universität
wien

BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Baire-Räume und ihre Beziehungen zur Mengenlehre

Verfasser

Lukas Koschat

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc.)

Wien, im Monat Juli 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 033621
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuerin:	Dr. Sandra Müller

Abstract

In dieser Arbeit werden der topologische Begriff der Baire-Räume und die zugehörige Theorie der mageren und komageren Mengen erläutert. Neben zwei zentralen Sätzen dieser Theorie, namentlich der Bairesche Kategoriensatz und der Satz von Kuratowski-Ulam, werden auch Verbindungen zu Teilgebieten der Mengenlehre behandelt. Der Cantor-Raum und der Baire-Raum dienen als konkrete Beispiele und werden zusammen mit ihren wichtigsten Eigenschaften vorgestellt.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Einige Beweise in dieser Arbeit orientieren sich an der Vorgehensweise von Alexander S. Kechris 'Classical Descriptive Set Theory'.[3]
Ein Teil der in dieser Arbeit verwendeten notationellen Konventionen stammt aus der Mengenlehre. An mehreren Stellen wird die Menge der natürlichen Zahlen mit ω bezeichnet und die natürliche Zahl n mit der Menge aller natürlichen Zahlen kleiner als n identifiziert, das heißt $n = \{0, ..., n-1\}$. Falls $\mathcal{A}$ eine Familie von Mengen ist, bezeichnet $\bigcup \mathcal{A}$ die Vereinigung dieser Mengen, das heißt $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Analog dazu bezeichnet $\bigcap \mathcal{A}$ den Schnitt dieser Mengen.

2 Einleitung

Zu Beginn klären wir einige grundlegende topologische Begriffe, da diese Voraussetzung für die nachfolgenden Definitionen und essentiell für den gesamten Inhalt dieser Arbeit sind.

Eine *Topologie* $\mathcal{T}$ auf einer nichtleeren Menge X ist eine Familie von Teilmengen von X, welche die leere Menge und X beinhaltet und abgeschlossen unter endlichen Schnitten sowie beliebigen Vereinigungen ist. Das Tupel $(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum* und die Elemente von $\mathcal{T}$ werden *offene* Mengen genannt. Wenn die Wahl der Topologie offensichtlich oder irrelevant ist, wird oft auch die Menge X als topologischer Raum bezeichnet. Die Komplemente von offenen Mengen nennt man *abgeschlossene* Mengen. Folglich ist für eine endliche Teilfamilie der abgeschlossenen Mengen die Vereinigung ihrer Elemente und für eine beliebige Teilfamilie der abgeschlossenen Mengen der Schnitt ihrer Elemente abgeschlossen.
Das *Innere* einer Menge $A \subset X$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A und daher offen. Der *Abschluss* von A ist der Schnitt aller abgeschlossenen Obermengen von A und daher abgeschlossen. Das Innere von A wird mit $\mathring{A}$ und der Abschluss von A mit $\overline{A}$ bezeichnet.
Versieht man A mit der Topologie $\{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$ spricht man von einem *Teilraum* von X. Die Formulierungen *offen in* und *abgeschlossen in* beziehen sich auf die Teilraumtopologie.
Existiert zu jeder Familie von offenen Mengen $\mathcal{A}$ mit $\bigcup \mathcal{A} = X$ eine endliche Teilfamilie $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup \mathcal{A}' = X$, dann nennt man X *kompakt*. Eine Menge $A \subset X$ heißt kompakt, wenn sie als Teilraum von X kompakt ist.
Eine *Basis* für eine Topologie ist eine Teilfamilie der Topologie, sodass sich

jede nichtleere offene Menge als Vereinigung von Elementen der Basis schreiben lässt. Ist V eine offene Menge, $x \in V$ und $U \subset X$ eine Obermenge von V, dann heißt U *Umgebung* von x. Eine *Umgebungsbasis* für $x \in X$ ist eine Familie von Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine Teilmenge besitzt, die Element der Umgebungsbasis ist.
Oft genügt es eine Eigenschaft für eine Basis oder für eine Umgebungsbasis, anstatt für alle offenen Mengen beziehungsweise alle Umgebungen zu zeigen. Ein Beispiel dafür ist die Stetigkeit von Funktionen. Eine Funktion heißt *stetig*, wenn die Urbilder von offenen Mengen (bzw. die Urbilder aller Elemente einer Basis) wieder offen sind. Oder äquivalent dazu kann man Stetigkeit, auch über die Umgebungen definieren. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt stetig, wenn für alle $x \in X$ gilt, dass das Urbild jeder Umgebung (bzw. das Urbild jedes Elements einer Umgebungsbasis) von $f(x)$ Umgebung von x ist. Eine Funktion heißt *offen*, wenn die Bilder von offenen Mengen wieder offen sind. Ist eine bijektive Funktion stetig und offen, spricht man von einem *Homöomorphismus.* Äquivalent dazu sind die Anforderungen bijektiv und stetig mit stetiger Umkehrabbildung. Zwei topologische Räume zwischen denen ein Homöomorphismus existiert, nennt man *homöomorph.* Aussagen über Eigenschaften, die nur anhand der Topologie eines Raumes definiert sind, wie zum Beispiel die Kompaktheit, lassen sich auf homöomorphe Räume übertragen.
Ein Spezialfall der topologischen Räume sind die metrischen Räume. Ein *metrischer Raum* ist eine nichtleere Menge X zusammen mit einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$, deren Wertebereich nur nichtnegative Zahlen umfasst, mit den Eigenschaften, dass sie die Dreiecksungleichung erfüllt (d.h. $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$) und $d(x,y)$ genau dann verschwindet wenn $x = y$. Der *offene Ball* um $x \in X$ mit Radius $r > 0$ ist die Menge $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$. Die Topologie eines metrischen Raums wird durch die Basis $\{B_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$ generiert.

Im folgenden werden die zentralen Begriffe dieser Arbeit vorgestellt. Dafür setzen wir voraus, dass das $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist und $A \subset X$.

Definition. Seien $A, B \subset X$. A heißt *dicht*, falls $\overline{A} = X$. Wenn $A \cap B$ dicht im Teilraum B ist, sagen wir, dass A *dicht in* B liegt.

Lemma 2.1. *A ist genau dann dicht, wenn $A \cap U \neq \emptyset$ für alle nichtleeren offenen $U \subset X$.*

Beweis. Nach Definition ist A genau dann dicht, wenn X die minimale abgeschlossene Obermenge von A ist. Und das ist genau dann der Fall, wenn $X \setminus A$

keine nichtleere offene Menge beinhaltet, das heißt A trifft alle nichtleeren offenen Mengen. $\square$

Definition. A heißt *nirgendsdicht*, falls A nicht dicht in U liegt für alle nichtleeren offenen $U \subset X$.

Lemma 2.2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *A ist nirgendsdicht.*
(ii) *Für jede nichtleere offene Menge $U \subset X$ existiert eine nichtleere offene Menge $V \subset U$, sodass $V \cap A = \emptyset$.*
(iii) *Es existiert eine dichte offene Menge $D \subset X \setminus A$.*
(iv) $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Wenn A nirgendsdicht ist, gilt nach Definition für jede offene Menge $U \subset X$, dass A nicht dicht in U ist. Es folgt aus Lemma 2.1, dass zu jedem U eine nichtleere Menge $V \subset U$ existiert, die offen in U liegt, sodass $V \cap A = \emptyset$. Da U offen ist, ist auch V offen.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Existiert zu jeder nichtleeren offenen Menge $U \subset X$ eine nichtleere offene Menge $V \subset U \cap (X \setminus A)$, dann trifft $(X \setminus A)^\circ = \bigcup\{V \in \mathcal{T} \mid V \subset X \setminus A\}$ alle nichtleeren offenen Mengen und ist somit dicht.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Ist $D \subset X \setminus A$ dicht und offen, dann ist $D \cap U$ nichtleer und offen für jede nichtleere offene Menge $U \subset X$.
$(ii) \Rightarrow (iv)$: Existiert zu jeder nichtleeren offenen Menge $U \subset X$ eine offene Teilmenge $V \subset U$, die nicht von A getroffen wird, dann gilt jeweils $V \cap \overline{A} = \emptyset$, da $X \setminus V$ eine abgeschlossene Obermenge von A ist. Es folgt, dass die leere Menge die maximale offene Teilmenge von $\overline{A}$ ist, das heißt $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Für eine nichtleere offene Menge $U \subset X$ sei $\overline{A}^*$ der Abschluss von $A \cap U$ in der Teilraumtopologie von U. Dann ist $\overline{A}^* = \bigcap\{U \setminus V \mid V \in \mathcal{T}, A \cap U \subset U \setminus V\} = U \cap \bigcap\{X \setminus V \mid V \in \mathcal{T}, A \cap U \subset X \setminus V\} \subset U \cap \overline{A}$. Es folgt $\overline{A}^* \subset \overline{A}$ und mit $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, dass $\overline{A}^* \neq U$. Das heißt A liegt nicht dicht in U. Da U beliebig war, ist A nirgendsdicht. $\square$

Lemma 2.3. *Sind $A, B \subset X$ nirgendsdicht, dann ist auch $A \cup B$ nirgendsdicht.*

Beweis. Sei $U \subset X$ nichtleer und offen. Dann folgt aus Lemma 2.2, dass zwei nichtleere offene Mengen $V, W \subset X$ existieren, sodass $V \subset U \cap (X \setminus A)$ und $W \subset V \cap (X \setminus B)$. Dann gilt auch $W \subset U \cap (X \setminus (A \cup B))$. Da U beliebig war, folgt aus Lemma 2.2, dass $A \cup B$ nirgendsdicht ist. $\square$

Bemerkung. Da Teilmengen von nirgendsdichten Mengen nirgendsdicht sind, ergibt sich mit Lemma 2.3, dass die Familie $\{A \subset X \mid (A$ ist nirgendsdicht$) \vee$

$(X \setminus A$ ist nirgendsdicht$)\}$ bezüglich endlicher Vereinigungen abgeschlossen ist. Da die Familie auch bezüglich Komplementbildung abgeschlossen ist, bildet sie eine sogenannte *Mengenalgebra*.

Definition.

(i) A heißt *mager*, falls nirgendsdichte Mengen M_i für $i \in \omega$ existieren, sodass $A = \bigcup_{i\in\omega} M_i$.

(ii) A heißt *komager*, falls $X \setminus A$ mager ist.

