Bachelorarbeit

Die Topologie von $\mathbb{R}$ und die Kontinuumshypothese

Verfasser
Lukas Hendorfer

angestrebter akademischer Grad
Bachelor of Science (BSc)

Wien, 2018

Betreuerin : Dr. Sandra Müller

1 Einführung

Diese Arbeit handelt von der Topologie von $\mathbb{R}$ und der Kontinuumshypothese. Die Topologie ist ein Teilgebiet der Mathematik, welches sehr wichtig für Geometrie, Analysis und Mengenlehre ist.
Der wohl wichtigste Satz dieser Arbeit wird der Satz von Cantor-Bendixson sein, der auch eine kleine Überleitung zur Kontinuumshypothese legen wird. Diese hat sich 100 Jahre nachdem Cantor sie aufgestellt hat, als nicht entscheidbar herausgestellt.
Natürlich werden auch andere wichtige Sätze und Definitionen behandelt, um einen Einblick rund um dieses Themengebiet zu bekommen und um zu verstehen wie die Topologie der reellen Zahlen mit der Kontinuumshypothese zusammenhängt.

2 Die Topologie von $\mathbb{R}$

In diesem Abschnitt wurde als Quelle primär das Buch Logische Grundlagen der Mathematik"von Ralf Schindler und zusätzlich auch
"https://de.wikipedia.org/wiki/Dualsystem"verwendet. Eine Topologie kann über abgeschlossene und offene Mengen definiert werden. Zur Erinnerung ist noch anzumerken, dass wenn das Komplement einer Menge $A(= A^{\complement})$, abgeschlossen ist so ist A offen. Somit kann man sich die jeweils andere Definition leicht überlegen.
Normalerweise wird jedoch immer die Definition über offene Mengen betrachtet, welche auch hier verwendet wird.

Definition 2.1 (Definition einer Topologie)**.** *Ein topologischer Raum wird als Paar $(X, \mathcal{O})$ geschrieben und muss drei Bedingungen erfüllen. Vorab wollen wir uns aber noch die Mengen des Paares genauer ansehen. X ist eine Menge von Punkten und $\mathcal{O}$ beschreibt eine Menge offener Teilmengen von X.*

1. *$X \neq \emptyset$, $X \in \mathcal{O}$ und $\emptyset \in \mathcal{O}$.*
2. *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen, das heißt für eine beliebige Indexmenge I ist also*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}, \text{wobei jedes } A_i \in \mathcal{O},\ \forall i \in I.$$

3. *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen, das heißt für eine endliche Indexmenge I ist also*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}, \text{wobei jedes } A_i \in \mathcal{O},\ \forall i \in I.$$

Zum Abschluss der Definition ist noch hinzuzufügen, dass $\mathcal{O}$ als Topologie und X beziehungsweise das Paar als topologischer Raum bezeichnet wird.

Definition 2.2 (Definition einer Basis)**.** *Eine Menge $B \subset \mathcal{O}$ wird als Basis eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ bezeichnet, wenn jedes Element von $\mathcal{O}$, also eine beliebige offene Menge, als Vereinigung von Elementen aus B geschrieben werden kann.*

2.1 Standardtopologie von $\mathbb{R}$

Nun haben wir die nötigen Definitionen um die Standardtopologie von $\mathbb{R}$ zu betrachten. Wir sehen uns zunächst eine Menge A$\subset \mathbb{R}$ an.

$$A_i \text{ sind offen} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \text{ und } A_i \cap A_j \text{ (wobei } i \neq j\text{) sind offen.}$$

Hier ist noch anzumerken, dass offene Mengen Vereinigungen offener Intervalle der Form (x, y) mit $x < y$ sind und die leere Menge als offen gilt. Da der Durchschnitt zweier offener Mengen entweder leer oder eine Vereinigung von offenen Intervallen ist erkennt man, dass $\mathbb{R}$ zu einem topologischen Raum wird.
Wenn wir uns jetzt die Definition von der Basis ansehen erkennen wir leicht, dass die Menge aller offenen Intervalle eine Basis von $\mathbb{R}$ ist.

Lemma 1. *Die Menge aller offenen Intervalle der Form* (x, y)*, mit* $x < y$ *und* $x, y \in \mathbb{Q}$*, ist eine Basis des topologischen Raumes* $\mathbb{R}$*.*

Beweis. Wir nehmen uns ein $A \in \mathbb{R}$ welches offen ist. Wir wissen, dass A dargestellt werden kann als Vereinigung von offenen Intervallen:

$$A = \bigcup D.$$

Hier ist D ist eine Menge von offenen Intervallen der Form (x, y). Nun suchen wir uns ein $D' \subseteq \mathcal{O}$, was eine Menge von offenen Intervallen der Form (x', y') mit $x' < y'$ ist. Wichtig ist hierbei, dass außerdem $x', y' \in \mathbb{Q}$ und, dass es zu jedem $(x, y) \in D$ und jedem $z \in (x, y)$ ein $(x', y') \in D'$ gibt mit $x < x' < z < y' < y$. Dies existiert immer, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt und wir immer x',y' finden können welche die Ungleichung erfüllen.

Das führt nun zu der Gleichheit zwischen $\bigcup D$ und $\bigcup D'$ und weiters zu $A = \bigcup D'$.

