BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Das Wadge-Spiel und die Wadge-Hierarchie

Verfasser

Michael Koller

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc.)

Wien, im Monat August 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 033621
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuerin:	Dr. Sandra Müller, MSc. MSc.

Zusammenfassung

Eine Menge $A \subseteq \omega^\omega$ heißt Wadge-reduzierbar auf eine Menge $B \subseteq \omega^\omega$, wenn es eine stetige Abbildung $f : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ gibt, sodass A das Urbild von B ist. Dadurch wird auf natürliche Weise eine Äquivalenzrelation induziert, indem zwei Mengen äquivalent sind, wenn sie sich gegenseitig reduzieren. Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, dass diese daraus entstehenden Äquivalenzklassen wohlgeordnet werden können, was aber nur fast gelingen wird. Die Herangehensweise an diese Problemstellung erfolgt über Gale-Stewart-Spiele, wessen Theorie in den ersten vier Kapiteln erarbeitet wird. Abschließend wird ohne Beweis eine Beschreibung der daraus resultierenden Hierarchie gegeben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

William W. Wadge verwendete im Zuge seiner im Jahre 1984 erschienenen Dissertation 'Reducibility and Determinateness on the Baire Space' ein eigentlich schon bekanntes Konzept, nämlich die stetige Reduzierbarkeit, um Teilmengen der reellen Zahlen zu strukturieren und auf mengentheoretische, topologische und maßtheoretische Eigenschaften zu untersuchen. Stetige Reduzierbarkeit, welche im Kontext des Baire-Raumes Wadge-Reduzierbarkeit genannt wird, wurde bereits schon seit den Anfängen der modernen Topologie, ca. 1920 verwendet. Ein Grund wieso es über 50 Jahre gedauert hat bis jemand auf die Idee gekommen ist, dies zur Untersuchung der reellen Zahlen zu verwenden, ist, dass ein unerlässliches Hilfsmittel gefehlt hat. Sogenannte unendliche zwei-Personen-Spiele wurden zwar schon das erste mal ca. 1930 erwähnt, jedoch wären diese für unsere Zwecke ohne dem Axiom der Determiniert, welches 1962 von J. Mycielski und H. Steinhaus eingeführt wurde, unnötig. William Wadge war schließlich der erste, der auf die Idee gekommen ist Stetige Reduzierbarkeit und unendliche zwei-Personen-Spiele zu verbinden und somit ein umfangreiches Gebiet der mathematischen Logik zu begründen, welches bis heute immer noch erforscht wird.
Die Arbeit ist in 6 Kapitel unterteilt, wobei in den ersten vier wichtige Grundlagen, die zum Verständnis des weiteren Textes unerlässlich sind, erarbeitet werden. Im ersten Kapitel wird eine kurze historische Einleitung gegeben. Das zweite Kapitel widmet sich dem Setting der Arbeit, dem sogenannten Baire-Raum. Im dritten Kapitel werden unendliche zwei-Personen-Spiele behandelt, woraufhin im nächsten Kapitel auftretende axiomatische Fragestellungen beantwortet werden. Das fünfte Kapitel, welches den Hauptteil der Arbeit bildet widmet sich dem Beweis der Fundiertheit. Abschließend werden die daraus resultierenden Hierarchien beschrieben.
Als Grundlage dieser Arbeit und insbesondere Kapitel 2,3,5.3 und 5.4 dient das Skriptum *Infinite Games*[3] von Y. Khomskii. Definitionen und Aufbau des Kapitels 5.2 stammen aus *Classical Descriptive Set Theory*[1] von A. Kechris. Der Beweis des Wadge-Lemmas sowie Satz 4.3 sind sowohl aus *The Higher Infinite*[7] von A. Kanamori, als auch *Infinite Games*[3] von Y. Khomskii entnommen. Die etwas technische Definition des Wadge-Spiels stammt aus der Doktorarbeit *Functions of the first Baire class*[8] von R. Carroy. Um einen Überblick über die Entdeckung der Wadge-Grade zu bekommen kann im Blog *https://billwadge.wordpress.com/*[6] von W. Wadge bzw. in seinem in *Wadge Degrees and Projective Ordinals*[2] verfassten Artikel nachgelesen werden.

2 Der Baire-Raum ω^ω

Interessanterweise hat sich herausgestellt, dass sich die reellen Zahlen für diese Zwecke nicht wirklich gut eigenen, sondern dass es viele Vorteile und nur wenige Nachteile mit sich bringt, Folgen natürlicher Zahlen zu betrachten. Über die Gründe lässt sich jedoch erst sinnvoll reden, sobald man auf dieser Menge eine Topologie eingeführt hat.

Definition 2.1. $\omega^\omega := \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} | f \text{ Funktion}\}$ ist die Menge aller Folgen natürlicher Zahlen.

Definition 2.2. Sei $s \in \omega^{<\omega}$ eine endliche Folge

- s heißt Anfangsstück von $x \in \omega^{\leq\omega}$, wenn es ein $y \in \omega^{\leq\omega}$ gibt, sodass $x = s^\frown y$, schreibe $s \lhd x$.
- $O(s) := \{x \in \omega^\omega | s \lhd x\}$ heißt einfach offene Menge.
- Eine Menge $A \subseteq \omega^\omega$ heißt offen, wenn $A = \cup\{O(s) | s \in I\}$ für $I \subseteq \omega^{<\omega}$.
- Eine Menge $B \subseteq \omega^\omega$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $B^c = \omega^\omega \backslash B$ offen ist.
- $s, t \in \omega^{<\omega}$ heißen kompatibel, schreibe $s||t$, wenn $s \lhd t \vee t \lhd s \vee s = t$ ist. Ansonsten heißen sie inkompatibel und man schreibt $s \perp t$.

Lemma 2.1. *Seien $s, t \in \omega^{<\omega}$, dann gilt:*

1. $s \lhd t \longleftrightarrow O(t) \subseteq O(s)$
2. $s||t \longleftrightarrow O(s) \subseteq O(t) \vee O(t) \subseteq O(s)$
3. $s \perp t \longleftrightarrow O(s) \cap O(t) = \emptyset$
4. $O(s) \cap O(t)$ *ist entweder* $\emptyset, O(s)$ *oder* $O(t)$

Beweis. 1.($\rightarrow$) Angenommen $s \lhd t$, dann gilt

$$x \in O(t) \longrightarrow t \lhd x \longrightarrow s \lhd x \longrightarrow x \in O(s)$$

($\leftarrow$) Angenommen $s \ntriangleleft t$, dann ist entweder $lh(s) > lh(t)$ oder es existiert ein i, sodass $s(i) \neq t(i)$. Sei $x \in O(t)$, dann ist $x \notin O(s)$, da $s \ntriangleleft x$ ist.

2. folgt aus 1.

3. Ist $s \perp t$, dann gibt es ein i, sodass $s(i) \neq t(i)$ ist. Dann ist aber jede Erweiterung von s keine Erweiterung von t und umgekehrt.

4. Es gilt entweder $s||t$ oder $s \perp t$, daher ist $O(s) \cap O(t)$ entweder $\emptyset, O(s)$ oder $O(t)$. $\square$

Satz 2.1. (ω^ω, T) *ist ein topologischer Raum,* $T := \{A \subseteq \omega^\omega | A$ *offen*$\}$.

Beweis. 1. $\emptyset$ ist offen und ω^ω ist offen, da $\omega^\omega = O(())$ ist.

2. Eine beliebige Vereinigung von Vereinigungen von einfach offenen Mengen ist wieder eine Vereinigung von einfach offenen Mengen, und somit offen.

3. Seien A, B offen, dann ist $A = \cup\{O(s)|s \in J_1\}$ und $B = \cup\{O(t)|t \in J_2\}$ für $J_1, J_2 \subseteq \omega^{<\omega}$ und $A \cap B = \cup\{O(s) \cap O(t)|s \in J_1, t \in J_2\}$. Nach Lemma 2.1. ist aber $O(s) \cap O(t)$ entweder $\emptyset$ oder wieder eine einfach offene Menge. Daraus folgt, dass $A \cap B$ offen ist. $\square$

Bemerkung 2.1. (ω^ω, T) wird Baire-Raum genannt und im folgenden nur mit ω^ω bezeichnet.