Bemerkung. Verwenden wir die Charakterisierung aus Lemma 2.2, die besagt, dass das Komplement einer nirgendsdichten Menge eine dichte offene Menge beinhaltet, stellen wir fest, dass sich komagere Mengen als jene Mengen definieren lassen, die einen abzählbaren Schnitt dichter offener Mengen beinhalten.
Aus der Definition magerer und komagerer Mengen folgt außerdem, dass nirgendsdichte Mengen immer mager und Obermengen dichter offener Mengen immer komager sind. Daher ist

$$\{A \subset X \mid (A \text{ ist nirgendsdicht}) \vee (X \setminus A \text{ ist nirgendsdicht})\} \subset$$
$$\{A \subset X \mid (A \text{ ist mager}) \vee (A \text{ ist komager})\}.$$

Die Familie der mageren und komageren Mengen ist aber nicht nur bezüglich Komplementbildung und endlichen Vereinigungen abgeschlossen, sondern sogar bezüglich abzählbaren Vereinigungen. Daher spricht man hier von einer *σ-Algebra*.
σ-Algebren sind grundlegend für die Maßtheorie. Dort bildet die Familie der sogenannten Nullmengen die Rolle des untersten σ-Ideals (d.h. eine unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossene Familie). Es ist daher naheliegend, dass sich zwischen mageren Mengen, welche das kleinste σ-Ideal der topologischen σ-Algebra bilden, und den Nullmengen eines Maßraums gewisse Ähnlichkeiten ergeben. Einer solchen Ähnlichkeit wollen wir uns im vierten Abschnitt dieser Arbeit genauer widmen. [1]

[1] Tatsächlich sind die Verbindungen zwischen der Theorie der mageren und komageren Mengen und der Maßtheorie so vielzählig, dass John C. Oxtoby ein ganzes Buch zu diesem Thema verfasste. Das Buch wurde unter dem Namen 'Measure and Category' veröffentlicht. Die Ähnlichkeiten zwischen mageren Mengen und Nullmengen spielen dort eine zentrale Rolle.[6]

3 Der Baire-Raum und der Cantor-Raum

In diesem Kapitel untersuchen wir zwei topologische Räume, die von besonderer Bedeutung in der Mengenlehre sind. Wir betrachten den Cantor-Raum, der als Raum der binären Folgen, oder Raum der Teilmengen der natürlichen Zahlen verstanden werden kann, und den Baire-Raum, den wir als Raum der Folgen von natürlichen Zahlen einführen werden und der auch der Raum der irrationalen Zahlen genannt wird.
Um über diese Räume sprechen zu können, benötigen wir für eine beliebige Menge A und $n \in \omega$ die folgenden Mengen: A^n die Menge der Folgen mit Länge n (d.h. die Menge der Funktionen $n \to A$); $A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} A^n$ die Menge der Folgen mit endlicher Länge; und A^ω die Menge der Folgen mit Länge ω (d.h. die Menge der Funktionen $\omega \to A$). Die Funktion die einer Folge ihre Länge zuordnet ist $\operatorname{len} : A^{<\omega} \cup A^\omega \to \omega + 1, \operatorname{len} a = \operatorname{dom} a$.[2]
Um das Arbeiten mit den genannten Mengen von Folgen zu erleichtern, verwenden wir folgende Notation. Für eine endliche Folge $a = (a_0, ..., a_n)$ und eine endliche oder unendliche Folge $b = (b_0, b_1, ...)$ schreiben wir die Konkatenation als $a \sqcup b = (a_0, ..., a_n, b_0, b_1, ...)$ und falls $\operatorname{len} a \leq \operatorname{len} b$ sowie $(a_0, ..., a_n) = (b_0, ..., b_n)$ gilt, sagen wir a ist ein *Anfangsstück* von b und schreiben $a \lhd b$.

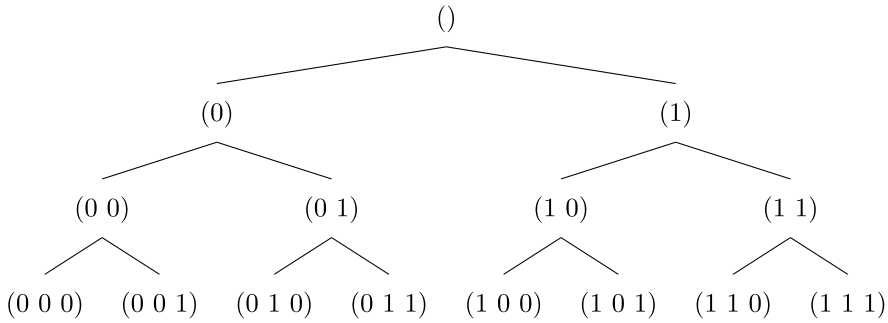
Zuerst werden wir die Topologie für die erwähnten Räume einführen. Danach werden wir betrachten, wie sich die topologischen Begriffe aus dem ersten Kapitel in diesen Räumen verhalten. Dabei kann es hilfreich sein, sich den Folgenraum A^ω mit Hilfe eines unendlich großen graphentheoretischen Wurzelbaums vorzustellen. Die Konstruktion eines solchen Baums lässt sich wie folgt veranschaulichen. [3]

Ein Startknoten, die sogenannte Wurzel, repräsentiert die leere Folge (). Dann zeichnet man für jedes Element von A eine Kante, die von der Wurzel wegführt, sowie einen neuen Knoten am Ende dieser Kante. So erhält man die 0-te Ebene des Wurzelbaums. Die 1-ste Ebene erhält man, indem man von jedem Knoten in der 0-ten Ebene wieder jeweils eine Kante für jedes Element von A und den neuen Knoten am anderen Ende dieser Kanten einzeichnet. Setzt man diesen Prozess induktiv fort, erhält man für $n \in \omega$ die $n+1$-ste Ebene aus der n-ten Ebene. Dann kann man sich eine Folge in der Menge A als Weg beginnend an der Wurzel entlang der Kanten vorstellen. Die endlichen Folgen entsprechen endlichen Wegen und unendliche Folgen entsprechen unendlichen Wegen.

[2] $\operatorname{dom} a$ bezeichnet die Indexmenge der Folge bzw. den Definitionsbereich der Folge als Funktion betrachtet.

[3] Diese Anschauung lässt sich auch auf rigorose Weise rechtfertigen. Alexander S. Kechris verwendet in seinem Buch 'Classical Deskriptive Set Theory' den Begriff der mengentheoretischen Bäume, um die Folgenräume zu veranschaulichen (s. Kechris [3, S. 5-12]).

Als Beispiel sind hier die Wurzel und die ersten drei Ebenen nach der Wurzel des binären Wurzelbaums (d.h. $A = \{0, 1\}$) abgebildet. Jeder Knoten ist mit der Folge, die dem Weg von der Wurzel zu diesem Knoten entspricht, beschriftet.



Definition. Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Familie von topologischen Räumen und A eine beliebige Menge.

(i) Die *Produkttopologie auf* $\Pi_{i \in I} X_i$ ist gegeben durch die Basis $\{\Pi_{i \in I} U_i \mid U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I, \forall i \in I : U_i$ ist offen$\}$.

(ii) Die *diskrete Topologie* auf A ist die Topologie, in der alle Teilmengen von A offen sind.

(iii) Wird A mit der diskreten Topologie versehen, heißt die Produkttopologie auf $\Pi_{n \in \omega} A = A^\omega$ *diskrete Produkttopologie.*

Bemerkung. Die Menge $\{\Pi_{i \in I} U_i \mid U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$, $\forall i \in I : U_i$ ist offen$\}$ ist tatsächlich Basis einer Topologie, da sie abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist.

Betrachtet man die definierende Basis für die diskrete Produkttopologie, erkennt man, dass die offenen Mengen in A^ω genau jene $U \subset A^\omega$ sind, für die zu jedem $x \in U$ ein $n \in \omega$ existiert, sodass für alle $y \in A^\omega$ mit $(x_0, ..., x_n) \lhd y$ schon $y \in U$ gilt. Diese Überlegung wollen wir nun konkretisieren.

Definition. Sei A eine beliebige Menge und $s \in A^{<\omega}$ eine endliche Folge. Dann heißt $N_s = \{a \in A^\omega \mid s \lhd a\}$ der *Teilbaum* von A^ω mit Anfangsstück s.

Lemma 3.1. *Die Menge aller Teilbäume von A^ω bildet eine Basis aus abgeschlossenen offenen Mengen für die diskrete Produkttopologie auf A^ω.*

Beweis. Für $s \in A^{<\omega}$ gilt $N_s \in \{\Pi_{n \in \omega} U_n \mid U_n = A$ für alle bis auf endlich viele $n \in \omega, \forall n \in \omega : U_n$ ist offen$\}$. Folglich ist N_s offen.

Sei $m \in \omega$ und seien $U_n \subset A$ für $n \in \omega$, sodass $U_n = A$ für alle $n \geq m$. Sei $S = \{s \in A^{<\omega} \mid \operatorname{len} s = m, \exists t \in \Pi_{n\in\omega} U_n : s \triangleleft t\}$. Dann ist $\bigcup\{N_s \mid s \in S\} = \Pi_{n\in\omega} U_n$. Folglich kann jedes Element der definierenden Basis $\{\Pi_{n\in\omega} V_n \mid V_n = A$ für alle bis auf endlich viele $n \in \omega, \forall n \in \omega : V_n$ ist offen$\}$ als Vereinigung von Teilbäumen geschrieben werden. Daher kann jede nichtleere offene Menge in A^ω als eine solche Vereinigung dargestellt werden. Das heißt die Menge der Teilbäume bildet eine Basis.
Sei $s \in A^{<\omega}$ beliebig und $T = \{t \in A^{<\omega} \mid \operatorname{len} t = \operatorname{len} s, t \neq s\}$. Dann gilt $A^\omega \setminus N_s = \bigcup\{N_t \mid t \in T\}$, da jede unendliche Folge, die nicht mit s beginnt, eine anderen Folge mit der Länge $\operatorname{len} s$ als Anfangsstück hat. Es folgt, dass $A^\omega \setminus N_s$ offen und somit N_s abgeschlossen ist. $\square$

Bemerkung. Der Name Teilbaum ergibt sich aus der Analogie zum Wurzelbaum. Im Wurzelbaum wird ein Teilbaum N_s dargestellt durch alle unendlichen Wege die durch einen bestimmten Knoten verlaufen, nämlich durch den Knoten, der am Ende des zu s gehörigen endlichen Weges liegt.

Betrachtet man im Wurzelbaum den Teil, der von den Folgen in N_s abgedeckt wird, erkennt man eine Ähnlichkeit zum gesamten Wurzelbaum. Diese Selbstähnlichkeit ist auch im topologischen Sinne vorhanden und wird durch das folgende Lemma ausgedrückt.

Lemma 3.2. *Sei A eine nichtleere Menge und $s \in A^{<\omega}$. Die Abbildung*

$$H_s : A^\omega \to N_s, \quad H_s(t) = s \sqcup t$$

ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Für $t \neq t'$ ist auch $s \sqcup t \neq s \sqcup t'$. Daher ist H_s injektiv. Für $t \in N_s$ gilt $s \triangleleft t$ und somit existiert ein $t' \in A^\omega$, sodass $t = s \sqcup t' = H_s(t')$. Folglich ist H_s auch surjektiv. Das Bild eines Teilbaums N_t ist die Menge $H_s(N_t) = N_{s\sqcup t} \subset N_s$, welche wieder ein Teilbaum und somit offen ist. Insbesondere ist $N_{s\sqcup t}$ offen in N_s. Daher ist H_s offen.
$H_s^{-1}(N_{s\sqcup t}) = N_t$ ist ebenfalls offen. Und da die Familie

$$\{N_{s\sqcup t} \mid t \in A^\omega\} = \{N_s \cap N_t \mid t \in A^\omega\}$$

eine Basis für den Teilraum N_s ist, ist H_s stetig. $\square$

Korollar 3.3. *Ist A abzählbar, besitzt die diskrete Produkttopologie auf A^ω eine abzählbare Basis.*

Beweis. Für eine abzählbare Menge A ist auch $A^{<\omega}$ und somit $\{N_s \mid s \in A^{<\omega}\}$ abzählbar. $\square$

Definition. Der *Baire-Raum* ist die Menge $\mathcal{N} = \omega^\omega$ mit der diskreten Produkttopologie. Der *Cantor-Raum* ist die Menge $\mathcal{C} = 2^\omega$ mit der diskreten Produkttopologie.