Dies liefert uns das zu beweisende, nämlich, dass die Menge aller offenen Intervalle der Form (x, y) mit $x < y$ und $x, y \in \mathbb{Q}$ eine Basis vom topologischen Raum $\mathbb{R}$ ist. □

Satz 1 (Satz von Schröder-Bernstein)**.** *Wenn* A *und* B *nicht leer sind und Injektionen der Form* $f : A \to B$ *und* $g : B \to A$ *existieren, so gibt es eine Bijektion* $h : A \to B$*.*

Beweis. Wir definieren zunächst $X_n \subset A$ und $Y_n \subset B$, $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $Y_0 = B \backslash f[A]$. Wenn Y_n definiert ist, so ist $X_n = g[Y_n]$ und $Y_{n+1} = f[X_n]$. Außerdem sei X die Menge aller x mit $x \in X_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und Y die Menge aller y mit $y \in Y_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Daher können wir schließen, dass, weil $g[Y_n] = X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, auch $g[Y] = X$.
Da g injektiv ist, ist $g^{-1} \restriction X$ eine Bijektion von X auf Y.
Außerdem haben wir $f[A \backslash X] = B \backslash Y$, was wir über einen Widerspruchsbeweis zeigen werden.

1. Wir nehmen an $x \in A \backslash X$ und $f(x) \in Y$. Dann wäre beispielsweise $f(x) \in Y_n$ mit $n > 0$. Durch die Injektivität von f würde $x \in X_{n-1} \subset X$ gelten. Da wir $X_{n-1} \subset X$ haben, aber laut Annahme $x \in A \backslash X$ haben wir hier einen Widerspruch! Also haben wir zumindest schon $f[A \backslash X] \subset B \backslash Y$.

2. Nun betrachten wir $y \in B \backslash Y \subset B \backslash Y_0$ mit $y \in f[X]$. Sprich $y = f(x)$, mit $x \in X$, zum Beispiel $x \in X_n$. Dann würde $y = f(x) \in f[X_n]$ gelten, wobei $f[X_n] = Y_{n+1} \subset Y$ ein Widerspruch ist.

Also ist $f[A \backslash X] = B \backslash Y$ gezeigt.
Somit haben wir die Bijektion $f \restriction (A \backslash X)$ von $A \backslash X$ auf $B \backslash Y$, da f injektiv ist.
Nun fehlt noch die Bijektion $h : A \to B$. Hierfür definieren wir

1. $h(x) = g^{-1}(x)$, wenn $x \in X$ und

2. $h(x) = f(x)$, wenn $x \in A \backslash X$.

□

2.2 Perfekte Mengen

Wir wollen uns hier zunächst mit Bijektionen beschäftigen.

Lemma 2. *Für jede nicht-leere, offene Menge $A \subset \mathbb{R}$ existiert eine Bijektion $j : \mathbb{R} \to A$.*

Beweis. Zunächst nehmen wir uns ein offenes Intervall (x, y) mit $x < y$. Nun werden wir versuchen eine Bijektion zu erzeugen.
Zum Beispiel die Bijektionen

$\varphi_{x,y} : (-1, 1) \to (x, y)$ mit der Abbildung $\varphi_{x,y}(z) = x + \frac{(z+1)}{2} \cdot (y - x)$ für $z \in (-1, 1)$ und $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ mit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Wenn wir nun die Verknüpfung $\varphi_{x,y} \circ f : \mathbb{R} \to (x, y)$ betrachten, ist diese ebenfalls eine Bijektion. Nach diesem Schritt können wir uns folgendes überlegen.
Wenn $A \subset \mathbb{R}$ offen und nicht leer ist, so existiert sicherlich eine Injektion $g : \mathbb{R} \to A$.
Wenn wir nun sagen $(x, y) \subset A$ dann können wir wie oben erwähnt g als Verknüpfung von $\varphi_{x,y}$ und f wählen.
Es ist außerdem sofort ersichtlich, dass es eine Injektion $h : A \to \mathbb{R}$ gibt.
Jetzt wird auch ersichtlich warum wir den Satz von Schröder-Bernstein behandelt haben, denn somit existiert eine Bijektion $j : \mathbb{R} \to A$, sofern A nicht leer und offen ist. $\square$

Diese Aussage ist jedoch im Allgemeinen nicht in komplizierteren Mengen der reellen Zahlen wahr.

Definition 2.3 (Cauchy-Folge)**.** *Eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge, wenn folgendes gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geqslant N : |a_m - a_n| < \epsilon$$

Es muss also einen Index N, welcher von Epsilon abhängig ist, geben, ab welchem die weiteren Glieder der Folge einen Abstand kleiner als Epsilon aufweisen. Ist dies gegeben, so spricht man von einer Cauchy Folge.

Lemma 3. *Wenn $A \subset \mathbb{R}$ dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist abgeschlossen.*
2. *Wenn $(x_n : n \in \mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge ist, wobei $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.*

Beweis 1.Teil. (1)⇒(2)
Die Beweisidee ist über einen Widerspruch zu dem gewünschten Ergebnis zu kommen. Wir gehen also Von (1) aus. Somit ist A abgeschlossen beziehungsweise $\mathbb{R} \backslash A$ offen und $(x_n : n \in \mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge. Wir nehmen jetzt jedoch an, dass $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x = \lim_{n\to\infty} x_n \notin A$. Dies wiederum bedeutet x ist in $\mathbb{R} \backslash A = A^{\complement}$.

