TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

BACHELORARBEIT

Forcing

ausgeführt am 4. Juni 2024

Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dr. Sandra Müller

durch

Maximilian Scheiderbauer
Matrikelnummer: 11915310
Hans-Prodingerstraße 13
5020 Salzburg

Wien, am 4. Juni 2024

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt beziehungsweise die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 4. Juni 2024

Maximilian Scheiderbauer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die *Kontinuumshypothese* wurde 1878 vom deutschen Mathematiker und Begründer der Mengenlehre Georg Cantor aufgestellt und besagt, dass jede Teilmenge der reellen Zahlen entweder gleichmächtig zu den reellen Zahlen oder höchstens abzählbar ist:

$$\forall M \subseteq \mathbb{R} : |M| = \mathbb{R} \vee |M| \leq |\mathbb{N}|.$$

Sie ist das erste der 23 Hilbertschen Probleme, die der deutsche Mathematiker David Hilbert im Jahr 1900 dem Internationalen Mathematikerkongress vorgestellt hatte. Im Jahr 1938 bewies der österreichische Mathematiker Kurt Gödel, dass die Kontinuumshypothese relativ konsistent zu den üblichen mengentheoretischen Axiomen ist, also dass ihre Hinzunahme nicht zusätzliche Widersprüche hervorruft.

Forcing (dt. Erzwingung) ist eine Methode zur Konstruktion mengentheoretischer Modelle, die gewisse Formeln erfüllen. Sie wurde 1963 vom US-amerikanischen Mathematiker Paul Cohen entwickelt. Er zeigte damit unter anderem, dass auch die Negation der Kontinuumshypothese relativ konsistent zu den üblichen mengentheoretischen Axiomen ist und erhielt dafür die Fields Medaille. Forcing hat sich als wichtiges Beweisverfahren in der Mengenlehre etabliert und wurde seitdem auch vereinfacht und weiterentwickelt.

In dieser Arbeit wird [Mü20] Kapitel 6, [Kun04] Kapitel 7 und [Sch14] Kapitel 6 ausgearbeitet. Der Eigenanteil beschränkt sich hierbei auf die Ausarbeitung von Übungsaufgaben und die genauere Ausführung von Beweisen. Diese Arbeit richtet sich an ein allgemeines mathematisches Publikum. Für einige modelltheoretische Fakten wird jedoch auf die früheren Kapitel in diesen Büchern zurückgegriffen. Unabhängig davon wird bis auf die Grundvorlesungen kein notwendiges mathematisches Vorwissen vorausgesetzt. Dafür werden in Kapitel 2 und 3 die notwendigen Grundlagen geschaffen, um in Kapitel 4 einen Beweis der relativen Konsistenz der Negation der Kontinuumshypothese zu bringen.

Für die Notation verweisen wir auf [Kun04] und [Sch14].

2 Bekanntes aus der Mengenlehre

In diesem Abschnitt soll an einige grundlegende Definitionen und Resultate aus der Mengenlehre und elementaren Modelltheorie erinnert werden. Für Definitionen von *Ordinalzahlen*, *Kardinalzahlen*, grundlegende Sätze wie den transfiniten Rekursionssatz und Ähnliches verweisen wir auf die Literatur, insbesondere auf [Kun04].

2.1 V und L

Definition 2.1.1. Vermöge des Rekursionssatzes (auf der Klasse der Ordinalzahlen **Ord**) definieren wir die Stufen der *kumulativen Hierarchie*:

- $V_0 = 0$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} V_\delta$.

Die Klasse aller Mengen V ist dann die Vereinigung über all diese Mengen: $\bigcup_{\alpha\in \boldsymbol{On}} V_\alpha$.

Definition 2.1.2 (Definierbarkeit)**.** Eine Menge A heißt *definierbar* in $(M, \in)$ genau dann, wenn $A \in \mathfrak{Def}(M)$, wobei

$$\mathfrak{Def}(M) := \Big\{\{m \in M \mid (M, \in) \models \varphi(m, \bar{x})\} \mid \bar{x} \in M^n, n \in \mathbb{N}, \varphi(y, \bar{x}),\\ \varphi \text{ ist prädikatenlogische Formel erster Stufe}\Big\}.$$

$\mathfrak{Def}(M)$ ist die Menge aller durch eine Formel mit Parametern aus M beschriebenen Mengen.