Definition 2.3. Die Menge 2^ω der $0, 1$-Folgen ist bezüglich der Spurtopologie ein topologischer Unterraum von ω^ω und wird Cantor-Raum genannt.

Ein Grund für den Wechsel von den reellen Zahlen zu Folgen natürlicher Zahlen ist die unendlich oft auftretende Mehrdeutigkeit in der Darstellung der Zahlen. Zum Beispiel ist $0,99\ldots = 1$. Dieses Phänomen ist auf den topologischen Zusammenhang von $\mathbb{R}$ zurückzuführen. Diese Eigenschaft ist in der Analysis von großem Interesse, jedoch bringt sie einige negative Eigenschaften für mengentheoretische Zwecke mit. So ist es zum Beispiel sehr einfach eine Bijektion von $\omega^\omega \times \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ zu finden, jedoch ist es um einiges schwieriger eine solche Bijektion von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ anzugeben. Allgemeiner kann man sagen, dass in der deskriptiven Mengenlehre die 'Analyse und Manipulation von unendlicher Information viel interessanter als die Limesbildung von Punkten auf einem Kontinuum'[1]ist. Hierbei wird klar, dass der Baire-Raum das natürliche Objekt der Untersuchung in der deskriptiven Mengenlehre ist. Viele topologische Eigenschaften werden von stetigen Abbildungen erhalten. Ein polnischer Raum ist ein vollständig metrisierbarer und separabler topologischer Raum. Beispiele hierfür wären ω^ω,$\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^n$,$[0, 1]^n$,$\ldots$. Man kann zeigen, dass jeder polnische Raum, also insbesondere auch $\mathbb{R}$, stetiges Bild des Baire-Raums ist. Das ist überaus nützlich, da es uns erlaubt im komfortablen Baire-Raum zu arbeiten, und trotzdem noch Resultate über $\mathbb{R}$ und sogar jeden polnischen Raum zu erzielen.

Definition 2.4. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen des Baire-Raumes konvergiert gegen $x \in \omega^\omega$, schreibe $x_n \longrightarrow x$, genau dann, wenn

$$\forall s \triangleleft x \, \exists N \, \forall n \geq N (s \triangleleft x_n).$$

[1]Zitat; *Reelle Zahlen, Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*[5], Seite 294

Definition 2.5. Eine Abbildung $f : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ heißt stetig, wenn für jede offene Menge $A \subseteq \omega^\omega$ das Urbild $f^{-1}(A)$ offen ist.

Bemerkung 2.2. Der Baire-Raum ω^ω ist ein metrischer Raum und erfüllt somit das erste Abzählbarkeitsaxiom. Daraus folgt, dass Stetigkeit äquivalent zur Folgenstetigkeit ist. Das führt zu einer in der Praxis handlicheren Charakterisierung der Stetigkeit.

Lemma 2.2. *Eine Abbildung $f : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ heißt stetig, wenn für jedes $x \in \omega^\omega$ $(\forall s \lhd f(x)\, \exists t \lhd x\, \forall y (t \lhd y \longrightarrow s \lhd f(y)))$ gilt.*

Beweis. Das ist die Definition der Folgenstetigkeit im Kontext des Baire-Raums, welche nach Bemerkung 2.2 äquivalent zur Stetigkeit ist. □

Das bedeutet aber, dass diese Abbildung f genau dann stetig ist, wenn für jedes $x \in \omega^\omega$ jedes endliche Anfangsstück von $f(x)$ nur von endlich vielen Folgengliedern von x abhängt.

Bemerkung 2.3. Eine alternative Beschreibung der Topologie des Baire-Raumes wäre die Produkttopologie auf $\omega \times \omega \times \ldots \times \omega$, wobei jedes ω mit der diskreten Topologie ausgestattet ist.

3 Gale-Stewart-Spiele

Definition 3.1. Sei $A \subseteq \omega^\omega$ beliebig. Ein Gale-Stewart-Spiel $G(A)$ wird wie folgt gespielt:

- Es gibt zwei Spieler, Spieler I und Spielerin II, welche abwechselnd eine natürliche Zahl auswählen.
- Zu jedem Zug i wird die Wahl von Spieler I als x_i und die Wahl von Spielerin II als y_i bezeichnet, wobei das Spiel $G(A)$ in der 0-ten Runde beginnt.

  $$\begin{array}{r||cccccccccc} \text{I:} & x_0 & & x_1 & & \dots & & x_i & & \dots & \\ \hline \text{II:} & & y_0 & & y_1 & & \dots & & y_i & & \dots \end{array}$$

  $z := (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$ ist die unendliche Folge der Spielzügen, welche auch Durchgang des Spiels genannt wird.

- Spieler I gewinnt das Spiel $G(A)$ genau dann, wenn $z \in A$, und Spielerin II gewinnt genau dann, wenn $z \notin A$.
- Die Menge A wird Gewinnmenge genannt.

Definition 3.2. Sei $G(A)$ ein Gale-Stewart-Spiel. Eine Strategie für Spieler I ist eine Abbildung

$$\sigma : \{s \in \omega^{<\omega} | lh(s) \equiv 0(2)\} \longrightarrow \omega$$

Eine Strategie für Spielerin II ist eine Abbildung

$$\tau : \{s \in \omega^{<\omega} | lh(s) \equiv 1(2)\} \longrightarrow \omega$$

Definition 3.3. Sei σ eine Strategie für Spieler I und $y = (y_0, y_1, \dots)$ eine beliebige Folge von Spielzügen von Spielerin II, dann ist $\sigma \star y := (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$ wie folgt definiert:

- $x_0 := \sigma(())$
- $x_{i+1} := \sigma((x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i))$

Sei τ eine Strategie für Spielerin II und $x = (x_0, x_1, \dots)$ eine beliebige Folge von Spielzügen von Spieler I, dann ist $x \star \tau := (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$ wie folgt definiert:

- $y_0 := \tau((x_0))$
- $y_{i+1} := \sigma((x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_i, y_i, x_{i+1}))$

Definition 3.4. $P_\sigma := \{\sigma \star y | y \in \omega^\omega\}$ ist die Menge aller möglichen Durchgänge des Spiels $G(A)$, wobei sich Spieler I an die Strategie σ hält. Analog ist $P_\tau := \{x \star \tau | x \in \omega^\omega\}$ die Menge aller möglichen Durchgänge des Spiels $G(A)$, in der sich Spielerin II an die Strategie τ hält.

Definition 3.5. Eine Strategie σ heißt Gewinnstrategie für Spieler I im Spiel $G(A)$ genau dann, wenn für jedes $y \in \omega^\omega$, $\sigma \star y \in A$ ist.

Eine Strategie τ heißt Gewinnstrategie für Spielerin II im Spiel $G(A)$ genau dann, wenn für jedes $x \in \omega^\omega$, $x \star \tau \notin A$ ist.

Definition 3.6. Ein Spiel $G(A)$ heißt determiniert, wenn entweder Spieler I oder Spielerin II eine Gewinnstrategie hat. Eine Teilmenge $A \subseteq \omega^\omega$ heißt determiniert, wenn das Spiel $G(A)$ determiniert ist.

4 Determiniertheit

Ein entscheidender Schritt zur Entwicklung der Wadge-Theorie war es Determiniertheit zu verwenden um stetige Funktionen zu konstruieren. Da aber in ZF keine Aussage getroffen werden kann, ob jede Menge determiniert ist und in ZFC sogar Mengen konstruiert werden können, welche nicht determiniert sind, blieb nichts anderes übrig als Determiniertheit axiomatisch anzunehmen. Der Preis, welcher dafür zu zahlen ist, ist jedoch, dass das Auswahlaxiom in seinem vollen Umfang nicht mehr gilt. Damit aber nicht alle Aussagen, welche aus dem Auswahlaxiom folgen verloren gehen, nimmt man eine abgeschwächte Version des Auswahlaxioms, das sogenannte Axiom der abhängigen Auswahl an, welches eine unerlässliche Rolle im Beweis der Fundiertheit der Wadge-Ordnung spielen wird.