Da $A^{\complement}$ offen ist, existiert ein offenes Intervall $(y, z) \subseteq A^{\complement}$, wobei $x \in (y, z)$ ist.

Wir schauen uns nun die Epsilonumgebung um x an. Dazu bestimmen wir das Minimum von $|x-y|$ und $|z-x|$ und wählen dies als ϵ.
Betrachtet man jetzt den $\lim_{n\to\infty} x_n$ so können wir sicher sagen, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert welches folgende Ungleichung erfüllt.

$$|x - x_n| < \epsilon.$$

Daher folgt $x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset \mathbb{R}\backslash A$.
Der Widerspruch ist nun klar ersichtlich, da wir oben $x_n \in A$ festgelegt hatten.

$\square$

Beweis 2.Teil. (2)$\Rightarrow$(1)
Hier wollen wir zeigen, dass $\mathbb{R}\backslash A = A^{\complement}$ offen ist. Denn wie wir wissen wäre damit A abgeschlossen.
Dazu nehmen wir uns ein Element von $A^{\complement}$, sprich $x \in A^{\complement}$.
Die Idee ist nun, immer kleiner werdende Intervalle um den Punkt x zu betrachten und festzustellen ob diese noch immer in $A^{\complement}$ liegen oder nicht.
Dazu verwenden wir etwa

$$I_n = (x - \tfrac{1}{1+n}, x + \tfrac{1}{1+n}) \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

Jetzt nehmen wir an, dass kein n existiert, sodass $I_n \subset \mathbb{R}\backslash A$ gilt und führen dies zu einem Widerspruch.
Wenn tatsächlich kein Intervall eine Teilmenge von $\mathbb{R}\backslash A$ ist, so muss jedes I_n ein Element von A enthalten. Da I_n immer kleiner wird und für jedes n ein Punkt x_n in $I_n \cap A$ liegt, so sieht man schnell, dass es sich um eine Cauchy-Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ handelt.
Laut der Definition einer Cauchy-Folge beziehungsweise Punkt 2, müsste somit $x \in A$ sein. Da wir oben jedoch $x \in \mathbb{R}\backslash A$ festgehalten haben, ist dies nicht möglich und führt uns zum Widerspruch. $\square$

Definition 2.4 (Abschluss)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}$, dann wird $\overline{A}$, der Abschluss von A wie folgt definiert. Der Abschluss wird bezeichnet als die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die eine Cauchy Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ mit jedem $x_n \in\ A$ existiert, welche $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ erfüllt. Das heißt $\overline{A} \supset A$.*

Unschwer zu erkennen ist nun, dass der Abschluss immer abgeschlossen ist.
Es gilt außerdem "A ist abgeschlossen"$\Leftrightarrow \overline{A} \subset A$ (also $\overline{A} = A$)

Definition 2.5 (Rand)**.** *Den Rand einer Menge kann man sich abstrakt vorstellen als die Begrenzung eines Bereiches. Um das ganze formal zu erklären sagt man, dass der Rand von einer Teilmenge A eines topologischen Raumes X, die Differenz von Abschluss und Innerem von A(wird auch als A° bezeichnet) ist.*

$$\textit{Anders gesagt } \partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

Eine wichtige Eigenschaft vom Rand ist, dass dieser stets abgeschlossen ist.
Beispiel:
Die Mengen $(0, 1)$ und $[0, 1]$ haben beide die selben Randpunkte nämlich 0 und 1.

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

Kurzgesagt bildet die Menge A vereinigt mit dem Rand von A den Abschluss.

Beispiel:
Betrachtet man die Menge $A = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, so ist der Rand, nämlich $\{0\}$, klar ersichtlich. Somit können wir schreiben

$$\overline{A} = A \cup \partial A = \{\tfrac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

Definition 2.6 (Häufungspunkt)**.** *Wir betrachten eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit $x \in A$. Dann heißt x Häufungspunkt von A, wenn für jede Epsilon-Umgebung $U = (x - \epsilon, x + \epsilon)$, die Schnittmenge $A \cap U$ mindestens ein von x verschiedenes Element enthält.*

Wenn x nun ein Häufungspunkt von A ist, dann hat die Schnittmenge $A \cap \mathbb{R}$ sogar unendlich viele Elemente.

Eines der bekanntesten und verständlichsten Beispiele, ist wohl die Menge $A = (0, 1)$. Denn jeder Punkt x den man aus dieser Menge wählt, hat für jede ϵ-Umgebung die Eigenschaft, dass der Schnitt zwischen jener und A sicherlich mehr Punkte als nur x hat.