Wir wollen nun die von der leeren Menge aus definierbaren Mengen klassifizieren. Als Universum wählen wir dann genau die Menge der schon definierten Mengen. Diese Hintereinanderausführung von $\mathfrak{Def}$ können wir formalisieren, in dem wir für jede Ordinalzahl α die in α Schritten definierbaren Mengen L_α beschreiben.

Definition 2.1.3. Die Stufen der *konstruierbaren Hierarchie* definieren wir ebenfalls durch den Rekursionssatz:

- $L_0 = 0$
- $L_{\alpha+1} = \mathfrak{Def}(L_\alpha)$
- $L_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} L_\delta$.

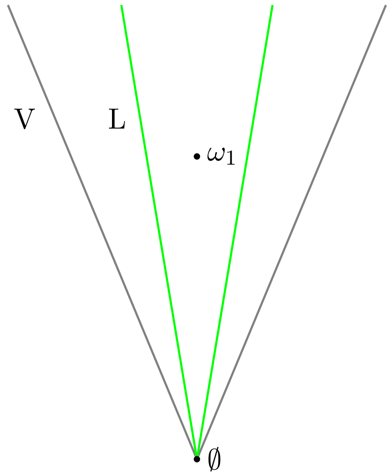

Abbildung 2.1: V und L

Die Mengen L_α nennen wir die Stufen des *konstruierbaren Universums* L, der Klasse aller definierbaren Mengen. Mengen in L nennen wir *konstruierbar*.

V hat nicht mehr oder weniger Ordinalzahlen als L, womit diese Modelle gleich *hoch* sind. V ist aber, zumindest potenziell, *breiter* als L, da es Mengen geben könnte, die nicht konstruierbar sind. Für alle Modelle M mit $\mathrm{Ord} \subseteq M$ und $M \models \mathrm{ZFC}$ gilt schon $L \subseteq M$. Daher ist L in diesem Sinne das *schmalste* Modell von ZFC (vgl. Definition 2.2.1), welches **Ord** beinhaltet.

2.2 Axiomensysteme

Definition 2.2.1 (ZFC-Axiome)**.** Die Axiome der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre sind:

(i) Nullmengenaxiom: $\exists x \forall y (y \notin x)$

(ii) Vereinigungsmengenaxiom: $\forall \mathcal{M} \exists x : (m \in x \iff \exists M \in \mathcal{M} : m \in M)$

(iii) Paarmengenaxiom: $\forall x \forall y \exists z (x \in z \land y \in z)$

(iv) Potenzmengenaxiom: $\forall x \in y \forall z (z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$

(v) Unendlichkeitsaxiom: $\exists x (\emptyset \in x \land \forall y \in x (y \cup \{y\} \in x))$

(vi) Extensionalitätsaxiom: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \iff z \in y) \Rightarrow x = y)$

(vii) Aussonderungsschema: für jede Formel φ in der y nicht frei vorkommt: $\forall p \forall w \exists y \forall x (x \in y \iff x \in w \land \varphi(x,p))$

(viii) Ersetzungsschema: für jede Formel $\varphi(v, w, w_1, ..., w_n, M)$, in der N nicht frei vorkommt:

$$\forall w_1, ..., w_n : \forall M : ([\forall x \in M \exists! y : \varphi(x, y, w_1, ..., w_n, M)] \Rightarrow \\ \exists N : \forall y [y \in N \Leftrightarrow \exists x \in M : \varphi(x, y, w_1, ..., w_n, M)])$$

(ix) Fundierungsaxiom: $\forall x(x \neq \emptyset) \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)$

(x) Auswahlaxiom: für jede Menge $\mathcal{M}$ deren Elemente nichtleere Mengen sind: $\exists f\ \forall M \in \mathcal{M} : f(M) \in M$

Bei (vii) und (viii) handelt es sich um rekursiv definierte *Axiomenschema*.