4.1 Das Auswahlaxiom

Definition 4.1. Das Auswahlaxiom (AC) besagt:

$$\forall x(x \neq \emptyset \wedge \forall y \in x \forall y' \in x(y \cap y' \neq \emptyset \leftrightarrow y = y') \rightarrow (\exists z \forall y \in x\, \exists u\, z \cap y = \{u\}))$$

Das heißt jede nichtleere Menge, die aus paarweisen disjunkten Mengen besteht, besitzt eine 'Auswahlmenge'.

Definition 4.2. Das Axiom der abhängigen Auswahl (DC) besagt:

Sei X eine nichtleere Menge, $<$ eine zweistellige Relation auf X, sodass für jedes $b \in X$ ein $a \in X$ mit $a < b$ existiert, dann gibt es eine Folge $a_0, a_1, \ldots$, sodass $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 4.1. (AC) $\longrightarrow$ (DC)

Definition 4.3. Eine zweistellige Relation $<$ auf einer Menge X heißt lineare Ordnung, wenn $<$ antireflexiv, transitiv und vergleichbar ist, das heißt für je zwei Elemente $x, y \in X$ gilt entweder $x < y$, $y < x$ oder $x = y$.

Definition 4.4. Eine Wohlordnung auf einer Menge X ist eine lineare Ordnung $<$, welche fundiert ist. Das heißt, dass jede nichtleere Teilmenge $Y \subseteq X$ ein $<$-minimales Element besitzt.

Lemma 4.1. *(DC) Eine Relation $<$ auf einer Menge X ist fundiert, genau dann, wenn es keine unendliche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, für welche $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis. Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine unendliche absteigende Folge, dann hat die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kein minimales Element und somit ist $<$ nicht fundiert.
Angenommen $<$ ist nicht fundiert, dann gibt es eine nichtleere Teilmenge

$A \subseteq X$, welche kein minimales Element besitzt. Mit Hilfe von DC kann man nun eine unendlich absteigende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren. $\square$

Satz 4.1. *(Wohlordnungssatz von Zermelo) Folgende zwei Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es gilt das Auswahlaxiom.*
2. *Jede Menge lässt sich wohlordnen.*

Beweis. Siehe *Logische Grundlagen der Mathematik*[9], Seiten $112-115$. $\square$

4.2 Das Axiom der Determiniertheit

Definition 4.5. Das Axiom der Determiniertheit (AD) besagt, dass $G(A)$ determiniert ist, für jedes $A \subseteq \omega^\omega$.

Der folgende Satz gilt auch ohne das Axiom der Determiniertheit anzunehmen.

Satz 4.2. *Sei $A \subseteq \omega^\omega$ eine abzählbare Teilmenge, dann ist $G(A)$ determiniert.*

Beweis. Da A abzählbar unendlich ist, lässt sich A durchnummerieren, sodass $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Definiere für alle $i \in \mathbb{N}$

$$y_i = \tau((x_0, y_0, x_1, \ldots, x_i)) := a_i(2i+1) + 1,$$

wobei $a_i(2i+1)$ das $2i+1-te$ Folgenglied von a_i ist. Wichtig ist nur, dass $y_i \neq a_i(2i+1)$ ist. Sei nun $z = x \star \tau = (x_0, y_0, x_1, \ldots)$ der Durchgang, indem Spieler I ein beliebiges $x \in \omega^\omega$ gespielt hat und Spielerin II sich an die Strategie τ gehalten hat. Nach Konstruktion gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$:

$$z(2i+1) = y_i = \tau((x_0, y_0, \ldots, x_i)) = a_i(2i+1) + 1 \neq a_i(2i+1) \quad (1)$$

Daher ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ $z \neq a_i$ und somit $z \notin A$. Damit ist aber τ eine Gewinnstrategie für Spielerin II. $\square$

Bemerkung 4.2. Die Frage ob vielleicht sogar jede Teilmenge von ω^ω determiniert ist hängt von dem angenommenen Axiomensystem ab, und ist zum Beispiel in ZFC, wie folgender Satz zeigt, mit Nein zu beantworten.

Satz 4.3. *Unter Annahme des Auswahlaxioms existiert eine Teilmenge $A \subseteq \omega^\omega$, sodass $G(A)$ nicht determiniert ist.*

Beweis. Die Anzahl der Strategien für Spieler I bzw. Spielerin II im Spiel $G(A)$ ist $2^{\aleph_0}$. Das folgt, da die Menge der Strategien für einen Spieler, die Menge aller Funktionen von Teilmengen von $\omega^{<\omega}$ nach ω ist. Da $\omega^{<\omega}$ abzählbar ist, kann man $\omega^{<\omega}$ bijektiv auf ω abbilden. Man kann also jede

Strategie eines Spielers mit einer Abbildung von ω nach ω identifizieren. Die Kardinalität von ω ist $\aleph_0$, daraus folgt die Behauptung.

Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass sich jede Menge wohlordnen lässt. Seien nun $\{\sigma_\alpha | \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ und $\{\tau_\alpha | \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ die geordneten Mengen der Strategien von Spieler I bzw. Spielerin II für das Spiel $G(A)$. Man definiere nun die zwei Mengen $A = \{a_\alpha | \alpha < 2^{\aleph_0}, a_\alpha \in \omega^\omega\}$ und $B = \{b_\alpha | \alpha < 2^{\aleph_0}, b_\alpha \in \omega^\omega\}$ wie folgt rekursiv:

- wähle $a_0 \in P_{\tau_0}$ und $b_0 \in P_{\sigma_0}$, sodass $a_0 \neq b_0$.
- Angenommen für alle $\beta < \alpha$ seien a_β und b_β bereits gewählt worden. Es gilt $|\{b_\beta | \beta < \alpha\}| < 2^{\aleph_0}$ und $|P_{\tau_\alpha}| = 2^{\aleph_0}$. Daher gibt es zumindest ein Element in P_{τ_α}, welches nicht in $\{b_\beta | \beta < \alpha\}$ enthalten ist. Wähle nun dieses Element und bezeichne es als a_α.
  Genauso gilt $|\{a_\beta | \beta < \alpha\} \cup \{a_\alpha\}| < 2^{\aleph_0}$ und $|P_{\sigma_\alpha}| = 2^{\aleph_0}$. Daher gibt es wieder zumindest ein Element in P_{σ_α}, welches nicht in $\{a_\beta | \beta < \alpha\} \cup \{a_\alpha\}$ liegt. Man wähle dieses und bezeichne es als b_α.

Behauptung 4.1. $A \cap B = \emptyset$

Beweis. Sei $a \in A$ beliebig, dann existiert ein $\alpha < 2^{\aleph_0}$, sodass $a = a_\alpha$. Einerseits gilt $a_\alpha \neq b_\beta$ für alle $\beta < \alpha$. Auf der anderen Seite ist für jedes $\gamma \geq \alpha$ $b_\gamma \neq a_\alpha$ und somit $a = a_\alpha \notin B$. □

Behauptung 4.2. A ist nicht determiniert.

Beweis. . Angenommen Spieler I hat eine Gewinnstrategie σ für $G(A)$. Dann ist $P_\sigma \subseteq A$ und es gibt ein $\alpha < 2^{\aleph_0}$, sodass $\sigma = \sigma_\alpha$. Nun ist aber $b_\alpha \in P_{\sigma_\alpha}$, was ein Widerspruch zu Behauptung 4.1 ist, da $b_\alpha \in B$ ist.

Angenommen Spielerin II hat eine Gewinnstrategie τ für $G(A)$. Dann ist $P_\tau \cap A = \emptyset$ und es gibt ein $\alpha < 2^{\aleph_0}$, sodass $\tau = \tau_\alpha$ und somit ist $a_\alpha \in P_{\tau_\alpha}$, was ein Widerspruch ist. □

Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz 4.4. *(Martin): Ist A eine Borelmenge, dann ist $G(A)$ determiniert.*

Beweis. Siehe [10] □

Bemerkung 4.3. (AD) und (DC) sind konsistent relativ zu ZF, wenn man die Existenz großer Kardinalzahlen annimmt.