Definition 2.7 (Perfekte Menge)**.** *Eine perfekte Menge ist eine abgeschlossene, nicht-leere Menge P und welche jedes Element $x \in P$ als Häufungspunkt besitzt.*

Definition 2.8 (Dualdarstellung)**.** *Die Dualdarstellung wird verwendet, um eine Zahl mit nur zwei verschiedenen Ziffern, nämlich* 0 *und* 1*, darzustellen.*
Um nun eine reelle beziehungsweise rationale Zahl als Dualzahl darzustellen, wird $z_1, z_2, z_3...$ mit $z_i \in \{0, 1\}$ geschrieben. Der Zahlenwert der Dualzahl Z, wird wie folgt

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \cdot 2^{-i}$$

ermittelt. Sprich z_i wird mit ihrem Stellenwert 2^{-i} multipliziert.

Im nachfolgenden Beispiel, sehen wir, wie die Dualdarstellung in der Praxis angewendet wird:

$$(1, 0, 1, 0, 0, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \cdot 2^{-i} = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \tfrac{1}{-2} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{8}$$

Lemma 4. *Es gibt eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf die Menge der Teilmengen von den natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und weiters auf die Menge aller unendlichen 0-1-Folgen $E^{\star}$.*

Beweis. Wir werden $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{bij} E^\star \xrightarrow{bij} \mathbb{R}$ zeigen.

1. Zu zeigen: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $E^\star$ sind gleichmächtig.
   Sei also $E^\star := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n = 0 \vee a_n = 1\}$.
   Wir zeigen nun, dass $E^\star$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind.
   $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to E^\star$ mit der Abbildung: $M \mapsto (a_n)$ mit $a_n := 1$ falls $n \in M$ und $a_n := 0$ falls $n \notin M$ ist eindeutig bijektiv, also sind die beiden Mengen gleichmächtig.
   Als Veranschaulichung bilden wir die Menge $\{1, 2, 3, 5\}$ ab, welche zu der Folge $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, ...)$ wird. Diese Funktion ist offensichtlich bijektiv.

2. Wir werden im nachfolgenden Punkt eine Bijektion zwischen $E^\star$ und $(0, 1)$ zeigen. Deswegen suchen wir zuerst eine Bijektion zwischen $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$.
   Wir können uns hier auf Lemma 2 berufen und festhalten, dass eine solche Bijektion existiert und können weitermachen.

3. Nun wollen wir eine Injektion für $F : E^\star \to [0, 1]$ und eine für $g : [0, 1] \to E^\star$ finden.
   Die erste Injektion wird im Beweis des nächstens Lemmas gezeigt, wobei man für $A \subset \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$ betrachtet.

   Nun fehlt nur mehr die Injektion für $g : [0, 1] \to E^\star$.

   Betrachten wir also $g : [0, 1] \to E^\star$ mit $x \in [0, 1]$
   Mit Hilfe der Dualdarstellung können wir

   $$x = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} z_i \cdot 2^{-i} = z_1 \cdot 2^{-1} + z_2 \cdot 2^{-2} + ...$$

   schreiben.
   Nun betrachten wir die Abbildung $x \mapsto (z_1, z_2, z_3, ...)$ und können die Injektivität nachweisen.
   Sei also $x_a, x_b \in [0, 1]$, so müssen wir zeigen:

   $$g(x_a) = g(x_b) \Rightarrow x_a = x_b$$

   Wenn also

   $$g(x_a) = (a_1, a_2, a_3...) = (b_1, b_2, b_3...) = g(x_b)$$

   dann bedeutet das, $a_i = b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   Nun ist klar ersichtlich, dass $x_a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 2^{-i}$ und $x_b = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot 2^{-i}$ ident sein müssen.

   Nun wissen wir mit Hilfe des Satzes von Schröder-Bernstein, dass es eine Bijektion $h : E^\star \to \mathbb{R}$ gibt.

□

Lemma 5. *Wenn $A \subset \mathbb{R}$ perfekt ist, so existiert eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to A$.*

Beweis. Wir gehen zunächst von einer Menge E, welche alle endlichen 0-1-Folgen enthält, und der Menge $\{0, 1\}$ aus. Wenn man nun $s \in E$ mit der Länge $n \in \mathbb{N}$ und $h \in \{0, 1\}$ nimmt, kann man an die Folge s, h anhängen, was als $s^\frown h$ geschrieben wird.
Jetzt werden wir eine Abbildung Φ kreieren für welche gilt, dass jedes $s \in E$ auf ein abgeschlossenes Intervall $[a_s, b_s]$ abgebildet wird.
Hierfür muss außerdem $a_s < b_s$ und $[a_s, b_s] \cap A \neq \emptyset$ gelten. Die Abbildung ist rekursiv nach der Länge von s definiert.
Betrachtet man die leere Folge $\langle\rangle$ so wird diese auf $\Phi(\langle\rangle) = [a, b]$, wobei $[a, b] \cap A \neq \emptyset$ und $a < b$, abgebildet.
Wenn wir uns nun mit dem oben genannten Anhängen an Folgen beschäftigen, können wir uns folgendes überlegen.
Da $s \in E$ und $\Phi(s) = [a_s, b_s]$ definiert ist, mit $[a_s, b_s] \cap A \neq \emptyset$ und $a_s < b_s$ können wir sicher $a_{s^\frown 0}, b_{s^\frown 0}, a_{s^\frown 1}, b_{s^\frown 1}$ finden, welche

