text{ gdw. } \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y).$$

Extensionalität in L folgt somit aus jener in V.

Fundierung

Wir wählen in V das $\in$-kleinste Element von x, da L transitiv liegt dieses auch in L, damit ist Fundierung erfüllt.

Aussonderungsschema

Seien v und p aus L. Das Aussonderungsschema in V garantiert uns die Existenz von $y = \{x \in v : \phi^L(x, p)\}$. Das Reflektionsprinzip 4.32 gibt uns ein $\alpha \in Ord$, sodass $L_\alpha \prec_\phi L$ und $v, p \in L_\alpha$ gilt.
Somit ergibt sich, mit der Transitivität von L_α;

$$y = \{x \in v : \phi^{L_\alpha}(x, p)\} = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models x \in v \wedge \phi(x, p)\}.$$

Paar

Zu $x, y \in L$ können wir ein α finden, sodass $x, y \in L_\alpha$. Wir sehen nun, dass

$$\{x, y\} = \{z \in L_\alpha : L_\alpha \models z = x \vee z = y\} \in L_{\alpha+1}$$

gilt. $\{x, y\}$ bezeugt das Paaraxiom in L.

Vereinigung

Sei $F \in L$, dann existiert ein α mit $F \in L_\alpha$. Aufgrund seiner Transitivität erfüllt L_α das Axiom.

Ersetzungsschema

Sei $A \in L$ und $\phi(x,y)$ eine Formel, sodass $\forall x \in A \exists! y(y \in L \wedge \phi^L(x,y))$.
Unser Ziel ist es nun, eine Menge B in L zu finden, sodass $\forall x \in A \exists y \in B\ \phi^L(x,y)$ gilt. Hierzu beachte, dass es in V eine Menge C gibt, die $\forall x \in A \exists y \in C(y \in L \wedge \phi^L(x,y))$ erfüllt. Aus dieser sondern wir nun $B_0 = \{y \in C : y \in L\}$ aus.
Dieses B_0 ist offenkundig Teilmenge von L. Nach 8.5 gibt es ein α mit $B_0 \subset L_\alpha$ und L_α kann somit als Menge genommen werden, die das Ersetzungsschema in L erfüllt, da zu jedem x aus A ein y aus C existiert so, dass $y \in L \wedge \phi^L(x,y)$ erfüllt ist, dieses y liegt in B_0 und somit schließlich auch in L_α.

Unendlichkeit

Klar, da $\omega \in L$.

Potenzmenge

Sei x aus L. Wieder finden wir in V eine Menge y die das Axiom erfüllt, aus dieser können wir $u = \{z \in y : z \in L\}$ mittels Aussonderungsschema gewinnen. Dieses u ist Teilmenge von L, nach 8.5 finden wir ein L_α, das das Gewünschte leistet, denn ist eine Menge z Teilmenge von x in L so auch in V.

□

9 Absolutheit der Konstruierbarkeit

Wir beweisen, dass die Eigenschaft »x ist konstruierbar« absolut für L ist und, dass daraus wiederum $(V = L)^L$ folgt.

Lemma 9.1. *Die Funktion $\alpha \mapsto L_\alpha$ ist eine Δ_1-Funktion.*

Beweis. Die Funktion L_α wurde mittels transfiniter Rekursion über die Ordinalzahlen definiert, es reicht nach 6.3 zu zeigen, dass der Induktionsschritt Σ_1 ist.
Der Limesfall ist dank der Definition $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta = \bigcup ran(L|_\alpha)$ und der Äquivalenz

$$Y = \bigcup ran(L|_\alpha) \leftrightarrow \exists x (Y = \bigcup ran(x) \wedge x = L|_\alpha)$$

klar, denn alle in der Klammer auf der rechten Seite vorkommenden Terme sind Δ_0, $\bigcup ran(x)$ ist eine Gödeloperation, nach 7.6 also Δ_0.
Für den Nachfolgerschritt:
Laut 7.7 gilt $def(M) = cl(M \cup \{M\}) \cap P(M)$. Da

$$\begin{aligned} Z = def(M) \leftrightarrow \exists X, Y (X = M \cup \{M\} \wedge Y = cl(X) \\ \wedge \forall z \in Z (z \in Y \wedge z \subset M) \wedge \forall z \in Y (z \subset M \to z \in Z)) \end{aligned}$$