Die Klasse der Kardinalzahlen ist in ZFC in der Klasse der Ordinalzahlen enthalten. Wir identifizieren hierbei jede Kardinalzahl mit der kleinsten, zu ihr gleichmächtigen Ordinalzahl.

Definition 2.2.2. Durch transfinite Rekursion können wir die Funktion $\aleph$ definieren, die einer Ordinalzahl α die α-te unendliche Kardinalzahl zuordnet:

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = \min_{\kappa > \aleph_\alpha} \kappa$
- $\aleph_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} \aleph_\alpha$.

Diese Funktion ist wohldefiniert, da das Supremum von Kardinalzahlen wieder eine Kardinalzahl ist.

Die Kontinuumshypothese geht auf den deutschen Mathematiker Georg Cantor zurück und betrifft die Mächtigkeit des *Kontinuums* $\mathfrak{c}$, also der Mächtigkeit der reellen Zahlen. Wir werden uns in dieser Arbeit mit einer allgemeineren Version beschäftigen:

Definition 2.2.3 (GCH)**.** Die *verallgemeinerte Kontinuumshypothese* besagt, dass für beliebige Kardinalzahlen $\kappa \geq \aleph_0$

$$2^\kappa = \kappa^+$$

gilt. Die Annahme, dass die verallgemeinerte Kontinuumshypothese gilt, nennen wir GCH.

ZFC ohne das Auswahlaxiom nennen wir ZF. ZF(C) ohne das Potenzmengenaxiom nennen wir ZF(C)-Pot. In dieser Arbeit werden wir fast ausschließlich mit ZFC beziehungsweise ZFC+GCH arbeiten.

Definition 2.2.4. Die Annahme, dass alle Mengen konstruierbar sind, nennen wir

$$\text{“V = L”}.$$

Satz 2.2.1 (Gödel)**.** Es gilt

$$\text{Con(ZF)} \Rightarrow \text{Con(ZFC+“V=L”+GCH)}.$$

Satz 2.2.2. Sei M ein transitives Mengenmodell mit $M \models ZFC + (V = L)$. Dann ist $M = L_\alpha$ für ein $\alpha = \mathrm{Ord} \cap M$

Definition 2.2.5 (Kofinal)**.** Sei $(M, \leq)$ mit $X \subseteq M$. Dann heißt X *kofinal* (in M bzgl. $\leq$), wenn für alle $m \in M$ ein $x \in X$ existiert, mit $m \leq x$.

Definition 2.2.6 (Kofinalität)**.** Die *Kofinalität* $\mathrm{cf}(M)$ einer Menge M ist die Mächtigkeit ihrer kleinsten kofinalen Teilmenge:

$$\mathrm{cf}(M) := \min_{X \subseteq M, X \text{kofinal}} |X|$$

.

Bezüglich der $\in -$Relation liefert diese Definition für Ordinalzalen α:

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{|I| : \forall i \in I : \gamma_i \in \alpha \text{ und } \alpha = \sup_{i \in I} \gamma_i\}$$

Diese Menge ist nicht leer, da zumindest $|\alpha|$ vermöge $\alpha = \sup_{i \in \alpha} i$ enthalten ist.

Definition 2.2.7 (Regulär)**.** Eine Kardinalzahl κ heißt

- *regulär* wenn $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ gilt, also die *kleinste kofinale Teilmenge* von κ zu κ gleichmächtig ist.
- *singulär* wenn κ nicht regulär ist.

Satz 2.2.3. Sei $\kappa > \omega$ eine reguläre Kardinalzahl. Dann gilt $L_\kappa \models$ "V = L".