Theorem 3.4. *Der Baire-Raum ist homöomorph zu den irrationalen Zahlen als Teilraum von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Definiere die Abbildung $K : \mathcal{N} \to (1, \infty) \setminus \mathbb{Q}$,

$$K(a) = 1 + a_0 + \cfrac{1}{1 + a_1 + \cfrac{1}{1 + a_2 \cfrac{1}{\ddots}}},$$

die einer Folge von natürlichen Zahlen den zugehörigen Standardkettenbruch zuordnet. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da die Kettenbrüche dem Grenzwert einer Cauchy-Folge entsprechen und unendliche Standardkettenbrüche immer irrationale Zahlen darstellen. K ist eine Bijektion, da jede irrationale Zahl eindeutig in ihren zugehörigen Standardkettenbruch entwickelt werden kann. Sei $s \in \omega^{<\omega}$ beliebig. Dann ist $K(N_s)$ offen, da zu jedem $a \in N_s$ und $n \in \omega$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass sich die Kettenbruchentwicklungen der Elemente von $B_\epsilon(K(a))$ frühestens im n-ten Eintrag unterscheiden, das heißt $B_\epsilon(K(a)) \setminus \mathbb{Q} \subset K(N_s)$ für ein entsprechend kleines ϵ. Folglich wird jede offene Teilmenge von $\mathcal{N}$ als Vereinigungen von Teilbäumen auf eine Vereinigung von offenen Mengen abgebildet, und hat daher ebenfalls ein offenes Bild. Das heißt K ist offen.
Sei nun $U \subset (1, \infty) \setminus \mathbb{Q}$ offen, $a \in \mathcal{N}$ mit $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(K(a)) \setminus \mathbb{Q} \subset U$. Dann existiert ein Anfangsstück $s \lhd a$, sodass $K(N_s) \subset B_\epsilon(K(a))$. Somit lässt sich, dass Urbild einer offenen Teilmenge von $(1, \infty) \setminus \mathbb{Q}$ als Vereinigung von Teilbäumen schreiben, und das Urbild ist daher offen. Es folgt, dass K stetig und somit ein Homöomorphismus ist.[4]
Die irrationalen Zahlen größer als 1 sind durch die Abbildung $x \mapsto 1/x + k$ wiederum homömorph zu den irrationalen Zahlen im Intervall $(k, k+1)$. Aus Lemma 3.2 wissen wir, dass $\mathcal{N}$ homöomorph zum Teilbaum N_s für $s \in \omega^{<\omega}$ ist. Daher lässt sich für jedes $n \in \omega$ der Teilbaum $N_{(n)}$ homöomorph auf die irrationalen Zahlen in einem beliebigen Intervall $(k, k+1)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ abbilden.

[4]Die fehlenden Details über Kettenbrüche, insbesondere das Konvergenzverhalten der zugehörigen Folgen und die Kettenbruchentwicklung von reellen Zahlen, lassen sich in den meisten einführenden Werken zur Zahlentheorie finden. Eine umfangreiche Abhandlung des Themas wurde von Oskar Perron verfasst.[7]

Die Teilbäume $N_{(n)}$ bilden eine Partition von $\mathcal{N}$ in abgeschlossene offene Mengen und die Intervalle $(k, k+1) \setminus \mathbb{Q}$ bilden eine Partition der irrationalen Zahlen in abgeschlossene offene Mengen. Daher lässt sich mit einer beliebigen Bijektion $\omega \to \mathbb{Z}$ ein Homöomorphismus $\mathcal{N} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aus den Homöomorphismen $N_{(n)} \to (k, k+1) \setminus \mathbb{Q}$ zusammensetzen. □

Definition. Die *Cantor-Menge* $\mathcal{C}'$ ist die Menge aller Zahlen im Intervall $[0, 1]$, deren Darstellung als 3-adische Zahl (d.h. Basis 3) nur aus den Ziffern 0 und 2 besteht. (Wir zählen hier auch die 3-adischen Zahlen, die in einer unendlichen Folge von 2-ern enden dazu. Insbesondere gilt $1 = 0,222... \in \mathcal{C}'$.)

Theorem 3.5. *Der Cantor-Raum ist homöomorph zu der Cantor-Menge als Teilraum von* $\mathbb{R}$*.*

Beweis. Definiere die Abbildung

$$f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}', \quad f(s) = \sum_{n \in \omega} s'_n 3^{n+1}, \quad \text{wobei } s'_n = \begin{cases} 0, & s_n = 0 \\ 2, & sonst \end{cases},$$

die einem Element des Cantor-Raums eine 3-adische Zahl im Intervall $[0, 1]$, die nur aus den Ziffern 0 und 2 besteht zuordnet. Da ein Wechsel der k-ten Nachkommastelle von 0 auf 2 einer Differenz von mindestens 3^{-k} entspricht, ist die Abbildung injektiv und nach Definition der Cantor-Menge auch surjektiv.
Für $s \in 2^{<\omega}$ und $a, b \in N_s$ gilt $|f(a) - f(b)| \leq 3^{-\operatorname{len} s}$. Daher existiert für jede Menge $U \subset \mathcal{C}'$, die offen in $\mathcal{C}'$ ist und für jedes $x \in U$ eine offene Umgebung $V(x)$ von $f^{-1}(x)$ deren Bild in U liegt. Dann ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} V(x)$ offen. Es folgt, dass f stetig ist.
Notieren wir reelle Zahlen in 3-adischer Darstellung gilt für $s = (s_0, ..., s_{n-1})$ $f(N_s) = [0, s'_0...s'_{n-1}; 0, s'_0...s'_{n-1}222...] \cap \mathcal{C}'$ abgeschlossen in $\mathcal{C}'$. Weiters besteht $\mathcal{C}' \setminus f(N_s)$ genau aus den reellen Zahlen deren 3-adische Darstellung nur aus den Ziffern 0 und 2 besteht und nicht mit $0, s'_0...s'_{n-1}$ beginnt, das heißt $\mathcal{C}' \setminus f(N_s) = f\left(\bigcup \left\{N_t \mid t \in 2^{\operatorname{len} s} \setminus \{s\}\right\}\right) = \bigcup \left\{f(N_t) \mid t \in 2^{\operatorname{len} s} \setminus \{s\}\right\}$. Folglich ist das Komplement von $f(N_s)$ als endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen und daher ist $f(N_s)$ offen. Wie schon im Beweis von Theorem 3.4 folgt, dass f offen und somit ein Homöomorphismus ist. □

Bemerkung.
(i) Die Cantor-Menge ist eine abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen. Denn Zahlen im Komplement haben in ihrer 3-adischen Darstellung an mindestens einer Stelle einen 1-er, in den nachfolgenden Stellen weder nur 0-er noch nur 2-er und somit einen positiven minimalen Abstand zur Cantor-Menge. Das heißt, zu jeder Zahl im Komplement der Cantor Menge

liegt eine offene Umgebung dieser Zahl ebenfalls im Komplement und das Komplement ist als Vereinigung dieser offenen Umgebungen selbst offen.

(ii) Da die Cantor-Menge eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen ist, ist sie und der zu ihr homöomorphe Cantor-Raum kompakt.

(iii) Einen Raum mit der Eigenschaft aus 3.1 nennt man *0-dimensional*.

(iv) Die abzählbare Basis des Cantor-Raums beziehungsweise des Baire-Raums liefert eine abzählbare, dichte Teilmenge. Einen Raum in dem so eine Menge existiert, nennt man *separabel*.

(v) Sowohl der Cantor-Raum als auch der Baire-Raum lassen sich mit einer vollständigen Metrik versehen, welche wieder die diskrete Produkttopologie erzeugt. Außerdem gibt es in beiden Räumen keine sogenannten isolierten Punkte (d.h. Punkte deren einelementige Mengen offen sind). Die erwähnten Eigenschaften charakterisieren den Cantor-Raum eindeutig. Es lässt sich zeigen, dass der Cantor-Raum der bis auf Homöomorphie eindeutige nichtleere, 0-dimensionale, separable, kompakte, metrisierbare Raum ohne isolierte Punkte ist (vgl. Kechris [3, S. 7, 35]).

(vi) Für den Baire-Raum gibt es ein ähnliches Resultat. Der Baire-Rum ist der bis auf Homöomorphie eindeutige nichtleere, 0-dimensionale, separable und vollständig metrisierbare Raum, in dem alle kompakten Mengen leeres Inneres haben (vgl. Kechris [3, S. 37]).

Die Beweise zu den eindeutigen Charakterisierungen übersteigen den Umfang dieser Arbeit. Jedoch zumindest die kompakten Mengen im Baire-Raum wollen wir kurz behandeln.

Proposition 3.6. *Alle kompakten Teilmengen des Baire-Raums haben leeres Inneres.*

Beweis. Sei $A \subset \mathcal{N}$ mit $\mathring{A} \neq \emptyset$. Dann existiert $s \in \omega^{<\omega}$, sodass $N_s \subset A$. N_s ist homöomorph zum Baire-Raum und somit homöomorph zu der Menge der irrationalen Zahlen, welche als unbeschränkte Teilmenge der reellen Zahlen nicht kompakt ist. Damit existiert eine nicht kompakte abgeschlossene Teilmenge von A und es folgt, dass A ebenfalls nicht kompakt ist, da abgeschlossene Teilmengen von kompakten Räumen kompakt sind. □

Definition. Sei I eine beliebige Indexmenge und seien X_i für $i \in I$ topologische Räume. $\bigoplus_{i\in I} X_i$ mit der Topologie

$$\left\{ \bigoplus_{i\in I} U_i \mid U_i \subset X_i \text{ offen} \right\}$$

heißt *topologische Summe.* [5]

Proposition 3.7. *Der Baire-Raum ist homöomorph zu $\bigoplus_{n\in\omega} \mathcal{N}$ als topologische Summe und zu $\Pi_{n\in\omega}\mathcal{N}$ mit der Produkttopologie.*

Beweis. Wir betrachten die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} S :& \bigoplus_{i\in\omega} \mathcal{N} \to \mathcal{N}, \quad S(a,i) = (i) \sqcup a \\ P :& \mathcal{N} \to \Pi_{i\in\omega}\mathcal{N}, \quad P(a) = (a_n \mid n \in M_i)_{i\in\omega} \end{aligned}$$

wobei

$$M_0 = \{2^k - 1 \mid k \in \omega\}$$

und für $i \in \omega$

$$M_{i+1} = \{2^k + i \mid k \in \omega\} \setminus \bigcup_{j=0}^{i} M_j.$$

Für $i \in \omega$ ist S eingeschränkt auf $\mathcal{N} \times i$ ein Homöomorphismus von $\mathcal{N} \times i$ nach $N_{(i)}$ (analog zum Beweis von Lemma 3.2).
Da die Familien $\{\mathcal{N} \times i \mid i \in \omega\}$ und $\{N_{(i)} \mid i \in \omega\}$ Partitionen aus abgeschlossenen offenen Mengen für $\bigoplus_{i\in\omega} \mathcal{N}$ respektive $\mathcal{N}$ bilden, ist auch die gesamte Abbildung S ein Homöomorphismus.
Da für $i, j \in \omega, i \neq j$ die Mengen $\{2^k + i - 1 \mid k \in \omega, \log_2(|i-j|) < k\}$ und $\{2^k + j - 1 \mid k \in \omega, \log_2(|i-j|) < k\}$ disjunkt sind, ist M_i für $i \in \omega$ tatsächlich eine unendliche Menge von natürlichen Zahlen. Somit ist P wohldefiniert.
Nach Definition gilt $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ und da $n = 2^0 + n - 1$, gilt auch $\bigcup_{i\in\omega} M_i = \omega$. Das heißt die Familie $\{M_i \mid i \in \omega\}$ ist eine Partition von ω. Es folgt, dass P eine Bijektion ist.
Sei $s \in \omega^{<\omega}$ beliebig. Für $i \in \omega$ definiere $s^i = (s_k \mid k \in M_i, k < \operatorname{len} s)$. Dann ist $P(N_s) = \Pi_{i\in\omega} N_{s^i}$ und da $\operatorname{len} s^i = 0$, das heißt $N_{s^i} = \mathcal{N}$, für alle bis auf endlich viele $i \in \omega$, ist $P(N_s)$ und somit P offen.