reicht es zu zeigen, dass $Y = cl(M)$ eine Σ_1-Eigenschaft ist. Dies ist jedoch der Fall, da

$$\begin{aligned} Y = cl(M) \leftrightarrow \exists W (W \text{ ist eine Funktion} \wedge dom(W) = \omega \wedge Y = \bigcup ran(W) \wedge W(0) = M \\ \wedge \forall n \in dom(W)(W(n+1) = W(n) \cup \{G_i(x,y) : x \in W(n), y \in W(n), i = 1, \dots, 10\})) \end{aligned}$$

gilt, denn jeder Term ist Σ_1. Dies sehen wir mittels:

- $dom(W) = \omega \leftrightarrow \exists x(x = dom(W) \wedge x = \omega)$ ist Σ_1.
- $Y = \bigcup ran(W) \leftrightarrow \exists x(x = ran(W) \wedge Y = \bigcup x)$
- $W(0) = M \leftrightarrow \exists s \in W(s = (0, M))$
- $\forall n \in dom(W)(W(n+1) = W(n) \cup \{G_i(x,y) : x \in W(n), y \in W(n), i = 1, \ldots, 10\})$ ist Δ_0. Aus Bequemlichkeit tun wir im Beweis so, als gäbe es nur eine Gödeloperation G, es ist dann jedoch klar wie der reale Fall bewiesen wird.
  Wir bemerken zuerst, dass $z \in \{G(x,y) : x \in X, y \in X\}$ eine Δ_0-Formel ist, genauso wie $\forall z \in \{G(x,y) : x \in X, y \in X\}\phi$ für ϕ Δ_0-Formel, denn

  $$\begin{aligned} z \in \{G(x,y) : x \in X, y \in X\} &\leftrightarrow \exists x, y \in X \ z = G(x,y). \\ \forall z \in \{G(x,y) : x \in X, y \in X\}\phi(z) &\leftrightarrow \forall x, y \in X \ \phi(G(x,y)). \end{aligned}$$

  Beachte hier, dass $\phi(G(x,y))$ nach 4 von 7.6 Δ_0 ist.
  Daraus sehen wir, dass $Z = X \cup \{G(x,y) : x \in X, y \in X\}$ ebenso Δ_0 ist.

  $$\begin{aligned} Z = X \cup \{G(x,y) : x \in X, y \in X\} \leftrightarrow \forall z \in Z((z \in X) \vee (z \in \{G(x,y) : x \in X, y \in X\})) \\ \wedge \forall x \in X(x \in Z) \wedge \forall z \in \{G(x,y) : x \in X, y \in X\}(z \in Z). \end{aligned}$$

  Dank

  $$\begin{aligned} W(n+1) = W(n) \cup \{G(x,y) : x \in W(n), y \in W(n)\} \leftrightarrow \\ \exists x \in dom(W)\exists X, Z \in ran(W)(x = n+1 \wedge X = W(n) \wedge Z = W(x) \\ \wedge Z = X \cup \{G(x,y) : x \in X, y \in X\}) \end{aligned}$$

  sind wir fertig.

□

Wir beweisen nun das Korollar,

Korollar 9.2. *Die Eigenschaft »x ist konstruierbar« ist absolut für L.*

Beweis. Es gilt $Ord \subset L$. Da $\alpha \mapsto L_\alpha$ eine Δ_1-Funktion ist und L transitiv, wissen wir ebenso, dass $L_\alpha^L = L_\alpha$ gilt.

$$(x \text{ ist konstruierbar})^L \leftrightarrow \exists \alpha \in L \exists x \in L_\alpha^L \leftrightarrow \exists \alpha \ x \in L_\alpha \leftrightarrow x \text{ ist konstruierbar}.$$

□

Es ergibt sich nun leicht folgender Satz.