5 Das Wadgespiel und die Wadgeordnung

Im folgenden Text wird immer $ZF + DC$ angenommen und explizit angegeben an welchen Stellen AD oder AC verwendet wird.

Das Wadge-Spiel, welches eine leicht adaptierte Version des Gale-Stewart-Spiels ist, ist ein wichtiges Werkzeug zur Konstruktion stetiger Abbildungen. An dieser Stelle ist Determiniertheit von überragender Wichtigkeit, da ohne diese im Allgemeinem keine Aussage über die Urbildrelation zweier Mengen und somit auch nicht über die stetige Reduzierbarkeit getroffen werden kann. Als Motivation wird das Lipschitz-Spiel dienen, welches einfacher zu formulieren ist als das Wadge-Spiel und wie der Name vermuten lässt, lipschitzstetige Funktionen produziert, was aber für manche Resultate ausreichend sein wird, da jede lipschitzstetige Abbildung insbesondere stetig ist.

5.1 Das Wadge-Spiel und das Lipschitz-Spiel

Definition 5.1. Seien A und B Teilmengen von ω^ω dann heißt A Wadge-reduzierbar auf B, schreibe $A \leq_W B$, wenn es eine stetige Abbildung $f : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ gibt, sodass $A = f^{-1}(B)$ ist.
Gibt es eine Lipschitzstetige Abbildung $f : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ mit $A = f^{-1}(B)$, dann heißt A Lipschitz-reduzierbar auf B.

Definition 5.2. (Lipschitz-Spiel) Seien $A, B \subseteq \omega^\omega$. Das Lipschitz-Spiel $G^L(A, B)$ wird gespielt wie ein Gale-Stewart-Spiel, das heißt Spieler I und Spielerin II spielen abwechselnd natürliche Zahlen. Dadurch entstehen diesmal jedoch zwei Folgen. Sei $x = (x_0, x_1, \ldots)$ die Folge der Spielzüge von Spieler I und $y = (y_0, y_1, \ldots)$ die Folge der Spielzüge von Spielerin II. Sie gewinnt genau dann, wenn $x \in A \longleftrightarrow y \in B$ ist und er gewinnt genau dann, wenn $x \in A \longleftrightarrow y \notin B$.

I:	x_0		x_1		$\ldots$		x_i		$\ldots$	
II:		y_0		y_1		$\ldots$		y_i		$\ldots$

Seien $A, B \subseteq \omega^\omega$. Dann induziert das Lipschitz-Spiel $G^L(A, B)$ unter Annahme von AD wie folgt Abbildungen:

- Angenommen τ ist eine Gewinnstrategie für Spielerin II. Ein beliebiges $x \in \omega^\omega$ wird auf $f(x) \in \omega^\omega$ abgebildet, wobei $f(x)$ die Folge der Spielzüge von Spielerin II im Spiel $G^L(A, B)$ ist, indem Spieler I die Folge x als Spielzüge spielt und sich Spielerin II an die Gewinnstrategie τ hält.

- Angenommen σ ist eine Gewinnstrategie für Spieler I. Ein beliebiges $y \in \omega^\omega$ wird auf $f(y) \in \omega^\omega$ abgebildet, wobei $f(y)$ die Folge der

Spielzüge von Spieler I im Spiel $G^L(A, B)$ ist, indem Spielerin II die Folge y als Spielzüge spielt und sich Spieler I an die Gewinnstrategie σ hält.

Ist τ eine Gewinnstrategie für Spielerin II, dann wäre die auf diese Weise induzierte Funktion immer lipschitzstetig, was zu restriktiv wäre, wenn man die Wadgeordnung und die dadurch entstehende Struktur untersuchen wollte. Man kann sich nun durch einen kleinen Trick helfen, indem man Spielerin II mehr Macht im Lipschitzspiel gibt. Das schafft man indem Spielerin II in jedem Zug zusätzlich die Möglichkeit hat auszusetzen. Es ist für sie aber notwendig am Ende unendlich oft gespielt zu haben, um das Spiel zu gewinnen. Diese Version des Lipschitzspiels wird Wadge-Spiel genannt. Notationstechnisch führt das jedoch leider zu gewissen Schwierigkeiten.

Definition 5.3. Sei D die Teilmenge von $(\omega \cup s)^\omega$, welche aus allen Folgen mit unendlich vielen Zahlen besteht. Die Abbildung $trsl : (\omega \cup s)^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ ist rekursiv für $x \in D$ wie folgt definiert:

- $trsl(x)(0) = x(m)$, wobei $m = min\{n \in \omega : x(n) \neq s\}$.
- Angenommen $trsl(x)(k)$ ist definiert und gleich $x(m)$ für eine natürliche Zahl $m \geq k$. Dann ist $trsl(x)(k + 1) = x(m')$, wobei $m' = min\{n \geq m + 1 : x(n) \neq s\}$.

Da $x \in D$ ist $trsl(x)$ wohldefiniert.

Definition 5.4. : $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ heißt die symmetrische Differenz der Mengen A und B.

Definition 5.5. Seien $A, B \subseteq \omega^\omega$. Im Wadgespiel $G^W(A, B)$ spielen Spieler I und II abwechselnd natürliche Zahlen, jedoch hat nun Spielerin II die Möglichkeit auszusetzen. In diesem Zug wird dann ein s gespielt. Formal schaut das Spiel wie folgt aus: In der $i - ten$ Runde spielt Spieler I ein $x_i \in \omega^\omega$ und Spielerin II ein $y'(i) \in (\omega \cup s)^\omega$, welches das i-te Folgenglied einer Folge aus $(\omega \cup s)^\omega$ ist. Spielerin II gewinnt genau dann, wenn $y' \in D \wedge (x \in A \leftrightarrow trsl(y) \in B)$, wobei $x = \{x_0, x_1, \ldots\}$ die Folge der Spielzüge von Spieler I und $y = \{y_0, s, y_1, s, s, \ldots\}$ die Folge der Spielzüge von Spielerin II ist.

I:	x_0		x_1		$\ldots$		x_i		$\ldots$	
II:		y_0		s		$\ldots$		y_i		$\ldots$

Bemerkung 5.1. Zu einem gegebenen Durchgang z im Spiel $G^W(A, B)$ definiere die Abbildungen $p : ((\omega \cup (s))^\omega) \longrightarrow \omega^\omega$ und $i : ((\omega \cup (s))^\omega) \longrightarrow ((\omega \cup (s))^\omega)$, welche $z = (x_0, y_0, x_1, s, x_2, \ldots)$ auf $x = (x_0, x_1, \ldots)$ bzw. $y = (y_0, s, y_1, \ldots)$ abbildet. Dann gewinnt Spielerin II das

Spiel $G^W(A, B)$ genau dann, wenn $[i(z) \in D \wedge (p(z) \in A \longleftrightarrow trsl(i(z)) \in B]$. Damit ist das Spiel $G^W(A, B)$ äquivalent zum Gale-Stewart-Spiel $G(Z)$, wobei
$Z := p^{-1}(\omega^\omega \cap [i^{-1}(D^c) \cup (p^{-1}(A) \triangle (trsl \circ i)^{-1}(B)])$.

Bemerkung 5.2. Da $trsl : (\omega \cup s)^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ keine Injektion ist, müssen wir $trsl^{-1}(\cdot)$ als Menge aller Urbilder betrachten.

5.2 Die Wadge-Ordnung und das Wadge-Lemma

Lemma 5.1. *Die Relationen $\leq_W$ auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)$ ist reflexiv und transitiv, das heißt $\leq_W$ ist eine Quasiordnung.*

Beweis. Transitivität folgt, da die Kompositionen stetiger Abbildungen wieder stetig sind. Reflexivität folgt, da die Identitätsabbildung stetig ist. $\square$

Bemerkung 5.3. Antisymmetrie ist im Allgemeinen nicht erfüllt.