[5] $\bigoplus$ bezeichnet hier die disjunkte Vereinigung, d.h.

$$x \in \bigoplus_{i\in I} X_i \iff \exists i \in I \exists y \in X_i : x = (y,i)$$

.

Nun sei $t^i \in \omega^{<\omega}$ für $i \in \omega$ mit $\operatorname{len} t^i = 0$ für fast alle $i \in \omega$ und $\operatorname{len} t^i > 0$ für mindestens ein $i \in \omega$. Definiere

$$R = \{r \in \omega^{<\omega} \mid \operatorname{len} r = m, \forall i \in \omega : t^i \lhd (r_k \mid k \in M_i, k < \operatorname{len} r)\},$$

wobei

$$m = \max\{M_i(\operatorname{len} t^i) \mid i \in \omega, \operatorname{len} t^i > 0\}$$

und für $k \in \omega$ bezeichnet $M_i(k)$ die k-te Zahl in M_i mit der üblichen Ordnung der natürlichen Zahlen. Dann ist $P^{-1}(\Pi_{i\in\omega} N_{t^i}) = \bigcup\{N_r \mid r \in R\}$ offen. Im Fall $\operatorname{len} t^i = 0$ für alle $i \in \omega$ ist $P^{-1}(\Pi_{i\in\omega} N_{t^i}) = P^{-1}(\Pi_{i\in\omega}\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ ebenfalls offen. Und da $\{\Pi_{i\in\omega} N_{r^i} \mid \forall i \in \omega : r^i \in \omega^{<\omega}, \operatorname{len} t^i = 0 \text{ für fast alle i}\}$ eine Basis für $\Pi_{i\in\omega}\mathcal{N}$ bildet, ist P stetig. □

Bemerkung.

(i) Analog zu diesem Lemma lässt sich für $n \in \omega$ mit einer Partition von ω in n unendliche Teilmengen zeigen, dass $\mathcal{N}$ homöomorph zum n-fachen Produkt mit sich selbst ist.

(ii) Der Baire-Raum ist als 0-dimensionaler Raum, der homöomorph zum n- und ω-fachen Produkt mit sich selbst ist, in vielerlei Hinsicht handlicher als der $\mathbb{R}^n$. Und da $\mathcal{N}$ homöomorph zu den irrationalen Zahlen ist, befindet sich eine homöomorphe Kopie des Baire-Raums, die alle bis auf abzählbar viele Punkte beinhaltet, im $\mathbb{R}^n$. Damit sind manche Eigenschaften leichter für den Baire-Raum zu zeigen und lassen sich dann auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen.

(iii) Allgemeiner lässt sich jeder separable vollständig metrisierbare Raum als Bild einer abgeschlossenen Teilmenge des Baire-Raums unter einer stetigen Abbildung darstellen (vgl. Kechris [3, S. 38]). Daher können Resultate für den Baire-Raum auch oft auf solche Räume übertragen werden.

(iv) Die hier erwähnten Eigenschaften des Baire-Raums (insb. betreffend der Produkte mit sich selbst und der Darstellung sep. vollst. metr. Räume) räumen ihm eine Sonderstellung in der deskriptiven Mengenlehre ein. So wird beispielsweise bei der Projektiven Hierarchie üblicherweise der Baire-Raum zur Konstruktion zunehmend komplexer Mengen aus den offenen Mengen eines separablen vollständig metrisierbaren Raums verwendet (s. Kechris [3, S. 313]).

Wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, lässt sich der Cantor-Raum auch als Raum der Teilmengen von ω verstehen. Diese Behauptung soll im Folgenden konkretisiert werden. Danach wird mit der nächsten Proposition demonstriert, wie man unter Verwendung des Cantor-Raums Aussagen über Teilmengen von ω treffen kann.

Definition und Lemma 3.8. *Die Abbildung*

$$\mathrm{set} : 2^\omega \to \mathcal{P}(\omega), \quad \mathrm{set}\, a = \{n \in \omega \mid a_n = 1\}$$

ist eine Bijektion.

Beweis. Für $a, b \in 2^\omega, a \neq b$ existiert $n \in \omega$, sodass $a_n \neq b_n$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_n = 1$, dann ist $b_n = 0$ und somit $n \in \mathrm{set}\, a \setminus \mathrm{set}\, b$. Daher ist set injektiv. Für $M \in \mathcal{P}(\omega)$, definiere $m_n = 1$, falls $n \in M$ und $m_n = 0$ sonst. Dann ist $m = (m_n \mid n \in \omega) \in 2^\omega$ und $\mathrm{set}\, m = M$. Es folgt, dass set surjektiv ist. □

Bemerkung. Für $a \in 2^{<\omega}$ definieren wir $\mathrm{set}\, a = \mathrm{set}\, a \sqcup (0, 0, 0, ...)$.

Lemma 3.9. *Seien* $a^0, b^0 \in 2^{<\omega}$, *mit* $\mathrm{set}\, b^0 \subset \mathrm{set}\, a^0$ *und* $\mathrm{len}\, a^0 = \mathrm{len}\, b^0$, *sowie* $U \subset 2^\omega$ *dicht und offen. Dann existiert* $s \in 2^{<\omega}$ *mit* $\mathrm{len}\, s > 0$, *sodass*

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \sqcup (1 \mid k \in \mathrm{len}\, s), \\ b^1 &= b^0 \sqcup s \end{aligned}$$

die folgende Bedingung erfüllen:

$$\forall x \in 2^\omega : (\forall n \in \mathrm{set}\, a^1 : x_n = b^1_n \Rightarrow x \in U).$$

Beweis. Definiere $T = \{t \in 2^{\mathrm{len}\, a^0} \mid \forall n \in \mathrm{set}\, a^0 : t_n = b^0_n\}$. T ist als Teilmenge von $2^{\mathrm{len}\, a^0}$ endlich. Mit $k + 1 = |T|$ sei $T = \{t^0, ..., t^k\}$. Da U dicht und offen ist und da die Teilbäume eine Basis bilden, existiert $s^0 \in 2^{<\omega}$ mit $\mathrm{len}\, s^0 > 0$, sodass $N_{t^0 \sqcup s^0} \subset U$. Führt man dieses Argument induktiv fort, findet man $s^{i+1} \in 2^{<\omega}$ für $i \in k$, sodass $N_{t^{i+1} \sqcup s^0 \sqcup s^1 \sqcup ... \sqcup s^{i+1}} \subset U$. Schließlich definieren wir $s = s^0 \sqcup ... \sqcup s^k$. Sei nun $x \in 2^\omega$ mit $\forall n \in \mathrm{set}\, a^1 : x_n = b^1_n$. Dann erfüllt x insbesondere $\forall n \in \mathrm{set}\, a^0 : x_n = b^0_n$. Damit existieren $i \in k + 1$ und $x' \in 2^\omega$, sodass $x = t^i \sqcup x'$. Da $a^1_n = 1$ für $n \in \mathrm{len}\, a^1 - \mathrm{len}\, a^0$ gilt $s \triangleleft x'$ und somit $t^i \sqcup s^0 \sqcup ... \sqcup s^i \triangleleft x$, das heißt $x \in N_{t^i \sqcup s^0 \sqcup ... \sqcup s^i} \subset U$. □

Proposition 3.10. *Sei* $C \subset 2^\omega$ *komager. Dann existieren* $A_0, A_1, B_0, B_1 \subset \omega$, *mit* $A_0 \cup A_1 = \omega$, $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, $B_0 \subset A_0$, $B_1 \subset A_1$, *für die die folgende Implikation für alle* $M \subset \omega$ *gilt:*

$$(M \cap A_0 = B_0 \vee M \cap A_1 = B_1) \Rightarrow \mathrm{set}^{-1} M \in C. \tag{3.1}$$

Beweis. Da C komager ist, existieren dichte offene Mengen $U_{i+1} \subset 2^\omega$ für $i \in \omega$, sodass $\bigcap_{i\in\omega} U_{i+1} \subset C$. Für $i \in \omega$ definiere ${}_0a^i, {}_1a^i, {}_0b^i, {}_1b^i \in 2^{<\omega}$ wie folgt:

$${}_0a^0 = {}_0b^0 = {}_1b^0 = {}_1a^0 = (),$$

$$\begin{aligned}
{}_0a^{i+1} &= {}_0a^i \sqcup (0 \mid k \in \operatorname{len}{}_1a^i - \operatorname{len}{}_0a^i) \sqcup (1 \mid k \in \operatorname{len}{}_0s^{i+1}),\\
{}_0b^{i+1} &= {}_0b^i \sqcup (0 \mid k \in \operatorname{len}{}_1a^i - \operatorname{len}{}_0a^i) \sqcup {}_0s^{i+1},\\
{}_1a^{i+1} &= {}_1a^i \sqcup (0 \mid k \in \operatorname{len}{}_0a^{i+1} - \operatorname{len}{}_1a^i) \sqcup (1 \mid k \in \operatorname{len}{}_1s^{i+1}),\\
{}_1b^{i+1} &= {}_1b^i \sqcup (0 \mid k \in \operatorname{len}{}_0a^{i+1} - \operatorname{len}{}_1a^i) \sqcup {}_1s^{i+1},
\end{aligned}$$

wobei ${}_0s^{i+1}, {}_1s^{i+1} \in 2^{<\omega}$ mit $\operatorname{len}{}_0s^{i+1}, \operatorname{len}{}_1s^{i+1} > 0$ so gewählt sind, dass

$$\forall j \in 2 \forall x \in 2^\omega : \left(\forall n \in \operatorname{set}{}_ja^{i+1} : x_n = {}_jb_n^{i+1} \Rightarrow x \in U_{i+1}\right). \tag{3.2}$$