1. $a_s < a_{s^\frown 0} < b_{s^\frown 0} < a_{s^\frown 1} < b_{s^\frown 1} < b_s$
2. $[a_{s^\frown 0}, b_{s^\frown 0}] \cap A \neq \emptyset \neq [a_{s^\frown 1}, b_{s^\frown 1}] \cap A$
3. $b_{s^\frown 0} - a_{s^\frown 0} \leq \frac{1}{n+1}$ und $b_{s^\frown 1} - a_{s^\frown 1} \leq \frac{1}{n+1}$ für $n = lh(s)$

erfüllen.
Sprich wenn die Länge der Folge $s^\frown h$ groß ist, so ist der Abstand zwischen dem Minimum und Maximum des Intervalls klein. Dies ist eine wichtige Erkenntnis die wir nachher noch brauchen werden. Um den ersten Teil des Beweises abzuschließen fassen wir noch einmal zusammen: $(s^\frown h)$ wird von Φ abgebildet auf $[a_{s^\frown h}, b_{s^\frown h}]$ mit $h \in \{0, 1\}$.

Wir haben oben nur endliche Folgen betrachtet. Da aber A perfekt ist, haben wir eine abgeschlossene Menge, wo jeder Punkt ein Häufungspunkt ist.
Deswegen müssen wir uns den Fall der unendlichen Folgen anschauen. So betrachten wir die Menge $E^\star$. Diese beinhaltet alle unendlichen 0-1-Folgen.
Die Beweisidee hier ist zwei Injektion von $\mathbb{R} \to A$ beziehungsweise $A \to \mathbb{R}$ zu finden um den Satz von Schröder-Bernstein nutzen zu können. Um die erste Injektion zu finden brauchen wir allerdings unsere Menge $E^\star$.
Wir definieren uns also eine Injektion $F : E^\star \to A$. Für $f \in E^\star$ definieren wir

$$F(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_{f \restriction \{0,\dots,n\}}, b_{f \restriction \{0,\dots,n\}}] = \{x\}.$$

Um das Ergebnis zu verstehen muss man sich eigentlich nur Schritt für Schritt vorarbeiten, denn wir wissen, dass $f \in E^\star$ unendlich lang ist. Jetzt schränken wir aber genau jene auf eine gewisse Länge n ein. Da n immer größer wird wissen wir aus 3., dass der Abstand zwischen Minimum und Maximum immer kleiner wird. Unschwer ist zu erkennen, dass irgendwann der Schnitt aller Teilintervalle sich auf

genau einen Punkt belaufen muss. Dies ist auch als Intervallschachtelungsprinzip bekannt.
Das heißt wir haben jetzt ein f welches auf den Punkt x abgebildet wird und laut 2. und 3. muss jedes Intervall, in unserem Fall um den Punkt x, geschnitten mit A ungleich der leeren Menge sein. Da also $F(f)$ ein Häufungspunkt von A ist, gilt $F(f) \in A$. Jetzt bleibt noch die Frage der Injektivität, was man direkt mittels der Definition zeigen kann.

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g \text{ mit } f, g \in E^\star$$

, da $F(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_{f\restriction\{0,\ldots,n\}}, b_{f\restriction\{0,\ldots,n\}}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_{g\restriction\{0,\ldots,n\}}, b_{g\restriction\{0,\ldots,n\}}] = F(g) \Rightarrow$ $f = g$.

Dies ist hier eindeutig wahr, denn wie wir im ersten Teil des Beweises gesehen haben, hat jede unterschiedliche 0-1-Folge eine unterschiedliche Folge von Intervallen. Wenn nun der Abstand immer kleiner wird, kann der Punkt welcher von $F(f) = F(g)$ beschrieben wird, tatsächlich nur erreicht werden in dem man die exakt selbe Folge abbildet, da die Intervalle geschachtelt sind.

Laut Lemma 4 kennen wir eine Bijektion $g : \mathbb{R} \to E^\star$.
Nun können wir einfach schreiben $F \circ g : \mathbb{R} \to A$, was klarerweise eine Injektion liefert. Um den Beweis zu vollenden, verwenden wir den Satz von Schröder-Bernstein. Es ist möglich eine Injektion, etwa die Identität, $h : A \to \mathbb{R}$ zu finden und damit ist die Existenz der Bijektion von $\mathbb{R} \to A$ bewiesen. □

Für den Beweis des nächsten Satzes brauchen wir die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 6. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$, so findet man sicher ein $z \in \mathbb{Q}$, welches folgende Ungleichungen erfüllt:*

1. $x < z$
2. $z < y$.

Lemma 7. *Wenn A eine abzählbare Menge ist, wobei jedes $a \in A$ abzählbar ist, so ist auch $\bigcup A = \{x : x \in a, \text{wobei } a \in A\}$ abzählbar.*

Definition 2.9 (Kondensationspunkte)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in A$. Dann heißt x Kondensationspunkte von A, wenn $\forall \epsilon > 0$ die Schnittmenge $A \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ überabzählbar ist.*

Offensichtlich ist hier jeder Kondensationspunkt von A ebenfalls ein Häufungspunkt, denn wenn die Schnittmenge überabzählbar ist, existiert sicherlich mindestens ein von x verschiedenes Element.