Definition 5.6. A heißt Wadge-äquivalent zu B, schreibe $A \equiv_W B$, wenn $A \leq_W B$ und $B \leq_W A$ gilt. Dies ist eine Äquivalenzrelation und man bezeichne die Äquivalenzklassen als $[A]_W := \{B \subseteq \omega^\omega : A \equiv_W B\}$, welche Wadge-Grade genannt werden.

Definition 5.7. Ein Wadge-Grad $[A]_W$ heißt selbstdual, wenn $[A]_W = [A^c]_W$ und nicht selbstdual, wenn $[A]_W \neq [A^c]_W$

Definition 5.8. Man kann nun die Relation $\leq_W$ auf dem Quotientenraum $\mathcal{P}(\omega^\omega)/_{\equiv_W}$ durch $[A] \leq_W [B]$ genau dann, wenn $A \leq_W B$ definieren.

Lemma 5.2. *Die Relation $\leq_W$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)/_{\equiv_W}$, das heißt sie ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.*

Beweis. Reflexivität und Transitivität folgen aus Lemma 5.1. Gilt sowohl $[A] \leq_W [B]$ als auch $[B] \leq_W [A]$, so folgt, dass $A \equiv_W B$ und somit gilt $[A] = [B]$. $\square$

Bemerkung 5.4. Die nächste Frage, die sich nun stellt, wäre ob die Relation $\leq_W$ auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)/_{\equiv_W}$ vergleichbar ist, das heißt, dass für je zwei $A, B \subseteq \omega^\omega$ entweder $[A]_W \leq [B]_W$ oder $[B]_W \leq [A]_W$ gilt.

Lemma 5.3. *Seien $A, B \subseteq \omega^\omega$ mit $A \leq_W B$. Dann gilt $A^c \leq_W B^c$.*

Beweis. Da $A \leq_W B$, gibt es eine stetige Abbildung $f : \omega^\omega \longrightarrow \omega^\omega$ mit $f^{-1}(B) = A$. Aus der Verträglichkeit stetiger Funktionen mit dem Urbild folgt, dass $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(\omega^\omega \setminus B) = f^{-1}(\omega^\omega) \setminus f^{-1}(B) = \omega^\omega \setminus A = A^c$ und somit $A^c \leq_W B^c$. $\square$

Lemma 5.4. *Ist $[A]_W$ ein nicht selbstdualer Wadge-Grad, dann sind $[A]_W$ und $[A^c]_W$ nicht vergleichbar.*

Beweis. Angenommen es gilt $[A]_W \leq_W [A^c]_W$, daraus folgt nach Definition $A \leq_W A^c$. Lemma 5.3. besagt nun, dass $A^c \leq_W A$. Insgesamt folgt, dass $[A]_W = [A^c]_W$, was ein Widerspruch ist. □

Satz 5.1. *(Wadge-Lemma)(AD): Seien $A, B \subseteq \omega^\omega$, dann gilt entweder $A \leq_W B$ oder $B \leq_W A^c$.*

Beweis. Da wir (AD) annehmen, muss einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie in $G^L(A, B)$ haben. Angenommen Spielerin II hat eine Gewinnstrategie τ. Die Abbildung f sei so definiert wie in Definition 5.2. Da τ eine Gewinnstrategie für II ist gilt, dass $f(x) \in B$ genau dann, wenn $x \in A$ und somit ist $A = f^{-1}(B)$. Aus der Stetigkeit von f folgt nun, dass $A \leq_W B$.

Angenommen Spieler I hat eine Gewinnstrategie σ in $G^L(A, B)$. Die Abbildung f sei wieder so definiert wie in Definition 5.2. Da σ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist folgt, dass $f(y) \notin A$ genau dann, wenn $y \in B$ und somit ist $B = f^{-1}(A^c)$. Aus der Stetigkeit von f folgt nun, dass $B \leq_W A^c$. □

Definition 5.9. Seien $A, B \subseteq \omega^\omega$. Definiere eine neue Äquivalenzrelation $\equiv_W^*$ auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)$ durch $A \equiv_W^* B$ genau dann, wenn $A \equiv_W B$ oder $A \equiv_W B^c$. Das liefert einen neuen Quotientenraum $\mathcal{P}(\omega^\omega)/_{\equiv_W^*}$, dessen Elemente $[A]_W^* := \{C \subseteq \omega^\omega : A \equiv_W^* C\}$ grobe Wadgegrade genannt werden. Auf diesem Raum kann man wiederum eine Relation $\leq_W^*$ durch $[A]_W^* \leq_W^* [B]_W^*$ genau dann, wenn $A \leq_W B$ oder $A \leq_W B^c$ definieren.

Korollar 5.1. *Die Relation $\leq_W^*$ auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)/_{\equiv_W^*}$ ist eine lineare Ordnung, das heißt $\leq_W^*$ ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und vergleichbar.*

Beweis. Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität folgen aus den Eigenschaften von $\leq_W$ auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)$. Das Wadge-Lemma liefert direkt die Vergleichbarkeit. □

Lemma 5.5. *(AD) Wenn $A <_W B$, dann gilt*

1. $A \leq_W B$
2. $B \not\leq_W A$
3. $A \leq_W B^c$
4. $B \not\leq_W A^c$

Beweis. 1. und 2. folgen aus der Definition. 3. folgt aus 2. und dem Wadge-Lemma.
4. Um einen Widerspruch zu erziehlen nehmen wir $B \leq_W A^c$ an. Dann folgt aus Lemma 5.3. angewendet auf 1., dass $B \leq_W A^c \leq_W B^c$ ist. Lemma 5.3 auf die Annahme $B \leq_W A^c$ angewendet liefert nun $B \leq_W A^c \leq_W B^c \leq_W A$, was ein Widerspruch zu 2. ist. □

5.3 Banach-Mazur-Spiele

Der Beweis der Fundiertheit der Wadge-Ordnung wird indirekt geführt. Der gewünschte Widerspruch wird erlangt, indem man ein sogenanntes Flipset konstruiert, welches unter Annahme des Axiom der Determiniertheit nicht existieren kann. Um dies zu zeigen benötigen wir Banach-Mazur-Spiele, welche eine Adaption von Gale-Stewart-Spielen sind.

Definition 5.10. Ein Banach-Mazur-Spiel $G^{**}(A)$ wird gespielt wie ein Gale-Stewart-Spiel, nur spielen Spieler I und II endliche, nichtleere Folgen $s_i, t_i \in \omega^{<\omega}$ anstelle von natürlichen Zahlen. Sei $z := s_0{}^\frown t_0{}^\frown s_1{}^\frown t_1{}^\frown \dots$, dann gewinnt Spieler I genau dann wenn $z \in A$ und Spielerin II genau dann wenn $z \notin A$.

Bemerkung 5.5. Jedes Banach-Mazur-Spiel ist, durch passende Umformulierung äquivalent zu einem Gale-Stewart-Spiel. Man bemerke zunächst, dass man $(\omega^{<\omega})^\omega$ bijektiv auf ω^ω abbilden kann. Eine solche Bijektion wäre zum Beispiel durch $F : (\omega^{<\omega})^\omega \longrightarrow \omega^\omega$, $F((s_0, s_1, \dots)) = (s_0^*, s_1^*, \dots)$ gegeben, wobei $s_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ und $s_i^* = p_1^{a_{i1}} p_2^{a_{i2}} \dots p_n^{a_{in}}$ und p_i die i-te Primzahl ist. Dann wäre $G(F(A))$ ein äquivalentes Gale-Stewart-Spiel.

Bemerkung 5.6. Im Folgenden wird nur ein Spezialfall der Banach-Mazur-Spiele betrachtet, nämlich jener in dem nur Elemente aus $2^{<\omega}$ gespielt werden.

Definition 5.11. Eine Teilmenge $X \subset 2^\omega$ heißt Flipset genau dann wenn, für jedes $x, y \in 2^\omega$ $(\exists!\ n\ (x(n) \neq y(n)) \longrightarrow (x \in X \longleftrightarrow y \notin X))$.