Auf Grund des vorherigen Lemmas existieren entsprechende ${}_0s^{i+1}, {}_1s^{i+1} \in 2^{<\omega}$ für alle $i \in \omega$. Schließlich definiere für $j \in 2$:

$$A_j = \operatorname{set} \bigcup_{i\in\omega} {}_ja^i, \quad B_j = \operatorname{set} \bigcup_{i\in\omega} {}_jb^i.$$

Für alle $n \in \omega$ gilt $\left(\bigcup_{i\in\omega} {}_jb^i\right)_n = 1 \Rightarrow \left(\bigcup_{i\in\omega} {}_ja^i\right)_n = 1$ und daher $B_j \subset A_j$. Außerdem gilt für alle $n \in \omega$ $\left(\bigcup_{i\in\omega} {}_0a^i\right)_n = 1 - \left(\bigcup_{i\in\omega} {}_1a^i\right)_n$ und somit $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Und aus $\operatorname{len}{}_0s^{i+1} > 0$ für alle $i \in \omega$ folgt $A_0 \cup A_1 = \omega$.
Sei nun $M \subset \omega$ beliebig, $m = \operatorname{set}^{-1} M$, $a = \operatorname{set}^{-1} A_0$ und $b = \operatorname{set}^{-1} B_0$. Ist $M \cap A_0 = B_0$, dann gilt $\forall n \in A_0 : m_n = b_n$ und daher folgt für alle $i \in \omega$ $\forall n \in \operatorname{set}{}_0a^{i+1} : m_n = {}_0b_n^{i+1}$. Wegen der Bedingung 3.2 folgt $m \in U_{i+1}$ für alle $i \in \omega$. Und wir erhalten, dass aus $M \cap A_0 = B_0$ folgt, dass $m \in \bigcap_{i\in\omega} U_{i+1} \subset C$. Für A_1 und B_1 statt A_0 und B_0 erfolgt der Beweis analog. Folglich sind A_0, B_0, A_1, B_1 die gesuchten Mengen. $\square$

Die Proposition 3.10 lässt sich mit Hilfe des binären Wurzelbaums und einer Wette zwischen zwei Personen wie folgt veranschaulichen.
Gegeben ist eine Menge von Folgen $C \subset 2^\omega$.
Person A kennt die Menge C und schreibt zwei Listen mit Weganweisungen. Beide Listen bestehen aus ω vielen Zeilen, die mit je einer Anweisung, '0' oder '1', ausgefüllt werden können. Der Person A steht es frei, beim Ausfüllen der ersten Liste beliebig viele Zeilen freizulassen. Jedoch muss Person A beim Ausfüllen der zweiten Liste alle Zeilen überspringen die sie in der ersten Liste schon ausgefüllt hat.

Person B darf sich nun eine der beiden fertigen Listen aussuchen und muss dann einen unendlichen Weg von der Wurzel aus beschreiben, dessen binäre Folge $a \in 2^\omega$ nicht in der gegebenen Menge C enthalten ist. Dabei muss Person B den Anweisungen der Liste folgen, die sie ausgewählt hat. Das heißt, steht in der n-ten Zeile eine 0 oder eine 1 muss $a_n = 0$ respektive $a_n = 1$ gelten. Ist die n-te Zeile der von Person B gewählten Liste frei geblieben, darf sie selbst wählen wie der Weg fortgesetzt wird. Person A gewinnt die Wette, wenn es Person B nicht gelingt einen Weg zu finden, der diesen Anforderungen genügt.
In Bezug auf dieses Szenario besagt die Proposition 3.10, dass, falls C komager ist, Person A immer zwei Listen schreiben kann, mit denen sie die Wette auf jeden Fall gewinnt.

Diese Betrachtung lässt den Anschein erwecken, dass komagere Mengen im Cantor-Raum auf eine gewisse Weise sehr groß sind. Diese Größe wollen wir nun mathematisch beschreiben.
Dafür verwenden wir zwar den Baire-Raum, da das entsprechende Resultat hier von größerer Bedeutung ist, wollen jedoch anmerken, dass sich die Vorgehensweise eins zu eins auf den Cantor-Raum übertragen lässt.

Definition und Lemma 3.11. *Für $a, b \in \omega^{<\omega}$ schreiben wir $a <' b$ genau dann, wenn $a \neq b$ und $\operatorname{len} a < \operatorname{len} b \vee (\operatorname{len} a = \operatorname{len} b \wedge a_{j(a,b)} < b_{j(a,b)})$, wobei $j(a,b) = \min\{n \mid a_n \neq b_n\})$. $<'$ ist eine Wohlordnung auf $\omega^{<\omega}$.*

Beweis. Die Relation $<'$ ist nach Definition antisymmetrisch und da $<$ irreflexiv ist, ist es auch $<'$. Je zwei Elemente $a, b \in \omega^{<\omega}, a \neq b$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\operatorname{len} a \leq \operatorname{len} b$ sind vergleichbar, da entweder $\operatorname{len} a < \operatorname{len} b$, oder $a_{j(a,b)} < b_{j(a,b)}$, oder $b_{j(a,b)} < a_{j(a,b)}$. Sind $a, b, c \in 2^{<\omega}$ mit $a <' b$ und $b <' c$, dann trifft mindestens eine der folgenden drei Aussagen zu: $\operatorname{len} a \leq \operatorname{len} b < \operatorname{len} c$, $\operatorname{len} a < \operatorname{len} b \leq \operatorname{len} c$, oder $\operatorname{len} a = \operatorname{len} b = \operatorname{len} c \wedge a_{j(a,b)} < b_{j(a,b)} \wedge b_{j(b,c)} < c_{j(b,c)}$. In den ersten beiden Fällen gilt $\operatorname{len} a < \operatorname{len} c$ und daher $a <' c$. Trifft die dritte Aussage zu, gilt entweder $j(a,b) > j(b,c)$, daher $j(a,c) = j(b,c)$ und somit $a_{j(a,c)} = b_{j(a,c)} < c_{j(a,c)}$, oder es gilt $j(a,b) \leq j(b,c)$, daher $j(a,b) = j(a,c)$ und somit $a_{j(a,c)} < b_{j(a,c)} \leq c_{j(a,c)}$. Es folgt wieder $a <' c$. Daher ist $<'$ transitiv. Seien $A \subset \omega^{<\omega}$ und $a \in A$ beliebig. Dann ist $\{b \in \omega^{<\omega} \mid b <' a\}$ endlich. Folglich besitzt A ein $<'$-minimales Element. $\square$

Theorem 3.12. *Sei $C \subset \mathcal{N}$ komager. Dann ist C dicht.*

Beweis. Da C komager ist, existieren dichte offene Mengen $U_n \subset \mathcal{N}, n \in \omega$, sodass $\bigcap_{n\in\omega} U_n \subset C$. Sei $U \subset \mathcal{N}$ offen und nichtleer. Für $i \in \omega$ definiere:

$$t^0 = min_{<'}\{s \in \omega^{<\omega} \mid \operatorname{len} s > 0, N_s \subset U_0 \cap U\}$$
$$t^{i+1} = min_{<'}\{s \in \omega^{<\omega} \mid \operatorname{len} s > i+1, N_s \subset U_{i+1}, t^i \triangleleft s\}$$

Da U_0 dicht und offen ist, ist $U_0 \cap U$ offen und nichtleer. Weiters ist $\{N_s \mid \operatorname{len} s > 0\}$ eine Basis. Daher folgt, dass $\{s \in \omega^{<\omega} \mid \operatorname{len} s > 0, N_s \subset U_0 \cap U\}$ nichtleer ist. Teilbäume sind offen und die U_n für $n \in \omega$ sind dicht und offen, somit ist $U_{i+1} \cap N_{t^i}$ für alle $i \in \omega$ nichtleer und offen. Da auch $\{N_s \mid \operatorname{len} s > i+1\}$ für $i \in \omega$ jeweils eine Basis ist, existiert $s \in \omega^{<\omega}$ mit $\operatorname{len} s > i+1$, sodass $N_s \subset U_{i+1} \cap N_{t^i}$ und daher ist $\{s \in \omega^{<\omega} \mid \operatorname{len} s > i+1, N_s \subset U_{i+1}, t^i \triangleleft s\}$ nichtleer. Schließlich definiere $t = (t^i_i \mid i \in \omega)$. Für $i \in \omega$ gilt $t^i \triangleleft t$ und daher $t \in N_{t^i}$. Da $N_{t^i} \subset U_i$ für $i \in \omega$ und $N_{t^0} \subset U$, folgt $t \in \bigcap_{i\in\omega} N_{t^i} \subset U \cap \bigcap_{i\in\omega} U_i$. □

Bemerkung. Im Beweis haben wir verwendet, dass nicht nur $\{N_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$, sondern auch $\{N_s \mid \operatorname{len} s > k\}$ mit $k \in \omega$ eine Basis ist. Diese Aussage ist leicht nachvollziehbar, da jeder Teilbaum als Vereinigung von kleineren Teilbäumen geschrieben werden kann. Sei $s \in \omega^{<\omega}$, dann ist $N_s = \bigcup_{t\in T} N_t$ mit $T = \{t \in \omega^{<\omega} \mid \operatorname{len} t > \operatorname{len} s, s \triangleleft t\}$. In anderen Worten: Eine unendliche Folge hat das Anfangsstück s genau dann, wenn sie ein Anfangsstück t hat, dass länger ist als s und $s \triangleleft t$.

4 Der Bairesche Kategoriensatz

Am Ende des letzten Kapitels haben wir gesehen, dass komagere Mengen im Baire-Raum, dicht sind. Insgeheim haben wurde aber noch mehr bewiesen. Während der Schnitt von zwei herkömmlichen dichten Mengen leer sein kann[6], sind sogar abzählbare Schnitte von komageren Mengen immer noch dicht, da die Familie der komageren Mengen abgeschlossen unter abzählbaren Schnitten ist. Die komageren Mengen sind in diesem Sinne wesentlich größer als herkömmliche dichte Mengen im Baire-Raum.
Da der Baire-Raum homöomorph zu den irrationalen Zahlen ist und weil die irrationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, können wir schlussfolgern, dass auch in $\mathbb{R}$ komagere Mengen dicht sind. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass es eine Vielzahl weiterer Räume mit dieser Eigenschaft gibt, die passenderweise unter dem Namen Baire-Räume zusammengefasst werden.

[6]Man betrachte Beispielsweise die Menge $\{s \sqcup (0,0,...) \in \mathcal{N} \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ und $\{s \sqcup (1,1,...) \in \mathcal{N} \mid s \in \omega^{<\omega}\}$, deren Schnitt die leere Menge ist. Beide treffen alle Teilbäume und sind daher dicht.