Definition 2.10 (Höchstens abzählbar)**.** *Höchstens abzählbare Mengen sind:*

1. *endlich große abzählbare Mengen und*

2. *unendlich große abzählbare Mengen.*

Satz 2 (Satz von Cantor-Bendixson)**.** *Wenn $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, dann gilt eines davon:*

1. *A ist höchstens abzählbar.*

2. *Es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to A$.*

Beweis. In diesem Beweis benötigen wir die Menge der Kondensationspunkte P von A und dessen Definition. Wir müssen logischerweise beide Fälle separat beweisen.

1.Fall: $P = \emptyset$
Sprich die Menge der Kondensationspunkte ist die leere Menge. In diesem Fall zeigen wir, dass A höchstens abzählbar ist.

Sei $x \in A$, dann gibt es keine Epsilon-Umgebung um x, sodass die Schnittmenge überabzählbar ist.
Wir sehen also, dass für $x \in A$ mit einer Epsilon-Umgebung die Schnittmenge $A \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ höchstens abzählbar sein kann. Hier können wir auf Lemma 4 zurückgreifen und somit sagen, es gibt $y, z \in \mathbb{Q}$, welche die Ungleichung

$$x - \epsilon < y < x < z < x + \epsilon$$

erfüllen. Außerdem ist damit das Intervall $A \cap (y, z)$ auch höchstens abzählbar.
Es ist also möglich für alle $x \in A$ ein (y, z) mit $y, z \in \mathbb{Q}$ zu finden, welches folgendes erfüllt:

1. $x \in A \cap (y, z)$ und

2. $A \cap (y, z)$ ist höchstens abzählbar.

Nach dieser Erkenntnis können wir festhalten, dass sich A als Vereinigung höchstens abzählbarer Mengen darstellen lässt. Hier ist jedoch noch anzumerken, selbst die Vereinigung findet über einer höchstens abzählbaren Menge statt.
Aus Lemma 7 wissen wir nun, dass A höchstens abzählbar sein kann.

2.Fall $P \neq \emptyset$
Hier haben wir jetzt den Fall die Menge der Kondensationspunkte ist nicht leer und wollen somit zeigen, P ist perfekt.

Wenn wir zeigen können, dass P perfekt ist, ist es uns möglich, laut Lemma 3, eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to P$ zu finden. Die Bijektion von $\mathbb{R} \to A$ findet man dann, direkt mit dem Satz von Schröder-Bernstein. Wir zeigen, dass P abgeschlossen ist und jeder Punkt in P ein Häufungspunkt in P ist, dann gilt $P \subset A$ ist perfekt.

Zu zeigen bleibt also, "P ist abgeschlossenünd "jeder Punkt von P ist Häufungspunkt von P".

1. Nun müssen wir also zuerst einmal zeigen, dass P tatsächlich abgeschlossen ist.
   Wir verwenden dazu eine beliebige Cauchy-Folge $(x_n : x \in \mathbb{N})$. Jedes $x_n \in P$ also ist x_n ein Kondensationspunkt in A. Nun setzen wir $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in A$ und wollen zeigen, dass auch x ein Kondensationspunkt von A ist. Dazu nehmen wir ein Intervall $[y, z]$ wobei x in diesem enthalten ist.
   Laut Cauchy-Folgen-Kriterium, finden wir sicher ein x_n welches noch im Intervall $[y, z]$ liegt. Wir wissen nun aber, dass jede Epsilon-Umgebung von genau diesem, schon einen überabzählbaren Schnitt mit A haben muss. Denn x_n ist ein Kondensationspunkt von A und außerdem finden wir eine Epsilon-Umgebung um den Punkt x_n, welche $(x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \subset [y, z]$ erfüllt. Diese Umgebung hat laut Definition eines Kondensationspunktes aber schon einen überabzählbaren Schnitt mit A.
   Also können wir daraus schließen, dass $[y, z] \cap A$ überabzählbar ist.

2. Wir wollen zeigen, dass jeder Punkt in P ein Häufungspunkt von P ist. Diesen Teil werden wir über einen Widerspruch beweisen.
   Wenn also $x \in P$ kein Häufungspunkt sein soll, so darf für ein $\epsilon > 0$ in der Schnittmenge $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap P$ kein anderes Element wie der Punkt x enthalten sein.
   Wenn wir uns nun die Schnittmenge $H = (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A \backslash \{x\}$ ansehen, so gibt es zu jedem $y \in H$, rationale Koeffizienten a_y, b_y, welche die Ungleichung $a_y < y < b_y$ erfüllen, sodass das Intervall $[a_y, b_y]$ höchstens abzählbar ist. Hier kommt dasselbe Argument wie im ersten Teil zum Tragen. Wir haben wieder eine höchstens abzählbare Vereinigung, über höchstens abzählbare Mengen, um auf die Schnittmenge $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap A$ zu kommen. Auch hier verwenden wir wieder Lemma 7 und schließen daraus dass jene Menge höchstens abzählbar ist.
   Dies führt uns zu unserem Widerspruch denn x ist ja, wie oben notiert, ein Kondensationspunkt. Dieser setzt die Überabzählbarkeit von $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A$ für alle $\epsilon > 0$ voraus.