Lemma 5.6. *Sei X ein Flipset*

1. *Hat Spieler I eine Gewinnstrategie in $G^{**}(X)$, dann hat er auch eine Gewinnstrategie in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$*

2. *Hat Spielerin II eine Gewinnstrategie in $G^{**}(X)$, dann hat sie auch eine Gewinnstrategie in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$*

Beweis. Ist σ eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G^{**}(A)$, dann sei σ' wie folgt definiert:

1. Der erste Zug $\sigma'(())$ ist eine beliebige Folge der selben Länge wie $\sigma(())$, welche sich nur durch einen Glied unterscheidet.

2. Die nächsten Züge werden gemäß σ gespielt, unter der Annahme der erste Zug wäre $\sigma(())$ gewesen.

Für eine beliebige Folge y von Spielzügen von Spieler II unterscheiden sich $\sigma * y$ und $\sigma' * y$ genau durch einen Eintrag. Da σ eine Gewinnstrategie für Spieler I ist, ist $\sigma * y \in X$. X ist aber ein Flipset, daraus folgt, dass $\sigma' * y \in 2^\omega \backslash X$ und somit eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ ist.

Der Beweis von 2. funktioniert analog. □

Lemma 5.7. *Sei X ein Flipset. Hat Spielerin II eine Gewinnstrategie in $G^{**}(X)$, dann hat Spieler I eine Gewinnstrategie in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$.*

Beweis. Wir wollen nun eine Gewinnstrategie für Spieler I im Spiel $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ definieren. Sei τ eine Gewinnstrategie für Spielerin II in $G^{**}(X)$. Das Spiel $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ wird wie folgt gespielt: Spieler I spielt ein beliebiges s, auf welches Spielerin II mit einem beliebigen t antwortet. An dieser Stelle wird begonnen, das Spiel $G^{**}(X)$ zu spielen. Im ersten Zug spielt Spieler I $s^\frown t$, Spielerin II hält sich an die Gewinnstrategie τ und spielt als Antwort ein s_0. Dieses s_0 wird nun der nächste Zug von Spieler I in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ sein. Darauf antwortet Spielerin II mit einem beliebigen t_0, welches Spieler I als nächsten Zug in $G^{**}(X)$ spielen wird.

$$
\begin{array}{lc||ccccccc}
G^{**}(2^\omega \backslash X): & \text{I:} & s & & s_0 & & s_1 & & \dots \\
\hline
 & \text{II:} & & t & & t_0 & & \dots & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lc||ccccccc}
G^{**}(X): & \text{I:} & s^\frown t & & t_0 & & t_1 & & \dots \\
\hline
 & \text{II:} & & s_0 & & s_1 & & \dots & \\
\end{array}
$$

Da τ eine Gewinnstrategie für Spielerin II ist, gilt für $x := s^\frown t^\frown s_0^\frown t_0^\frown \dots$, dem Ausgang von $G^{**}(X)$, $x \notin X$. Da x aber auch der Ausgang von $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ ist, folgt, dass dies eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ ist. $\square$

Lemma 5.8. *Sei X ein Flipset. Hat Spieler I eine Gewinnstrategie in $G^{**}(X)$, dann hat Spielerin II eine Gewinnstrategie in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$.*

Beweis. Nun wollen wir eine Gewinnstrategie für Spielerin II im Spiel $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ definieren. Sei σ eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G^{**}(X)$. Es werden wieder zwei Spiele gespielt, das Spiel $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ und das Spiel $G^{**}(X)$. Bezeichne den ersten Zug von Spieler I in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ als s_0 und den ersten Zug von Spieler I in $G^{**}(X)$ als $s := \sigma(())$. Wir betrachten nun zwei Fälle

- Fall 1: $|s_0| < |s|$

Spielerin II spielt in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ eine Folge t_0, sodass $|s_0^\frown t_0| = |s|$ und sich $s_0^\frown t_0$ von s durch eine gerade Anzahl an Gliedern unterscheidet. Danach ist s_1 der nächste Zug von Spieler I in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$, welchen Spielerin II als nächstes im Spiel $G^{**}(X)$ spielt. Dann wählt Spieler I nach Gewinnstrategie ein t_1 in $G^{**}(X)$, welches Spielerin II als nächstes im Spiel $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ spielt, usw. Bezeichne $x := s_0^\frown t_0^\frown s_1^\frown t_1^\frown \dots$ den Ausgang von $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ und $y := s^\frown s_1^\frown t_1^\frown s_2^\frown \dots$ den Ausgang von $G^{**}(X)$.

$$
\begin{array}{ll||llllllll}
G^{**}(2^\omega \backslash X): & \text{I:} & s_0 & & s_1 & & s_2 & & \dots \\
\hline
& \text{II:} & & t_0 & & t_1 & & \dots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll||llllllll}
G^{**}(X): & \text{I:} & s & & t_1 & & t_2 & & \dots \\
\hline
& \text{II:} & & s_1 & & s_2 & & \dots &
\end{array}
$$

Dann ist $y \in X$, da σ eine Gewinnstrategie für Spieler I in $G^{**}(X)$ ist. Da sich x und y durch eine gerade Anzahl an Glieder unterscheiden und X ein Flipset ist folgt, dass $x \in X$. Damit ist dies eine Gewinnstrategie für Spieler II in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$.

- Fall 2: $|s_0| \geq |s|$

Nachdem Spieler I die Folge s bzw. s_0 gespielt hat, spielt Spielerin II ein t im Spiel $G^{**}(X)$, sodass $|s^\frown t| > |s_0|$. Darauf antwortet Spieler I mit einem t', nach Gewinnstrategie σ. Es gilt $|s^\frown t^\frown t'| > |s_0|$. Daher kann Spielerin II im Spiel $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ ein t_0 spielen, sodass sich $s_0^\frown t_0$ und $s^\frown t^\frown t'$ durch eine gerade Anzahl an Gliedern unterscheiden und $|s_0^\frown t_0| = |s^\frown t^\frown t'|$. Danach wird so fortgesetzt wie bei Fall 1.

$$
\begin{array}{ll||llllllll}
G^{**}(2^\omega \backslash X): & \text{I:} & s_0 & & s_1 & & s_2 & & \dots \\
\hline
& \text{II:} & & t_0 & & t_1 & & \dots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll||llllllll}
G^{**}(X): & \text{I:} & s & & t' & & t_1 & & \dots \\
\hline
& \text{II:} & & t & & s_1 & & \dots &
\end{array}
$$

Sei nun $x := s_0^\frown t_0^\frown s_1^\frown t_1^\frown \dots$ der Ausgang von $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ und $y := s^\frown t^\frown t'^\frown s_1^\frown t_1^\frown \dots$ der Ausgang von $G^{**}(X)$. Diese zwei Folgen unterscheiden sich wieder durch eine gerade Anzahl an Gliedern, daher folgt die Behauptung wie in Fall 1. $\square$

Satz 5.2. *(AD) Es gibt keine Flipsets in* 2^ω

Beweis. Angenommen es existiert ein Flipset $X \subseteq 2^\omega$, dann gilt:

Hat Spieler I eine Gewinnstrategie in $G^{**}(X)$ dann folgt einerseits, dass Spieler I eine Gewinnstrategie in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ hat, andererseits, dass Spielerin II eine Gewinnstrategie in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ hat.

Hat Spielerin II eine Gewinnstrategie in $G^{**}(X)$ dann folgt einerseits, dass Spieler II eine Gewinnstrategie in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ hat, andererseits, dass Spieler

I eine Gewinnstrategie in $G^{**}(2^\omega \backslash X)$ hat.