Definition. Ein topologischer Raum X mit der Eigenschaft, dass jede komagere Menge dicht in X liegt, heißt *Baire-Raum.*

Lemma 4.1. *Sei X ein topologischer Raum. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

(i) X ist ein Baire-Raum.
(ii) Jede nichtleere, offene Menge ist nicht mager.
(iii) Jeder abzählbare Schnitt dichter, offener Mengen ist dicht.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei X ein Baire-Raum und $A \subset X$ eine nichtleere offene Teilmenge. Dann ist $X \setminus A$ nicht dicht. Und da X ein Baire-Raum ist, kann $X \setminus A$ nicht komager sein. Folglich ist A nicht mager.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei X ein topologischer Raum der (ii) erfüllt und für jedes $i \in \omega$ sei $A_i \subset X$ eine dichte, offene Teilmenge. Betrachte den Schnitt $S = \bigcap_{i\in\omega} A_i$ und sein Komplement $M = \bigcup_{i\in\omega}(X \setminus A_i)$. M ist als abzählbare Vereinigung nirgendsdichter Mengen mager und so auch alle Teilmengen von M. Nun gilt zusätzlich, dass jede nichtleere, offene Teilmenge von X nicht mager ist. Folglich gibt es keine nichtleere Teilmenge von M, die offen in X ist. Das heißt S trifft alle nichtleeren, offene Teilmengen von X.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei X ein topologischer Raum der (iii) erfüllt und $A \subset X$ eine komagere Menge. Folglich besitzt A eine Teilmenge die ein abzählbarer Schnitt dichter, offener Mengen ist. Wegen (iii) ist diese Teilmenge und somit auch A dicht. □

Lemma 4.2. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Existieren $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(X), n \in \omega$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$\forall n \in \omega \forall A \in \mathcal{A}_n : \mathring{A} \neq \emptyset, \tag{4.1}$$

$$\forall n \in \omega \forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\} \exists A \in \mathcal{A}_n : A \subset U, \tag{4.2}$$

$$\forall (A_i)_{i\in\omega} : (\forall n \in \omega : (A_n \in \mathcal{A}_n \wedge A_{n+1} \subset A_n) \Rightarrow \bigcap_{i\in\omega} A_i \neq \emptyset), \tag{4.3}$$

dann ist X ein Baire-Raum.

Beweis. Seien $U_n \subset X, n \in \omega$ dicht und offen und sei $U \subset X$ eine beliebige offene Menge. Wähle V_n für $n \in \omega$, welche die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

$$V_0 \in \mathcal{A}_0, \quad V_0 \subset U \cap U_0, \tag{4.4}$$

$$V_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}, \quad V_{n+1} \subset \mathring{V}_n \cap U_{n+1}. \tag{4.5}$$

U_0 ist dicht und offen, U ist nichtleer und offen, folglich ist $U \cap U_0$ nichtleer und offen. Wegen der Eigenschaft 4.2 findet sich eine Menge V_0, welche die Voraussetzung 4.5 erfüllt. Für $n \in \omega$ folgt aus der Eigenschaft 4.1, dass $\mathring{V}_n$ nichtleer ist. Da $\mathring{V}_n$ auch offen und U_{n+1} dicht und offen ist folgt, dass $\mathring{V}_n \cap U_{n+1}$ nichtleer und offen ist. Wegen der Eigenschaft 4.2 existiert eine Menge V_{n+1}, welche die Voraussetzung 4.5 erfüllt. Es folgt aus den Voraussetzungen 4.4 und 4.5, dass $\bigcap_{n\in\omega} V_n \subset U \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n$ und wegen der Eigenschaft 4.3 gilt $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \emptyset$. Da U beliebig war, trifft $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ alle nichtleeren offenen Mengen und ist daher dicht. Weil auch die Mengen U_n für $n \in \omega$ beliebig waren, folgt aus dem Lemma 4.1, dass X ein Baire-Raum ist. □

4.1 Vollständig metrisierbare Räume

Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik.

(i) d heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in X besitzt.
(ii) $(X, \mathcal{T})$ heißt *vollständig metrisierbar*, wenn eine vollständige Metrik für den Raum existiert, welche die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt.

Theorem 4.3 (Bairescher Kategoriensatz für vollständig metrisierbare Räume)**.** *Jeder vollständig metrisierbare Raum ist ein Baire-Raum.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig metrisierbarer Raum und d eine vollständige Metrik, die $\mathcal{T}$ erzeugt. Für $r > 0$ und $x \in X$ definiere den abgeschlossenen Ball $C_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$. Dann definiere für $n \in \omega \setminus \{0\}$ die Familien $\mathcal{A}_n = \{C_r(x) \mid 0 < r \leq 1/n, x \in X\}$.
Da $C_r(x) \supset B_r(x)$ ist $\mathring{C_r}(x) \neq \emptyset$ für alle $r > 0$ und $x \in X$, das heißt die Familien $\mathcal{A}_{n+1}$ für $n \in \omega$ haben die Eigenschaft 4.1 aus Lemma 4.2.
Sei $r > 0$, $n \in \omega \setminus \{0\}$ und $x \in X$, definiere $r' = \min\{r/2, 1/n\}$. Dann ist $C_{r'}(x) \in \mathcal{A}_n$ und $C_{r'}(x) \subset B_r(x)$ und da die offenen Bälle eine Basis bilden, haben die Familien $\mathcal{A}_{n+1}$ für $n \in \omega$ die Eigenschaft 4.2.
Schließlich sei $(C_{r_n}(x_n))_{n\in\omega}$ eine Folge von abgeschlossenen Bällen, sodass $C_{r_n}(x_n) \in \mathcal{A}_{n+1}$ und $C_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset C_{r_n}(x_n)$ für alle $n \in \omega$. Da $r_n < 1/n$ für $n \in \omega$, ist $(x_n)_{n\in\omega}$ eine Cauchy-Folge. Es folgt, dass $x = \lim_{n\in\omega} x_n$ existiert. Weiters folgt aus der Dreiecksungleichung, dass $x \in C_{r_n}(x_n)$ für alle $n \in \omega$, das heißt $x \in \bigcap_{n\in\omega} C_{r_n}(x_n)$. Daraus ergibt sich die Eigenschaft 4.3. Somit gilt, dass X ein Baire-Raum ist. □

Beispiele.
(i) Der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm bildet einen vollständigen metrischen Vektorraum, daher ist er ein Baire-Raum.

(ii) Allgemeiner lässt sich sagen: Ist $(X, ||.||)$ ein Banach-Raum, das heißt ein vollständiger normierter Vektorraum, dann ist $d(x, y) = ||x - y||$ eine vollständige Metrik auf X und X ist ein Baire-Raum.

(iii) $C([0, 1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$ mit Supremumsnorm (d.h. $||f - g|| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$) ist ein Banach-Raum und daher auch ein Baire-Raum.

(iv) Die Cantor-Menge ist eine abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{R}$. Daher ergibt die Einschränkung der Metrik von $\mathbb{R}$ auf die Cantor-Menge eine vollständige Metrik für die Cantor-Menge. Damit ist die Cantor-Menge und der zu ihr homöomorphe Cantor-Raum ein Baire-Raum.

(v) Es ist leicht zu zeigen, dass $d(a, b) = 2^{-j(a,b)}, a \neq b, a, b \in \mathcal{N}$ mit $j(a, b) = \min\{j \in \omega \mid a_j \neq b_j\}$, eine vollständige Metrik für den Baire-Raum ist. Dies liefert einen weiteren Beweis dafür, dass der Baire-Raum ein Baire-Raum ist.

4.2 Nirgends differenzierbare stetige Funktionen

Die nachfolgende Proposition ist ein klassisches Beispiel dafür, wie die Eigenschaft, dass komagere Mengen dicht sind, genutzt werden kann, um die Existenz von gewissen Elementen eines Raums zu zeigen. Die dort verwendete Vorgehensweise ist genau dann möglich, wenn das gesuchte Element eine abzählbare Liste von Vorausstzungen erfüllen soll, die jeweils eine dichte offene Menge definieren.

Proposition 4.4. *Es gibt eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die nirgends differenzierbar ist.*

Beweis. $C([0, 1], \mathbb{R})$ ist ein Baire-Raum. Folglich können wir die Existenz einer nirgends differenzierbaren stetigen Funktion beweisen, indem wir eine komagere Menge als Schnitt dichter offener Teilmengen von $C([0, 1], \mathbb{R})$ bilden, sodass die Elemente der komageren Menge nirgends differenzierbar sind. Denn diese Menge wäre dicht und insbesondere nicht leer.
Wir definieren für $0 < r < R$, $\gamma > 0$, $p, q \in [0, 1]$ und $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$:

$$E_{r,R}(p) = B_R(p) \setminus B_r(p), \quad \Delta f(p, q) = \frac{f(p) - f(q)}{p - q},$$

$$\begin{aligned} a(\gamma, r, R) = \{ & g \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid \\ & \forall x \in [0, 1] \exists y, z \in E_{r,R}(x) : |\Delta g(x, y) - \Delta g(x, z)| \geq \gamma\}, \end{aligned}$$

$$A(R) = \bigcup \{a(\beta, s, R) \mid \beta > 1,\ s \in (0, R)\}.$$

Für $f \in \bigcap_{n\in\omega} A(1/n)$ gilt, dass f nirgends differenzierbar ist, da die Folgen der Differenzenquotienten keine eindeutigen Grenzwerte besitzen können.
Wähle $f \in A(R)$ beliebig. Somit gilt $f \in a(\gamma, r, R)$, für ein geeignetes $\gamma > 1$ und ein geeignetes $r \in (0, R)$, und für jedes $x \in [0, 1]$ existieren $y, z \in E_{r,R}(x)$, so dass $|\Delta f(x, y) - \Delta f(x, z)| \geq \gamma$. Für $0 < \epsilon < (\gamma - 1)r/4$ und $g \in B_\epsilon(f)$ gilt:

$$|\Delta g(x, y) - \Delta g(x, z)| \geq \gamma - \frac{4\epsilon}{r} > 1.$$

Mit $\beta = \gamma - 4\epsilon/r$ gilt $g \in a(\beta, r, R) \subset A(R)$. Da $g \in B_\epsilon(f)$ beliebig war, gilt schon $B_\epsilon(f) \subset A(R)$ und da $f \in A(R)$ beliebig war, ist $A(R)$ offen.
Definieren die folgende Funktion:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & \lfloor x \rfloor \text{ ist gerade} \\ -x + \lfloor x \rfloor + 1, & \lfloor x \rfloor \text{ ist ungerade} \end{cases}.$$

Wobei $\lfloor x \rfloor$ für die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich x ist steht. Sein nun $h \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $\delta > 0$ und $R > 0$ gegeben. Weiters seien $\gamma > 1$ und $0 < s < \delta$ beliebig. Wähle positive reele Zahlen $d < R$ sowie r und t mit den folgenden Eigenschaften:

$$\forall x_0, x_1 \in [0, 1] : |x_0 - x_1| < d \Rightarrow |h(x_0) - h(x_1)| < \frac{s}{4}, \tag{4.6}$$

$$r < \min\left\{d, \frac{sd}{8d\gamma + 4s}\right\}, \tag{4.7}$$

$$t < \min\left\{r, d - r, \frac{d}{2}\right\}. \tag{4.8}$$

Ein d wie in der Eigenschaft 4.6 existiert, da h als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ schon gleichmäßig stetig ist. Die Eigenschaft 4.7 impliziert die Ungleichung $s/8r - s/2d > \gamma$.
Definiert man nun $H(x) = h(x) + s\Lambda(2x/t)$, gilt einerseits $H \in B_\delta(h)$ und andererseits $H \in a(\gamma, r, R)$. Denn nach Definition von Λ existieren $y \in E_{r,r+t}(x)$ und $z \in E_{r,d-t}(x)$ für jedes $x \in [0, 1]$, sodass $|s\Lambda(2x/t) - s\Lambda(2y/t)| = s/2$ und $s\Lambda(2z/t) = s\Lambda(2x/t)$ und wegen den Eigenschaften 4.6-4.8 folgt mit mehrmaligem Anwenden der Dreiecksungleichung:

$$|\Delta H(x, y) - \Delta H(x, z)| \geq \frac{s}{8r} - \frac{s}{2d} > \gamma$$

Wegen $r + t < R$ und $d - t < R$ sind $y, z \in E_{r,R}(x)$. Da h und δ beliebig waren und da aus $r < R$ und $\gamma > 1$ $a(\gamma, r, R) \subset A(R)$ folgt, trifft $A(R)$ alle nichtleeren offenen Mengen. $\square$

4.3 Lokalkompakte Hausdorff-Räume

Es gibt noch einen zweiten Satz, dem man unter dem Namen 'Der Bairesche Kategoriensatz' begegnet und der sich auf ähnliche Weise zum Bairschen Kategoriensatz für vollständig metrisierbare Räume beweisen lässt. Diesen Satz wollen wir im nachfolgenden Abschnitt beweisen.