Somit haben wir gezeigt, dass die Menge P, sofern sie nicht leer ist, tatsächlich perfekt ist und wir können direkt Lemma 3 verwenden und sagen, es existiert eine Bijektion zwischen $\mathbb{R} \to P \subset A$.
Um den Beweis zu vollenden sehen wir uns nun

1. die Injektion von $\mathbb{R} \to A$ und

2. die Injektion von $A \to \mathbb{R}$, zum Beispiel die Identität,

an. Jetzt wenden wir den Satz von Schröder-Bernstein an und bekommen eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und A. $\square$

3 Kontinuum

Als Quelle für das "Kontinuum" und die "Kontinuumshypothese" wurde hier sowohl "Logische Grundlagen der Mathematik" von Ralf Schindler, als auch "https://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese" beziehungsweise "https://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuum" verwendet. Die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ nennt man das Kontinuum. Hierbei ist zwischen "Kontinua im Allgemeinen" und "Kontinua in der Topologie" zu unterscheiden. Um alle vorkommenenden Begriffe zu verstehen werden wir noch die ZF-Axiome, das Auswahlaxiom und den Hausdorff-Raum definieren.

Definition 3.1 (Zermelo-Fraenkel-Axiome)**.** *Die Zermelo-Fraenkel-Axiome sind die Grundlage für viele Teile der Mathematik und sind eine Axiomatisierung für die Mengenlehre.*

1. *Extensionalitätsaxiom:*

$$\forall A, B(A = B \Leftrightarrow \forall C(C \in A \Leftrightarrow C \in B))$$

2. *Leermengenaxiom:*

$$\exists B \forall A \neg(A \in B)$$

3. *Paarmengenaxiom:*

$$\forall A, B \exists C \forall D(D \in C \Leftrightarrow (D = A \lor D = B))$$

4. *Vereinigungsaxiom:*

$$\forall A \exists B \forall C(C \in B \Leftrightarrow \exists D(D \in A \land C \in D))$$

5. *Unendlichkeitsaxiom:*

$$\exists A(\exists X \in A \forall Y \neg(Y \in X) \land \forall X(X \in A \Rightarrow X \cup \{X\} \in A))$$

6. *Potenzmengenaxiom:*

$$\forall A \exists P \forall B(B \in P \Leftrightarrow \forall C(C \in B \Rightarrow C \in A))$$

7. *Fundierungsaxiom:*

$$\forall A(A \neq \emptyset \Rightarrow \exists B(B \in A \land \neg\exists C(C \in A \land C \in B))$$

8. *Aussonderungsaxiom:*

   Für jedes einstellige Prädikat, bei uns $P(C)$ genannt, in welchem die Variable B nicht vorkommt, gilt: $\forall A \exists B \forall C (C \in B \Leftrightarrow C \in A \wedge P(C))$

9. *Ersetzungsaxiom:*

   Nicht sehr formal ausgedrückt könnte man sagen, dass das Ersetzungsaxiom besagt, die Bilder von Mengen sind auch wieder Mengen. Für jedes zweistellige Prädikat, in dem die Variable B nicht auftaucht, gilt: $\forall X, Y, Z (F(X, Y) \wedge F(X, Z) \Rightarrow Y = Z) \Rightarrow \forall A \exists B \forall C (C \in B \Leftrightarrow \exists D (D \in A \wedge F(D, C)))$

10. *Auswahlaxiom:*

    Es besagt, dass für jede Menge von nichtleeren Mengen immer eine Auswahlfunktion existiert. Jedoch wissen wir nicht wie wir diese konstruieren, sondern lediglich, dass es sie gibt. Sei F eine Auswahlfunktion für eine Menge nichtleeren Mengen namens A, so muss F jedem Element X von A genau ein Element von X zuweisen:
    $\forall X \in A F(X) \in X$

Als kurze Veranschaulichung nehmen wir:
$A = \{\{1, 2, 3\}, \{0, 3\}\}$ mit F als Auswahlfunktion von A die $F(\{1, 2, 3\}) = 2$ und $F(\{0, 3\}) = 3$ jedem Element von A genau je ein Element zuordnet.
Wichtig ist hier noch zu sagen, dass von ZFC-Axiomen die Rede ist, sofern das Auswahlaxiom enthalten ist. Ansonsten heißen sie ZF-Axiome.

Definition 3.2 (Hausdorff-Raum)**.** *Wir sagen ein topologischer Raum M, wo für alle $x, y \in M$, mit $x \neq y$, offene, disjunkte Umgebungen U_x beziehungsweise V_y existieren, erfüllt die Hausdorff-Eigenschaften. Ein solches M wird Hausdorff-Raum genannt.*

3.1 Kontinua im Allgemeinen

Mit den ZF-Axiomen kann man die Gleichmächtigkeit der folgenden Mengen zeigen:

1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{C}$
3. $(0, 1)$, die Menge der Reellen Zahlen zwischen 0 und 1
4. $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ = Menge aller irrationalen Zahlen
5. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ = Potenzmenge der natürlichen Zahlen

6. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ = Menge aller Funktionen mit Definitionsbereich der natürlichen Zahlen und Wertebereich $\{0,1\}$

7. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ = Menge aller Folgen von natürlichen Zahlen.