Beide Fälle führen zu einem Widerspruch. $\square$

5.4 Fundiertheit

Satz 5.3. *(Martin-Monk)(AD) $\leq_W$ ist eine fundierte Relation auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass es keine unendlich absteigende $<_W$-Folge von Teilmengen von ω^ω gibt. Sein nun, um einen Widerspruch zu erzeugen, $\{A_n : n \in \omega\}$, eine Kollektion von Teilmengen von ω^ω, welche eine unendliche $<_W$-Folge bilden:

$$\ldots <_W A_3 <_W A_2 <_W A_1 \tag{2}$$

Da für jedes n, $A_{n+1} <_W A_n$ gilt, folgt sowohl $A_n \not\leq_W A_{n+1}$ als auch $A_n \not\leq_W A_{n+1}^c$. Das Wadge-Lemma besagt nun, dass es keine Gewinnstrategie für Spieler II in den Spielen $G^W(A_n, A_{n+1}) =: G_n^0$ und $G^W(A_n, A_{n+1}^c) =: G_n^1$ gibt. Aus dem Axiom der Determiniertheit folgt, dass Spieler I für beide Spiele eine Gewinnstrategie haben muss, welche mit σ_n^0 bzw. σ_n^1 benannt werden.

Für ein beliebiges $x \in 2^\omega$, kann man eine unendliche Folge von Wadge-Spielen $(G_0^{x(0)}, G_1^{x(1)}, G_2^{x(2)}, \ldots)$ betrachten, in welchen Spieler I nach den Gewinnstrategien $(\sigma_0^{x(0)}, \sigma_1^{x(1)}, \sigma_2^{x(2)}, \ldots)$ spielt.

Für ein fixes $x \in 2^\omega$ sollen nun sämtliche Wadge-Spiele gleichzeitig gespielt werden, sodass sich Spieler I im Spiel $G_n^{x(n)}$ an die Gewinnstrategie $\sigma_n^{x(n)}$ hält und Spielerin II die Züge des Spielers I aus dem nächsten Spiel $G_{n+1}^{x(n+1)}$ kopiert. Insbesondere setzt II nie aus.

Damit das möglich ist folgt Spielerin II folgendem Diagonalprozess:

Im ersten Spiel $G_0^{x(0)}$ sei $a_0^x(0)$ der erste Zug von Spieler I, welcher der Strategie $\sigma_0^{x(0)}$ folgt. Damit der nächste Zug im ersten Spiel gespielt werden kann, braucht Spielerin II Information aus dem nächsten Spiel $G_1^{x(1)}$. Sei $a_1^x(0)$ der erste Zug von Spieler I im Spiel $G_1^{x(1)}$, welchen Spielerin II im Spiel $G_0^{x(0)}$ als ersten Zug $a_1^x(0)$ spielt.

$$
\begin{array}{rr||ccccccc|l}
G_0^{x(0)}: & \text{I:} & a_0^x(0) & & a_0^x(1) & & a_0^x(2) & & \dots & \dots \longrightarrow a_0^x \\ \cline{2-9}
 & \text{II:} & & a_1^x(0) & & a_1^x(1) & & \dots & & \dots \longrightarrow a_1^x \\
 & & & & & & & & & \\
G_1^{x(1)}: & \text{I:} & a_1^x(0) & & a_1^x(1) & & \dots & & & \dots \longrightarrow a_1^x \\ \cline{2-9}
 & \text{II:} & & a_2^x(0) & & \dots & & & & \dots \longrightarrow a_2^x \\
 & & & & & & & & & \\
G_2^{x(2)}: & \text{I:} & a_2^x(0) & & \dots & & & & & \dots \longrightarrow a_2^x \\ \cline{2-9}
 & \text{II:} & & \dots & & & & & & \dots \longrightarrow a_3^x \\
 & & & & & & & & & \\
G_3^{x(3)}: & \text{I:} & \dots & & & & & & & \dots \longrightarrow a_3^x \\ \cline{2-9}
 & \text{II:} & & & & & & & & \dots \longrightarrow a_4^x
\end{array}
$$

Halten sich beide Spieler an dieses Verfahren, so ist es möglich alle Spiele fertig zu spielen, wobei Spielerin II jeweils die Züge von Spieler I aus dem nächsten Spiel kopiert. Für jedes Spiel $G_n^{x(n)}$ bezeichnet a_n^x die Folge der Spielzüge von Spieler I und a_{n+1}^x die von Spielerin II.

Bemerkung: Die selbe Folge a_{n+1}^x ist auch die Folge der Spielzüge von Spieler I im Spiel $G_{n+1}^{x(n+1)}$.

Da Spieler I jedes Spiel gewinnt, folgt aus der Definition des Wadge-Spiels für $G_n^0 = G^W(A_n, A_{n+1})$ und $G_n^1 = G^W(A_n, A_{n+1}^c)$ für jedes n:

$$x(n) = 0 \longrightarrow (a_n^x \in A_n \longleftrightarrow a_{n+1}^x \notin A_{n+1}) \tag{3}$$

$$x(n) = 1 \longrightarrow (a_n^x \in A_n \longleftrightarrow a_{n+1}^x \in A_{n+1}) \tag{4}$$

Im folgenden wird nun die oben beschriebene Prozedur für zwei verschiedene x und y aus 2^ω verglichen:

Behauptung 5.1. $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\forall\ n \geq m(x(n) = y(n))) \longrightarrow (\forall\ n \geq m(a_n^x = a_n^y))$$

Beweis. Die Folgen a_n^x und a_n^y hängen nur von den Spielen $G_{n'}^{x(n')}$ und $G_{n'}^{y(n')}$ für $n' \geq n$ ab. Falls $x(n') = y(n')$, sind auch die dazugehörigen Spiele gleich und somit $a_n^x = a_n^y$. □

Behauptung 5.2. Seien $x, y \in 2^\omega$, so dass es ein eindeutiges n gibt mit $x(n) \neq y(n)$. Dann gilt $a_n^x \in A_n \longleftrightarrow a_n^y \notin A_n$.

Beweis.

- **Fall I:** $x(n) = 1$ und $y(n) = 0$. Dann ist wegen (3) und (4)

$$a_n^x \in A_n \longleftrightarrow a_{n+1}^x \in A_{n+1} \tag{5}$$

$$a_n^y \in A_n \longleftrightarrow a_{n+1}^y \notin A_{n+1} \tag{6}$$

Wegen Behauptung 5.1 gilt, dass $a_{n+1}^x = a_{n+1}^y$ und daher folgt, dass

$$a_n^x \in A_n \longleftrightarrow a_{n+1}^x \in A_{n+1} \longleftrightarrow a_{n+1}^y \in A_{n+1} \longleftrightarrow a_n^y \notin A_n \tag{7}$$

- **Fall II:** $x(n) = 0$ und $y(n) = 1$. Dann ist wegen (3) und (4)

$$a_n^x \in A_n \longleftrightarrow a_{n+1}^x \notin A_{n+1} \tag{8}$$

$$a_n^y \in A_n \longleftrightarrow a_{n+1}^y \in A_{n+1} \tag{9}$$

Wegen Behauptung 5.1 gilt, dass $a_{n+1}^x = a_{n+1}^y$ und daher folgt, dass

$$a_n^x \in A_n \longleftrightarrow a_{n+1}^x \notin A_{n+1} \longleftrightarrow a_{n+1}^y \notin A_{n+1} \longleftrightarrow a_n^y \notin A_n \tag{10}$$

□

Behauptung 5.3. Seien $x, y \in 2^\omega$, so dass es ein eindeutiges n gibt mit $x(n) \neq y(n)$. Dann gilt $a_0^x \in A_0 \longleftrightarrow a_0^y \notin A_0$.

Beweis. Aus Behauptung 5.2 folgt, dass $a_n^x \in A_n \longleftrightarrow a_n^y \notin A_n$.
Da $x(n-1) = y(n-1)$ erhält man folgende zwei Fälle:

- **Fall I:** $x(n-1) = y(n-1) = 0$. Dann ist wegen (3)

$$a_{n-1}^x \in A_{n-1} \longleftrightarrow a_n^x \notin A_n \tag{11}$$

$$a_{n-1}^y \in A_{n-1} \longleftrightarrow a_n^y \notin A_n \tag{12}$$

  und daher $a_{n-1}^x \in A_{n-1} \longleftrightarrow a_{n-1}^y \notin A_{n-1}$.