Satz 9.3. *In L gilt $(V = L)$.*

Beweis. Wir haben

$$(\forall x(x \text{ ist konstruierbar}))^L \leftrightarrow \forall x \in L(x \text{ ist konstruierbar})^L \leftrightarrow \forall x \in L(x \text{ ist konstruierbar})$$

□

Man kann allgemeiner zeigen, dass die Funktion $\alpha \mapsto L_\alpha$ absolut für innere Modelle von ZF ist [2] (Kapitel 13), das sind transitive Klassenmodelle M die alle Ordinalzahlen enthalten und ZF erfüllen.
Transitivität einer Menge M alleine reicht jedoch nicht aus, um sicherzustellen, dass $\alpha \mapsto L_\alpha$ absolut für M ist. Es ist nicht klar, dass für $\alpha \in M$ ein Bild in M existieren muss. Wir übernehmen aus [2] (Kapitel 13), dass jedoch die Bedingungen in folgender Definition dafür ausreichen.

Definition 9.4. Wir sagen eine transitive Menge M ist hinreichend, falls gilt;

1. M ist abgeschlossen unter Gödeloperationen,
2. für alle $X \in M$, gilt $\{G_i(x,y) : x \in X, y \in X, i = 1, \dots, 10\} \in M$,
3. ist $\alpha \in M$, so auch $\langle L_\beta : \beta < \alpha \rangle \in M$.

Wir können somit L_α^M für alle $\alpha \in M$ bilden.

Relativ leicht kann man überprüfen, dass L_γ mit γ Limesordinalzahl hinreichend ist [2].
Die Bedingungen aus der Definition können als $\{\in\}$-Aussage ζ ausgedrückt werden, so erhalten eine Aussage für die gilt

$$M \text{ hinreichend} \leftrightarrow (M, \in) \models \zeta.$$

Fügen wir zu dieser noch die Bedingung $(V = L)$ hinzu, erhalten wir eine Aussage σ, sodass für transitive Mengen M gilt

$$(M, \in) \models \sigma \text{ gdw. } M = L_\delta \text{ für eine Limesordinalzahl } \delta.$$

Wir nützen im Folgenden, ohne es zu erwähnen, aus, dass $\alpha \mapsto L_\alpha$ absolut ist.
Die Richtung nach Links in der Behauptung ist nach Definition des Limesfalles wegen

$$(V = L)^{L_\delta} \leftrightarrow \forall x \in L_\delta \exists \gamma \in \delta (x \in L_\gamma)$$

klar, weiterhin ist L_δ hinreichend.

Für die andere Richtung sei $\delta = M \cap Ord$ die erste Ordinalzahl nicht in M. Da M hinreichend, ist klar, dass δ eine Limesordinalzahl ist. Wäre nämlich $\delta = \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$, so gölte $\delta \in M$ aufgrund der Abgeschlossenheit bzgl. Gödeloperationen. Weiters gilt $L_\delta \subset M$, wegen $\langle L_\beta : \beta < \delta \rangle \in M$ und der erwähnten Abgeschlossenheit.
Da $(V = L)^M \leftrightarrow \forall x \in M \exists \gamma \in \delta (x \in L_\gamma)$ haben wir aber auch $M \subset L_\delta$, womit auch diese Richtung bewiesen ist. Da für den transitiven Kollaps einer Menge $\pi'' M \prec M$ gilt, haben wir folgendes Lemma.

Lemma 9.5 (Gödels Kondensationslemma)**.** *Für jede Limesordinalzahl δ gilt:*

Falls $M \prec L_\delta$, dann gilt für den transitive Kollaps von M, dass $\pi'' M = L_\gamma$ ist, mit $\gamma \leq \delta$.

10 ZF ist mit AC und GCH konsistent

Wir haben bisher $(ZF + V = L)^L$ gezeigt. Um nun daraus auf $(ZFC + GCH)^L$ zu schließen, reicht es nach 3.2 zu zeigen, dass $ZF + V = L \vdash AC \wedge GCH$, da jeder Beweis aus $ZF + V = L$ nur endlich viele Aussagen verwendet.

10.1 L erfüllt AC

Wir zeigen nun, dass wir L wohlordnen können. Damit folgt aus der Gültigkeit von $V = L$, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann und damit die Gültigkeit des Auswahlaxioms. Der Beweis ist [2] entnommen.

Satz 10.1. *Es existiert eine Wohlordnung auf der Klasse L der konstruierbaren Mengen.*

Beweis. Wir konstruieren die Wohlordnung mittels transfiniter Rekursion über Ord. Dazu werden wir zuerst jedes L_α wohlordnen und zwar in solcher Weise, dass für $\alpha < \beta$ gilt; $<_\alpha$, die Wohlordnung auf L_α, ist Anfangsstück der Wohlordnung $<_\beta$ auf L_β. D.h.