Definition. Sei X ein topologischer Raum.

(i) X ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ zwei offene Mengen $U, V \subset X$ existieren, sodass $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.
(ii) X heißt *lokalkompakt*, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen existiert.

Lemma 4.5. *Sei X ein Hausdorff-Raum und $K \subset X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.*

Beweis. Ist $K = X$, dann ist K abgeschlossen. Wir nehmen an $K \neq X$. Sei $x \in X \setminus K$ beliebig. Da X ein Hausdorff-Raum ist, existieren zu jedem $y \in K$ zwei offene Mengen $U(y), V(y) \subset X$, so dass $x \in U(y)$, $y \in V(y)$ und $U(y) \cap V(y) = \emptyset$. Dann ist $K = \bigcup\{V(y) \cap K \mid y \in K\}$, wobei $V(y) \cap K$ offen in K ist. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $K' \subset K$, sodass $K = \bigcup\{V(y) \cap K \mid y \in K'\}$. Definiere $W = \bigcap\{U(y) \mid y \in K'\}$. Aus $U(y) \cap V(y) = \emptyset$ für $y \in K'$, folgt dass $W \cap K = \emptyset$. W ist als endlicher Schnitt offener Mengen offen und es gilt $x \in W$. Auf diese weiße lässt sich für jedes $x \in X \setminus K$, eine offene Menge $W(x)$ finden, sodass $x \in W(x)$ und $W(x) \cap K = \emptyset$. Es gilt $X \setminus K = \bigcup\{W(x) \mid x \in X \setminus K\}$ ist offen. Daher ist K abgeschlossen. $\square$

Theorem 4.6 (Bairescher Kategoriensatz für lokalkompakte Hausdorff-Räume)**.** *Jeder lokalkompakte Hausdorff-Raum ist ein Baire-Raum.*

Beweis. Für $x \in X$ sei $\mathcal{U}_x$ eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen. Definiere $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{U}_x \mid x \in X\}$. Dann gilt $\mathring{A} \neq \emptyset$ für $A \in \mathcal{A}$, da jedes A Umgebung eines Punktes ist. Ist $U \subset X$ offen und nichtleer, dann existiert $x \in X$ und U ist Umgebung von x. Daher existiert $A \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{A}$, sodass $A \subset U$. Sei schließlich $(A_n)_{n \in \omega}$ eine Folge, sodass $A_n \in \mathcal{A}$ und $A_{n+1} \subset A_n$ für $n \in \omega$. Angenommen

$\bigcap_{n\in\omega} A_n = \emptyset$, dann gilt $A_0 = \bigcup_{n\in\omega} A_0 \setminus A_{n+1}$ und $A_0 \setminus A_{n+1}$ ist offen in A_0. Daher existiert $m \in \omega$, sodass $A_0 = \bigcup_{n\in m} A_0 \setminus A_{n+1}$. Weil aber $A_{n+1} \subset A_n$ für $n \in \omega$, folgt, dass $\bigcap_{n\in m+1} A_n = A_m$ und daher $A_m = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass Umgebungen immer nichtleer sind. Es folgt, dass die Annahme $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \emptyset$ falsch war. Setze $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ für $n \in \omega$. Dann erfüllen $\mathcal{A}_n$ für $n \in \omega$ die Eigenschaften 4.1-4.3 aus Lemma 4.2 und somit ist X ein Baire-Raum. $\square$

Beispiele.

(i) Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist auch ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und daher ein Baire-Raum.

(ii) Der Cantor-Raum ist kompakt und metrisierbar, daher ein kompakter Hausdorff-Raum und somit ein Baire-Raum.

(iii) Die rationalen Zahlen als Teilraum von $\mathbb{R}$ sind ein abzählbarer metrischer Raum. Metrische Räume sind immer Hausdorff-Räume und in Hausdorff-Räumen sind einelementige Mengen abgeschlossen. Da $\mathbb{Q}$ keine isolierten Punkte hat, haben die einelementigen Mengen leeres Inneres und sind damit nirgendsdicht. Daher ist $\mathbb{Q}$ eine Menge, die abzählbare Vereinigung nirgendsdichter Mengen ist, das heißt $\mathbb{Q}$ ist mager. Da $\mathbb{Q}$ offen in $\mathbb{Q}$ ist, kann $\mathbb{Q}$ kein Baire-Raum und somit auch nicht lokalkompakt sein.

Bemerkung. In diesem Kapitel haben wir die Aussage, dass im Baire-Raum und im Cantor-Raum komagere Mengen dicht liegen verallgemeinert. Doch diese Verallgemeinerung hat ihren Preis. Während wir im letzten Kapitel eine explizite Vorgehensweise zur Konstruktion der Elemente im abzählbaren Schnitt dichter offener Mengen angegeben haben, haben wir hier stillschweigend das Auswahlaxiom verwendet.

Es stellt sich heraus, dass zumindest schwächere Varianten des Auswahlaxioms notwendig sind, um den Baireschen Kategoriensatz für vollständig metrisierbare Räume oder lokalkompakte Hausdorff-Räume zu beweisen. Im Fall der vollständig metrisierbaren Räume gilt sogar die Äquivalenz zum sogenannten Axiom der abhängigen Auswahl.[1]

5 Der Satz von Kuratowski-Ulam

Im letzten Kapitel, wollen wir eine Verbindung zwischen der Theorie der Baire-Räume und der Maßtheorie betrachten. Wir werden die σ-Algebra der mageren und komageren Mengen, die im ersten Kapitel kurz erwähnt wurde, erweitern und dann den Satz von Kuratowski-Ulam, ein wichtiges Resultat über diese σ-Algebra, beweisen.

Schon bei der Vorarbeit für diesen Satz, wird sich zeigen, dass sich der Begriff der mageren Mengen für Räume mit abzählbaren Basen gut mit der Produkttopologie verträgt.

Definition. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Wenn eine offene Menge $U \subset X$ existiert, sodass $A \triangle U$ mager ist, sagen wir, dass A die *Baire-Eigenschaft* hat.

Proposition 5.1. *Sei X ein topologischer Raum. Die Familie $BP = \{A \subset X \mid A \text{ hat die Baire-Eigenschaft}\}$ ist eine σ-Algebra, das heißt sie enthält die leere Menge und ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen, sowie unter Komplementbildung. Sie ist die kleinste σ-Algebra die alle offenen Mengen und alle mageren Mengen beinhaltet.*

Beweis. Die leere Menge ist offen, daher hat jede magere Menge die Baire-Eigenschaft. Die Vereinigung von abzählbar vielen mageren Mengen ist mager und beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen, daher ist BP abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.
Sei $A \in BP$, dann existieren $U \subset X$ offen, sowie zwei magere Mengen $M_0 \subset U, M_1 \subset X \setminus U$, sodass $A = U \setminus M_0 \cup M_1$. $X \setminus U$ ist abgeschlossen. Für jede abgeschlossene Menge $C \subset X$ gilt, dass $C \setminus \mathring{C}$ nirgendsdicht ist. Denn $C \setminus \mathring{C}$ ist abgeschlossen und für ein offenes $V \subset X$ folgt aus $V \subset C \setminus \mathring{C}$, dass $V \subset C$ und damit $V \subset \mathring{C}$, das heißt $(C \setminus \mathring{C})^{\circ} = \emptyset$. Wegen $(X \setminus A) \triangle (X \setminus U)^{\circ} \subset M_0 \cup M_1 \cup R$ mit $R = (X \setminus U) \setminus (X \setminus U)^{\circ}$ nirgendsdicht, erhalten wir $X \setminus A \in BP$.
Da jede σ-Algebra abgeschlossen unter Komplementbildung, Schnitten und Vereinigungen ist, enthält jede σ-Algebra, die alle offenen und mageren Mengen enthält, mit $U \subset X$ offen und $M_0, M_1 \subset X$ mager auch alle Mengen der Form $U \setminus M_0 \cup M_1$. $\square$

Bemerkung. Die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält, ist die Borel-σ-Algebra. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Maßtheorie und in der deskriptiven Mengenlehre.
In der deskriptiven Mengenlehre unterteilt man die Mengen der Borel-σ-Algebra von $\mathbb{R}$ (oder von einem allgemeinem separablen vollst. metr. Raum) anhand ihrer Komplexität und gliedert sie so in die sogenannte Borel-Hierarchie ein.
Alle Borel-Mengen besitzen trivialerweise die Baire-Eigenschaft. Bei ihren stetigen Bildern und deren Komplementen, den analytischen und koanalytischen Mengen, verhält es sich etwas komplizierter. Aber auch für diese Mengen lässt sich in ZFC zeigen, dass sie die Baire-Eigenschaft besitzen. Die analytischen und koanalytischen Mengen bilden die nächst höhere Ebene nach den Borel-Mengen in der Projektiven Hierarchie (vgl. Marker [4, S. 39-40]).
Es lässt sich zeigen, dass die Antwort auf die Frage, ob alle projektiven Mengen

die Baire-Eigenschaft haben unabhängig vom ZFC-Axiomensystem ist. Ergänzt man ZFC mit dem Axiom der Projektiven Determiniertheit ergibt sich, dass alle projektiven Mengen die Baire-Eigenschaft haben (vgl. Woodin [8, S. 4]). Im Gegensatz dazu erhält man mit dem Konstruierbarkeitsaxiom, dass schon eine Ebene über den analytischen und koanalytischen Mengen eine projektive Menge existiert, die nicht die Baire-Eigenschaft hat.[7]

Definition. Seien X und Y zwei Mengen und $A \subset X \times Y$. Definiere den *Schnitt* von A in $x \in X$ bzw. in $y \in Y$ wie folgt:

$$A_x = \{(a_1, a_2) \in A \mid a_1 = x\}, \quad A^y = \{(a_1, a_2) \in A \mid a_2 = y\}.$$