- **Fall II:** $x(n-1) = y(n-1) = 1$. Dann ist wegen (4)

$$a_{n-1}^x \in A_{n-1} \longleftrightarrow a_n^x \in A_n \tag{13}$$

$$a_{n-1}^y \in A_{n-1} \longleftrightarrow a_n^y \in A_n \tag{14}$$

  und daher $a_{n-1}^x \in A_{n-1} \longleftrightarrow a_{n-1}^y \notin A_{n-1}$.

Nun geht man in die $(n-2)$-te Stufe und bekommt ganz analog $a_{n-2}^x \in A_{n-2} \longleftrightarrow a_{n-2}^y \notin A_{n-2}$. Diesen Prozess führt man weiter fort bis man bei der 0-ten Stufe angelangt ist und $a_0^x \in A_0 \longleftrightarrow a_0^y \notin A_0$ bekommt. □

Definiere nun $X := \{x \in 2^\omega : a_0^x \in A_0\}$. Behauptung III sagt, dass X ein Flipset ist, was einen Widerspruch zu Satz 5.2 liefert. $\square$

Korollar 5.2. *$\leq_W^*$ ist eine Wohlordnung auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)/_{\equiv_W^*}$ und $\leq_W$ eine fundierte partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(\omega^\omega)/_{\equiv_W}$.*

Beweis. Sei $A^* \subseteq \omega^\omega/_{\equiv_W^*}$ eine beliebige Teilmenge. Fasse die Elemente von A^* als Mengen von Teilmengen von ω^ω auf. Mit Hilfe des Vereinigungsaxiom existiert nun eine Menge A^{**}, dessen Elemente die Elemente jedes Elementes von A^* sind. Da $A^{**} \subseteq \mathcal{P}(\omega^\omega)$ und $\leq_W$ nach Satz 5.3 fundiert auf $\mathcal{P}(\omega^{\omega)}$ ist existiert nun ein $\leq_W$-minimales Element A_0.

Behauptung 5.4. $[A_0]_W^*$ ist das $\leq_W^*$-minimale Element von A^*.

Beweis. Angenommen $[A_0]_W^*$ wäre nicht das $\leq_W^*$-minimale Element von A^*. Dann gäbe es ein $[A_{-1}]_W^*$ mit $[A_{-1}]_W^* <_W^* [A_0]_W^*$. Das wäre aber äquivalent zu $A_{-1} <_W A_0$ oder $A_{-1} <_W A_0^c$, wobei aus der zweiten Ungleichung und Lemma 5.3 $A_{-1}^c <_W A_0$ folgt, was den gewünschten Widerspruch liefert. $\square$

Damit ist das Korollar bewiesen. $\square$

6 Die Wadge-Hierarchie und die Lipschitz-Hierarchie

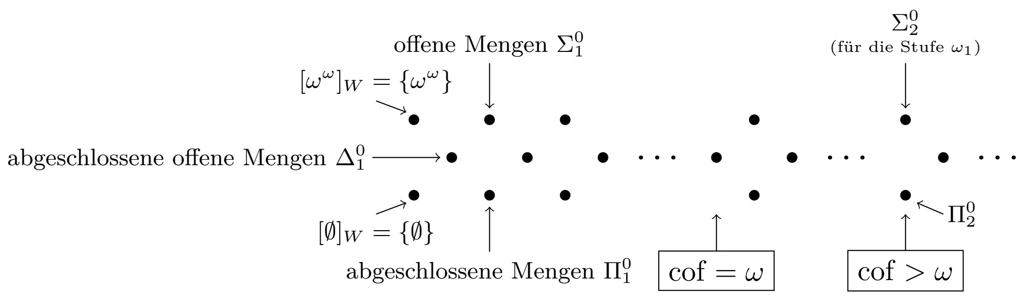
6.1 Die Wadge-Hierarchie

Die Wadge- bzw. die Lipschitz-Hierarchie sind die schematischen Anordnungen aller Wadge- bzw. Lipschitz-Grade, welche bezüglich der Wadge- bzw. Lipschitz-Reduzierbarkeit fast wohlgeordnet sind. Die folgenden Sätze, welche eine rigorose Beschreibung der einzelnen Stufen der beiden Hierarchien liefern wäre für diese Arbeit zu umfangreich zu beweisen. Eine Beweisskizze kann jedoch in [4] nachgelesen werden.

Definition 6.1. Sei $(M, \leq)$ eine Halbgeordnete Menge und $X \subset M$ eine Teilmenge. X heißt kofinal in M, wenn es zu jedem $m \in M$ ein $x \in X$ gibt, sodass $m \leq x$ ist. Die Kofinalität von M ist die kleinste Kardinalität einer kofinalen Teilmenge

Satz 6.1. *(Wadge-Hierarchie)*

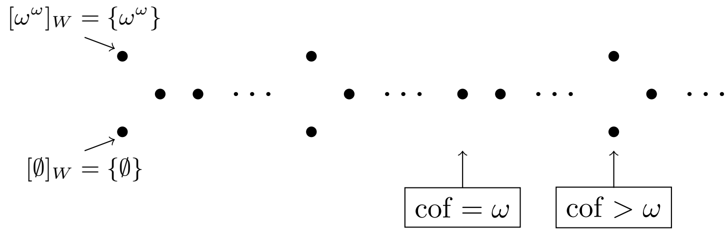
- $[\emptyset]_W$ *und* $[\omega^\omega]_W$ *sind die minimalen Wadge-Grade.*
- *Jeder nicht selbst-duale Wadge-Grad hat einen selbst-dualen Nachfolger.*
- *Jeder selbst-duale Wadge-Grad hat ein Paar nicht selbst-dualer Wadge-Grade als Nachfolger.*
- *Auf jeder Stufe der Kofinalität* ω *liegt ein selbst-dualer Wadge-Grad.*
- *Eine Stufe mit einer überabzählbaren Kofinalität wird von einem nicht selbst-dualen Paar von Wadge-Graden besetzt.*



6.2 Die Lipschitz-Hierarchie

Satz 6.2. *(Lipschitz-Hierarchie)*

- $[\emptyset]_L$ *und* $[\omega^\omega]_L$ *sind die minimalen Lipschitz-Grade.*
- *Zwischen je zwei Paaren nicht selbst-dualer Lipschitz-Grade liegt eine Kette von selbst-dualen Lipschitz-Graden der Länge* ω_1*. Jede dieser Ketten ist in einem notwendigerweise selbst-dualen Wadge-Grad enthalten.*
- *Auf jeder Stufe* $\omega_1\alpha$ *für eine Limesordinalzahl* α *mit Kofinalität* ω *liegt ein selbst-dualer Lipschitz-Grad.*
- *Eine Stufe* $\omega_1\alpha$ *für eine Limesordinalzahl* α *mit überabzählbaren Kofinalität oder eine Nachfolgerordinalzahl* α *wird von einem nicht selbst-dualen Paar von Lipschitz-Graden besetzt.*



Literatur

[1] A. Kechris: Classical Descriptive Set Theory, Springer Verlag (1995)

[2] A. Kechris, B. Löwe, J. Steel: Wadge Degrees and Projective Ordinals: The Cabal Seminar, Volume II, Cambridge University Press, (2011)

[3] Y. Khomskii, Infinite Games, Summer course at the University of Sofia, Bulgaria (2010)

[4] A. Andretta, nicht publizierte Notizen, Notes on Descriptive Set Theory, (2011)

[5] O. Deiser: Reelle Zahlen, Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen, Springer 2. Auflage, (2008)

[6] W. Wadge: https://billwadge.wordpress.com/

[7] A. Kanamori: The Higher Infinite, Springer, (2003)

[8] R. Carroy: Functions of the first Baire class, PhD Thesis, (2013)

[9] R. Schindler: Logische Grundlagen der Mathematik, Springer-Verlag, (2009)

[10] D. Martin: 'Borel determinacy', Annals of Mathematics, Second Series, (1975)