Die Mächtigkeit dieser Mengen wird meist als $\mathfrak{c}$ bezeichnet. Da die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ als $\aleph_0$ bezeichnet wird, gilt $|P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

Die Annahme, dass alle überabzählbaren Teilmengen der reellen Zahlen Kardinalität $\mathfrak{c}$ besitzen heißt **Kontinuumshypothese** und ist mit den ZF-Axiomen weder beweisbar noch widerlegbar.

3.2 Kontinua in der Topologie

Hier ist die Definition des Kontinuums verschärfter, man versteht hier nämlich unter einem Kontinuum einen zusammenhängenden kompakten Hausdorff-Raum.
Auch wenn das nicht sehr ähnlich zu dem Kontiuum im Allgemeinen klingt, so ist der Unterschied zwischen den beiden Definition nicht sehr groß, da ein metrisches Kontinuum, das heißt ein zusammenhängender kompakter metrischer Raum, mit mehr als einem Element die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzt.

4 Kontinuumshypothese

Die Kontinuumshypothese wurde von Cantor 1878 aufgestellt und hinterfragt, wie schon oben erwähnt, ob alle überabzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ die Mächtigkeit von den reellen Zahlen besitzen. Es stellte sich als nicht entscheidbar heraus, da mit den Axiomen der Mengenlehre keine eindeutige Entscheidung möglich ist.
Wenn man sich den Satz von Cantor-Bendixson ansieht, erkennt man schon eine gewisse Korrelation zur Kontinuumshypothese. Allerdings wird in jenem Satz lediglich für überabzählbare, abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ gezeigt, dass sie die selbe Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ besitzen.

Da wir im folgenden Abschnitt unter anderem Ordinalzahlen verwenden müssen, werden wir den Begriff kurz einführen.

Definition 4.1 (Ordinalzahlen). *Eine Ordinalzahl bezeichnet eine Menge S, welche jedes Element von S auch als Teilmenge von S besitzt, und außerdem bezüglich der Relation $\in$ total geordnet ist.*
Diese Definition setzt allerdings auch das Fundierungsaxiom voraus, laut dem jede nichtleere Menge S ein dazu disjunktes Element besitzt. Durch jenes Axiom ist eine solche Menge S auch wohlgeordnet.
Demnach ist die Menge der natürlichen Zahlen beispielsweise eine Ordinalzahl.

Definition 4.2 (Kardinalzahlen). *Die Kardinalität, sprich Mächtigkeit, einer Menge M, ist die kleinste Ordinalzahl α, sodass eine Bijektion $f : M \to \alpha$ existiert.*

Also ordnen Kardinalzahlen einer endlichen Menge eine natürliche Zahl zu, welche die Anzahl der in der Menge enthaltenen Elemente beschreibt. Verwendet man ZFC-Axiome, sprich das Auswahlaxiom wird verwendet, so hat jede Menge eine bestimmte Kardinalzahl.

4.1 Einfache Kontinuumshypothese

Die Grundaussage der einfachen Kontinuumshypothese lautet:

Es existiert keine überabzählbare Menge reeller Zahlen, dessen Mächtigkeit kleiner ist als die von $\mathbb{R}$.

Oft wird diese Aussage auch anders ausgedrückt, nämlich:

Es gibt keine Menge, deren Kardinalität zwischen der der natürlichen und der der reellen Zahlen liegt.

Betrachtet man,

1. die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen als $\aleph_0$,
2. die darauffolgende Kardinalzahl als $\aleph_1$,
3. die Kardinalität der reellen Zahlen als $\mathfrak{c}$,

so kann die Kontinuumshypothese formal folgendermaßen geschrieben werden:

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}.$$

Eine weitere bekannte Schreibweise ist:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

4.2 Verallgemeinerte Kontinuumshypothese

Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese lautet:

Für jede unendliche Menge X gilt: Sei $Y \supset X$, welche gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ ist. Dann gilt $|Y| = |X|$ oder $|Y| = |\mathcal{P}(X)|$.

Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese besagt nun aber:

Es liegt keine Kardinalzahl zwischen $|X|$ und $|\mathcal{P}(X)|$.

Wenn man nun die sogenannte Aleph Notation verwendet, so bedeutet das:

Für jede Ordinalzahl α haben wir $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

4.3 Lösung

Kurt Gödel konnte beweisen, dass die Kontinuumshypothese relativ widerspruchsfrei zu den Zermelo-Fraenkel-Axiomen mit Auswahlaxiom ist. Das heißt also, wenn ZFC widerspruchsfrei ist, was angenommen wird, so ist auch die Kontinuumshypothese mit ZFC widerspruchsfrei.

Er kam zu dem Schluss, dass mit Hilfe der Zermelo-Fraenkel-Axiome die Kontinuumshypothese nicht widerlegbar ist.

Paul Cohen wiederum konnte zeigen:

Die Kontinuumshypothese lässt sich nicht mit Hilfe der Zermelo-Fraenkel-Axiome beweisen.

Schlussendlich kann man also festhalten, dass die Kontinuumshypothese in ZFC weder beweisbar noch widerlegbar ist. Das bedeutet nun, dass beides als Axiom verwendet werden kann.

Literatur

[1] Logische Grundlagen der Mathematik;Ralf Schindler;Springer Verlag 2009

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese;Stand:10.04.2018, 14:36

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuum;Stand:10.04.2018, 14:36

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Dualsystem;Stand:29.04.2018, 15:14