Lemma 5.2. *Seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbaren Basen und $A \subset X \times Y$ nirgendsdicht. Dann sind die zwei Mengen $\{x \in X \mid A_x \text{ ist nirgendsdicht}\}$ und $\{y \in Y \mid A^y \text{ ist nirgendsdicht}\}$ komager.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für X und $\mathcal{B}'$ eine abzählbare Basis für Y. Definiert man $D(W) = \{x \in X \mid A_x \text{ ist dicht in } W\}$ für $W \in \mathcal{B}'$, gilt $\bigcup\{D(W) \mid W \in \mathcal{B}'\} = X \setminus \{x \in X \mid A_x \text{ ist nirgendsdicht}\}$. Sei $V \in \mathcal{B}'$ beliebig. Da A nirgendsdicht ist existiert zu jedem $U \in \mathcal{B}$ eine nichtleere offene Teilmenge von $(U \times V) \setminus A$ und somit existieren nichtleere $U' \in \mathcal{B}$ und $V' \in \mathcal{B}'$, sodass $V' \cap A_x = \emptyset$ für alle $x \in U'$ gilt. Folglich liegt für $x \in U'$, dass A_x nicht dicht in V ist, das heißt $U' \subset X \setminus D(V)$. Da U und V beliebig waren sind die Mengen $D(W)$ für $W \in \mathcal{B}'$ nirgendsdicht und $\{x \in X \mid A_x \text{ ist nirgendsdicht}\}$ ist, als Komplement einer abzählbaren Vereinigung von mageren Mengen, komager. Für $\{y \in Y \mid A^y \text{ ist nirgendsdicht}\}$ erfolgt der Beweis analog mit einer abzählbaren Basis für X. □

Lemma 5.3. *Seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbaren Basen, $A \subset X$ und $B \subset Y$. $A \times B$ ist genau dann mager, wenn A oder B mager ist.*

Beweis. Ist A mager, existiert eine Folge nirgendsdichter Mengen $(S_k)_{k\in\omega}$, sodass $A = \bigcup_{k\in\omega} S_k$. Die Mengen $S_k \times B$ sind ebenfalls nirgendsdicht und somit ist $\bigcup_{k\in\omega} S_k \times B = A \times B$ mager. Genauso gilt, dass $A \times B$ mager ist, falls B mager ist. Für die Implikation in die andere Richtung, nehmen wir an $A \times B$ ist mager, und lässt sich daher als Vereinigung abzählbar vieler nirgendsdichter Mengen schreiben, $A \times B = \bigcup_{k\in\omega} M_k$. Dann existier für jedes $k \in \omega$ ein komagere Menge $C_k \subset X$, so dass für alle $x \in C_k$ gilt, dass $(M_k)_x$ nirgendsdicht ist. $C = \bigcap_{k\in\omega} C_k$ ist ebenfalls komager. Gilt $A \cap C = \emptyset$, ist A mager. Andernfalls sei $x_0 \in A \cap C$. Dann gilt $B = (A \times B)_{x_0} = \bigcup_{k\in\omega}(M_k)_{x_0}$. B ist mager. □

[7] Bei Marker [4, S. 42] findet man zwar keinen Beweis zu diesem Resultat, jedoch wird die Vorgehensweise anhand des analogen Resultats für Lebesgue-Messbarkeit demonstriert.

Korollar 5.4. *Seien X und Y zwei Baire-Räume mit abzählbaren Basen. Dann ist auch $X \times Y$ ein Baire-Raum.*

Beweis. Sei $A \subset X \times Y$ eine beliebige offene Menge. Dann existieren zwei offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$, sodass $U \times V \subset A$. Da X und Y Baire-Räume sind, sind U und V nicht mager und aus Lemma 5.3 folgt, dass auch $U \times V$ nicht mager ist. Damit ist A nicht mager und da A beliebig war, sind alle offenen Mengen nicht mager. Aus Lemma 4.1 folgt, dass $X \times Y$ ein Baire-Raum ist. $\square$

Bemerkung. Die Aussage des Korollars 5.4 lässt sich nicht auf alle Baire-Räume verallgemeinern. Natürlicherweise stellt sich an dieser Stelle die Frage nach einem Beispiel zweier Baire-Räume X und Y ohne abzählbare Basen, sodass $X \times Y$ kein Baire-Raum ist. Unter Annahme der Kontinuumshypothese bewies John C. Oxtoby 1960, dass ein Baire-Raum existiert, dessen Produkt mit sich selbst kein Baire-Raum mehr ist [5]. Paul E. Cohen verbesserte 1976 dieses Resultat und demonstrierte, dass die Annahme der Kontinuumshypothese nicht notwendig für einen solchen Existenzbeweis ist.[2]

Lemma 5.5. *Seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbaren Basen und $A \subset X \times Y$ offen und nicht mager. Dann existieren nicht magere offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$, sodass $U \times V \subset A$.*

Beweis. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ abzählbare Basen für X respektive Y. Dann bildet $\mathcal{D} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B},\ V \in \mathcal{B}'\}$ eine abzählbare Basis für $X \times Y$. Da A offen und nichtleer ist, existiert $I \subset \mathcal{D}$, sodass $A = \bigcup I$. Wären alle $W \in I$ mager, so wäre auch A mager, da I abzählbar ist. Folglich existiert eine nicht magere Menge $N \in I$. Für ein geeignetes $U \in \mathcal{B}$ und ein geeignetes $V \in \mathcal{B}'$ ist $N = U \times V$. Wegen Lemma 5.3 sind U und V nicht mager. $\square$

Theorem 5.6 (Kuratowski-Ulam)**.** *Seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbaren Basen und $A \subset X \times Y$ eine Menge mit der Baire-Eigenschaft. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) A ist mager (bzw. komager).
(ii) Die Menge $\{x \in X \mid A_x \text{ ist mager}\}$ (bzw. $\{x \in X \mid A_x \text{ ist komager}\}$) ist komager.
(iii) Die Menge $\{y \in Y \mid A^y \text{ ist mager}\}$ (bzw. $\{y \in Y \mid A^y \text{ ist komager}\}$) ist komager.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ist A mager, gibt es eine Folge nirgendsdichter Mengen $(S_k)_{k\in\omega}$, sodass $A = \bigcup_{k\in\omega} S_k$. Wegen Lemma 5.2 existiert zu jedem $k \in \omega$ eine

komagere Menge C_k, sodass für $x \in C_k$ gilt, dass $(S_k)_x$ nirgendsdicht ist. Dann ist $C = \bigcap_{k\in\omega} C_k$ ebenfalls komager. Für alle $x \in C$ und für alle $k \in \omega$ ist $(S_k)_x$ nirgendsdicht und somit ist $A_x = \bigcup_{k\in\omega}(S_k)_x$ mager für alle $x \in C$. Die Menge $\{x \in X \mid A_x \text{ ist mager}\}$ ist folglich Obermenge von C und damit ebenfalls komager.
$(ii) \Rightarrow (i)$: (Wir zeigen die Kontraposition "nicht $(i) \Rightarrow$ nicht (ii)".) Hat A die Baire-Eigenschaft existiert eine offene Menge $B \subset X \times Y$, sodass $A \triangle B$ mager ist. Ist A zusätzlich nicht mager, folgt aus $A \subset B \cup (A \triangle B)$, dass B nicht mager ist. Wegen Lemma 5.5 finden wir zwei nicht magere offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $U \times V \subset B$. $M = (U \times V) \setminus A$ ist als Teilmenge von $A \triangle B$ mager. Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir, dass sich zu M eine komagere Menge $C \subset X$ finden lässt, sodass M_x für alle $x \in C$ mager ist. Da U nicht mager ist, ist auch $C \cap U$ nicht mager. Für $x \in C \cap U$ ist $V \setminus A_x = M_x$ mager und da V nicht mager ist, muss für alle $x \in C \cap U$ A_x nicht mager sein. Es folgt $C \cap U \cap \{x \in X \mid A_x \text{ ist mager}\} = \emptyset$. Da die Menge $C \cap U$ nicht mager ist, trifft sie jede komagere Menge. Folglich kann $\{x \in X \mid A_x \text{ ist mager}\}$ nicht komager sein.
$(i) \Leftrightarrow (iii)$: Die Behauptung folgt daraus, dass die Rollen von X und Y in den auftretenden Begriffen vertauschbar sind.
Die analogen Aussagen über komagere Mengen folgen durch Anwenden des Resultats für magere Mengen auf die Komplemente $(X \times Y) \setminus A$, $Y \setminus A_x$ und $X \setminus A^y$. □

Bemerkung. Der Satz von Kuratowski-Ulam liefert ein Analogon für magere Mengen zum Satz von Fubini für Nullmengen aus der Maßtheorie. Der Satz von Fubini besagt, dass für fast alle $x \in X$ (d.h. für alle bis auf eine Nullmenge) der Schnitt A_x einer Nullmenge A im Produktraum $X \times Y$ eine Nullmenge in Y ist (vgl. Oxtoby [6, S. 53]).

Das nachfolgende Korollar wird manchmal auch noch zum Satz von Kuratowski-Ulam gezählt.

Korollar 5.7. *Seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbaren Basen und $A \subset X \times Y$ eine Menge mit der Baire-Eigenschaft. Dann sind die Mengen*

$$\{x \in X \mid A_x \textit{ hat die Baire-Eigenschaft}\}$$

und

$$\{y \in Y \mid A^y \textit{ hat die Baire-Eigenschaft}\}$$

komager.

Beweis. Da A die Baire-Eigenschaft hat existieren eine offene Menge B und eine magere Menge M, sodass $M = A \triangle B$. Aus dem Satz von Kuratowski-Ulam folgt die Existenz einer komageren Menge $C \subset X$, mit der Eigenschaft, dass M_x für alle $x \in C$ mager ist. Weiters gilt, dass B_x für alle $x \in X$ offen ist. Denn für eine geeignete Indexmenge I und mit geeigneten offenen Mengen $U_i \subset X$, $V_i \subset Y$ für $i \in I$ lässt sich $B = \bigcup\{U_i \times V_i \mid i \in I\}$ schreiben und somit ist $B_x = \bigcup\{V_i \mid i \in I, x \in U_i\}$.
Da $M_x = A_x \triangle B_x$ folgt, dass A_x für alle $x \in C$ die Baire-Eigenschaft hat und damit dass $\{x \in X \mid A_x \text{ hat die Baire-Eigenschaft}\}$ als Obermenge von C ebenfalls komager ist. Für $\{y \in Y \mid A^y \text{ hat die Baire-Eigenschaft}\}$ verläuft der Beweis wieder analog. □

Literatur

[1] Charles E. Blair. *The Baire category theorem implies the principle of dependent choices*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.(25. Ausg.), 1977.

[2] Paul E. Cohen. *Products of Baire Spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society (55. Ausg.), 1976. URL: https://www.jstor.org/stable/2041855?seq=1#page_scan_tab_contents.

[3] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. New York: Springer, 1995. URL: https://www.springer.com/de/book/9780387943749.

[4] David Marker. *Descriptive Set Theory*. lecture notes, 2002. URL: http://homepages.math.uic.edu/~marker/math512/dst.pdf.

[5] John C. Oxtoby. *Cartesian products of Baire spaces*. 1960. URL: http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm49/fm49113.pdf.

[6] John C. Oxtoby. *Measure and Category*. 2nd Edition. New York: Springer, 1980. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387905082.

[7] Oskar Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen - Bd. 1: Elementare Kettenbrüche*. Wiesbaden: Springer, 1977. URL: https://www.springer.com/gp/book/9780387905082.

[8] W. Hugh Woodin. *Strong Axioms of Infinity and the search for V*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2010. URL: http://logic.harvard.edu/EFI_Woodin_StrongAxiomsOfInfinity.pdf.