2.3 Elementare Kardinalzahlarithmetik

Definition 2.3.1. Für zwei Mengen M, N bedeutet

- $|M| \geq |N|$: Es gibt eine Surjektion von M nach N oder $N = \emptyset$, wir sagen M ist *mächtiger* als N.
- $|M| > |N|$: Es gibt keine Injektion von M nach N, wir sagen M ist *echt mächtiger* als N.
- $|M| = |N|$: Es gibt eine Bijektion von M nach N, wir sagen M ist *gleichmächtig* zu N.
- $|M| \leq |N|$: Es gibt eine Injektion von M nach N, wir sagen M ist *schmächtiger* als N.
- $|M| < |N|$: Es ist $|M| < |N|$ aber nicht $|M| = |N|$, wir sagen M ist *echt schmächtiger* als N.
- $|M| > |N|$: Es ist $|M| > |N|$ aber nicht $|M| = |N|$, wir sagen M ist *echt mächtiger* als N.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass $\emptyset$ eine Bijektion von $\emptyset$ nach $\emptyset$ ist.

Fakta 2.3.1 (Addition und Multiplikation)**.** Für Kardinalzahlen $\kappa, \lambda > 0$ mit $\lambda \geq \aleph_0$ gilt:

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

Ist zusätzlich $(\kappa_i)_{i \in \lambda}$ eine Familie von Kardinalzahlen, dann gilt

$$\sum_{i \in \lambda} \kappa_i = \lambda \cdot \sup_{i \in \lambda} \kappa_i$$

Fakta 2.3.2 (Potenzierung I)**.** Seien λ und $\kappa_i > 0$ mit $i \in I$ Kardinalzahlen, dann ist

$$\prod_{i\in I} k_i^\lambda = \left(\prod_{i\in I}\kappa_i\right)^\lambda.$$

Fakta 2.3.3 (Potenzierung II)**.** Sind κ und λ unendliche Kardinalzahlen mit $2 \leq \kappa \leq \lambda$ so ist $\kappa^\lambda = 2^\lambda$. Ist sogar $\kappa < \lambda$, so gilt:

- $\exists \mu < \kappa : \mu^\lambda \geq \kappa \Rightarrow \kappa^\lambda = \mu^\lambda$
- $\forall \mu < \kappa : \mu^\lambda < \kappa \Rightarrow \kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa, & \text{falls } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \\ \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Lemma 2.3.1 (Hausdorff Formel)**.** Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen. Dann gilt

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+.$$

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\kappa^+ \leq \lambda$: Dann ist $(\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda, \kappa^\lambda = 2^\lambda$ und $\kappa^+ \leq \lambda \leq 2^\lambda$ womit $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+ \Leftrightarrow 2^\lambda = 2^\lambda$.

$\kappa^+ > \lambda$: Da beide Faktoren sicher durch $(\kappa^+)^\lambda$ nach oben beschränkt sind, bleibt zu zeigen, dass $(\kappa^+)^\lambda \leq \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$. Da κ^+ als Nachfolger Kardinalzahl regulär ist, also $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+ > \lambda$, ist jedes $f : \lambda \to \kappa^+$ durch ein $\alpha_f \in \kappa^+$ beschränkt. Wir erhalten:

$$(\kappa^+)^\lambda = \bigcup_{\alpha\in\kappa^+} \alpha^\lambda.$$

Da jedes dieser $\alpha < \kappa^+$ also $\alpha \leq \kappa$ ist, erhalten wir

$$(\kappa^+)^\lambda \leq \sum_{\alpha<\kappa^+} \alpha^\lambda \leq \sum_{\alpha<\kappa^+} \kappa^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$$

□

3 Einführung in Forcing

Es ist bei Konsistenzbeweisen oft zielführend, spezielle mengentheoretische Modelle zu betrachten. *Forcing* bietet hierbei eine allgemeine Methode, solche Modelle zu konstruieren. Dazu gibt es mehrere Herangehensweisen (vgl. [Kun04]), wir werden uns aber auf eine einzige beschränken. Diese Modelle werden Erweiterungen von bestehenden Modellen M von ZFC sein. Dass diese *Grundmodelle* existieren, können wir aufgrund der *Gödelschen Unvollständigkeitssätze* nicht mit den ZFC Axiomen beweisen. Wir werden also stets die *Konsistenz* $\mathrm{Con}(ZFC)$ bzw. die Existenz eines Modells M mit $M \models ZFC$ voraussetzen.