- Falls $x <_\alpha y$, so gilt $x <_\beta y$.
- Falls $x \in L_\alpha$ und $y \in L_\beta \setminus L_\alpha$, so gilt $x <_\beta y$.

Der Rekursionsanfang ist klar, hier gibt es nur die leere Ordnung.
Im Limesschritt für α Limesordinalzahl nehmen wir an, dass für alle $\beta < \alpha$ die Wohlordnungen $<_\beta$ entsprechend unseren Anforderungen konstruiert wurden. Wir definieren nun $<_\alpha$ vermöge:

$$<_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} <_\beta .$$

Dies definiert tatsächlich eine Wohlordnung. Haben wir $x, y, z \in L_\alpha$, so finden wir ein $\beta < \alpha$ mit $x, y, z \in L_\beta$. Die Eigenschaften einer linearen Ordnung sind somit für $<_\alpha$ erfüllt, da sie es für $<_\beta$ sind. Um das $<_\alpha$-kleinste Element einer Teilmenge x zufinden beachte, dass wir ein $\beta < \alpha$ finden können mit $x \cap L_\beta \neq \emptyset$.

Wir widmen uns also dem Nachfolgerschritt. Die Definition von $L_{\alpha+1}$ war;

$$L_{\alpha+1} = P(L_\alpha) \cap cl(L_\alpha \cup \{L_\alpha\}) = P(L_\alpha) \cap \bigcup_{n\in\omega} W_n^\alpha$$

wobei

$$\begin{aligned} W_0^\alpha &= L_\alpha \cup \{L_\alpha\}, \\ W_{n+1}^\alpha &= \{G_i(x, y) : x \in W_n^\alpha, y \in W_n^\alpha, i = 1, \ldots, 10\}, \end{aligned}$$

sind. Wir konstruieren nun $<_{\alpha+1}$ aus $<_\alpha$ so, dass wir die Ordnung auf L_α übernehmen, dann L_α als nächst größeres Element hinzufügen.
Weiters, für $x, y \in L_{\alpha+1} \setminus (L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$, setzen wir $x <_{\alpha+1} y$ falls es ein n gibt für das gilt $x \in W_n^\alpha$ und $y \notin W_n^\alpha$, also x aus einer weniger komplexen Gödeloperation entsteht als y. Wir sehen, dass wenn unter diesen Bedingungen schon $x <_{\alpha+1} y$ und $y <_{\alpha+1} z$ gilt, $x <_{\alpha+1} z$ folgt.
Es verbleibt noch die Aufgabe, die Elemente der Mengen W_n^α untereinander zu ordnen. Auch dies geschieht rekursiv, d.h. die Wohlordnung $<_{\alpha+1}^{n+1}$ auf W_{n+1}^α wird unter Zuhilfenahme der Wohlordnung $<_{\alpha+1}^n$ auf W_n^α definiert. Es sei

1. $<_{\alpha+1}^0 = <_\alpha \cup \{(x, L_\alpha) : x \in L_\alpha\}$.
2. $<_{\alpha+1}^{n+1}$ ist die wie folgt definierte Wohlordnung auf W_{n+1}^α:

$$x <_{\alpha+1}^{n+1} y \text{ genau dann wenn: } \begin{array}{ll} & (x <_{\alpha+1}^n y) \\ \text{oder} & (x \in W_n^\alpha \text{ und } y \notin W_n^\alpha) \\ \text{oder} & (x, y \notin W_n^\alpha \text{ und } (\end{array}$$

(a) [das kleinste i, sodass $\exists u, v \in W_n^\alpha(x = G_i(u,v)) <_{Ord}$ das kleinste j, sodass $\exists u, v \in W_n^\alpha(y = G_j(u,v))$], oder

(b) [(das kleinste $i =$ dem kleinsten j) und (das $<_{\alpha+1}^n$-kleinste $u \in W_n^\alpha$, sodass $\exists v \in W_n^\alpha(x = G_i(u,v)) <_{\alpha+1}^n$ dem $<_{\alpha+1}^n$-kleinsten $s \in W_n^\alpha$, sodass $\exists v \in W_n^\alpha(y = G_i(s,v)))$], oder

(c) [(das kleinste $i =$ dem kleinsten j) und (das $<_{\alpha+1}^n$-kleinste $u =$ dem $<_{\alpha+1}^n$-kleinsten s) und (das $<_{\alpha+1}^n$-kleinste $v \in W_n^\alpha$, sodass $x = G_i(u,v) <_{\alpha+1}^n$ dem $<_{\alpha+1}^n$-kleinsten $t \in W_n^\alpha$, sodass $y = G_i(u,t))$])).

Wir definieren nun

$$<_{\alpha+1} = (P(L_\alpha) \times P(L_\alpha)) \cap \bigcup_{n \in \omega} <_{\alpha+1}^n .$$

Das $<_\alpha$ ein Anfangsstück von $<_{\alpha+1}$ ist, sieht man sofort aus der Definition.
Um nun das $<_{\alpha+1}$-kleinste Element einer Teilmenge M zu finden, fragen wir ob $M \cap L_\alpha \neq \emptyset$ gilt. Ist dies der Fall, finden wir ein $<_\alpha$-kleinste Element dieser Menge. Ist dies aber nicht der Fall, und gilt $L_\alpha \notin M$, so suchen wir nach dem kleinsten i nach 2a in der Definition, falls $\{x \in M : \exists u, v \in W_n^\alpha x = G_i(u,v)\}$ nun mehr als ein Element hat, so suchen wir das $<_{\alpha+1}^n$-kleinste u nach 2b und verfahren analog, usw.
Somit sehen wir, dass $<_{\alpha+1}$ eine Wohlordnung ist.
Wir können nun

$$x <_L y \text{ gdw. } \exists \alpha (x <_\alpha y)$$

definieren. Für das Auffinden des $<_L$-kleinsten Elementes einer Teilmenge beachte 8.5. □

10.2 L erfüllt GCH

Wir übernehmen aus [1] II.6 folgendes leichte Lemma.

Lemma 10.2. *Angenommen es gilt $\alpha \geq \omega$, dann gilt $|L_\alpha| = |\alpha|$.*

Wir beweisen nun die relative Konsistenz von $ZFC + V = L$ mit GCH. Beweis aus [2].

Satz 10.3. *Falls $V = L$ gilt, dann auch GCH, d.h. $|P(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$.*

Beweis. Wir nehmen $ZFC + V = L$ an. Der Plan ist wie folgt: Wir zeigen, dass wir zu jeder (konstruierbaren) Teilmenge x einer Kardinalzahl κ eine Limesordinalzahl γ finden können, die kleiner als κ^+ ist, sodass gilt $x \in L_\gamma \subset L_{\kappa^+}$. D.h. $P^L(x) \subset L_{\kappa^+}$. Da gilt $|L_\alpha| = |\alpha|$, α unendliche Ordinalzahl und $V = L$, haben wir $|P(x)| \leq \kappa^+$ und somit GCH.
Sei also x eine Teilmenge von κ.

- Wir finden eine Limesordinalzahl $\rho > \kappa$ mit $x \in L_\rho$, da x konstruierbar ist, und $\kappa \subset L_\rho$, wegen 8.2.
- Laut Löwenheim-Skolem finden wir ein M mit Kardinalität κ und $\kappa \cup \{x\} \subset M$, sodass $M \prec L_\rho$.
- Laut Gödels Kondensationslemma 9.5, gibt es eine Limesordinalzahl γ mit $\pi'' M = L_\gamma$.
- Es gilt nun $\kappa = |M| = |\pi'' M| = |L_\gamma| = |\gamma|$ und damit $\gamma < \kappa^+$.
- Da nun $\kappa \subset M$ und π auf transitiven Mengen die Identität ist, gilt $x \in L_\gamma$. Somit $P(\kappa) = P^L(\kappa) \subset L_{\kappa^+}$.

Wir sind fertig. □

Literatur

[1] Kenneth Kunen *Set Theory*, Revised edition, College Publications, 2013

[2] T.Jech, *Set Theory*, The Third Millennium Edition revised and expanded, Springer, 2006.

[3] M. Goldstern, H. Judah, *The Incompleteness Phenomenon*, CRC Press