Um etwaige Komplikationen zu vermeiden, werden wir mit abzählbaren transitiven Mengenmodellen von ZFC arbeiten. Die Abzählbarkeit ist notwendig, um im allgemeinen die Existenz von jeden Objekten zu garantieren, um die wir unser Modell erweitern wollen: *generische Filter* (vgl. Lemma 3.1.1).

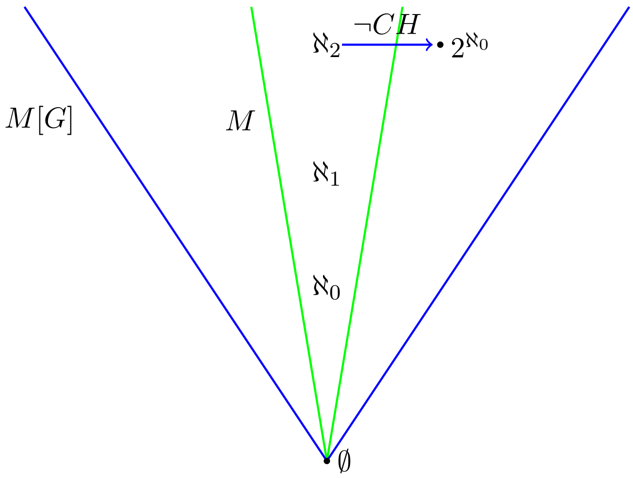

Abbildung 3.1: Modell für ¬CH

In Abbildung 3.1 soll der Pfeil eine Injektion von ω_2 in 2^{ω_0} darstellen, welche in der Erweiterung $M[G]$ konstruiert wurde. Wenn diese Erweiterung nicht selbst ZFC erfüllt, hat die Verletzung von CH in ihr keine Konsequenzen. Wir werden daher zeigen müssen, dass $M[G]$ tatsächlich ein Modell von ZFC ist. Um festzustellen, welche Eigenschaften noch erhalten bleiben, beziehungsweise unter welchen Umständen, werden wir einige kombinatorischen Eigenschaften untersuchen. Die Erweiterung wird zum Beispiel - wie in dieser Abbildung angedeutet - gleich "hoch"wie das ursprüngliche Modell sein, also nicht neue Ordinalzahlen hinzufügen.

3.1 Grundlagen

Definition 3.1.1. Das Tupel $(\mathbb{P}, \leq)$ ist eine *Halbordnung*, wenn die Relation $\leq$ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und nicht-leer ist. Wir nennen $\mathbb{P}$ die *Bedingungsmenge* und ihre Elemente entsprechend *Bedingungen*. Wir nennen eine Bedingung $p \in \mathbb{P}$ *stärker* (*echt stärker*) als eine Bedingung $q \in \mathbb{P}$ genau dann, wenn $p \leq q$ $(p < q)$.

Im Folgenden beschreibt $\mathbb{P}$ immer eine Halbordnung. Um die verschiedenen topologischen, beziehungsweise graphentheoretischen Eigenschaften von Halbordnungen und ihrer Teilmengen besser darzustellen, werden wir diese repräsentative Skizze verwenden:

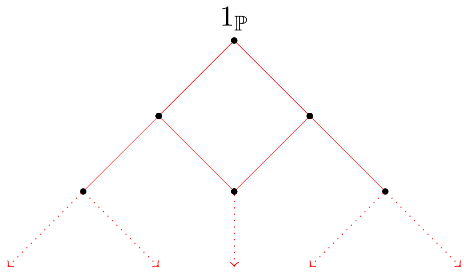

Abbildung 3.2: Halbordnung mit maximalem Element $1_{\mathbb{P}}$

Definition 3.1.2. Eine nicht-leere Menge $G \subseteq \mathbb{P}$ ist ein (*Ordnungs-*) *Filter* genau dann, wenn G

1. nach unten gerichtet ist: $\forall p, q \in G\ \exists r \in G : r \leq p \wedge r \leq q$
2. nach oben abgeschlossen ist: $\forall p \in G\ \forall q \in \mathbb{P} : p \leq q \Rightarrow q \in G$.

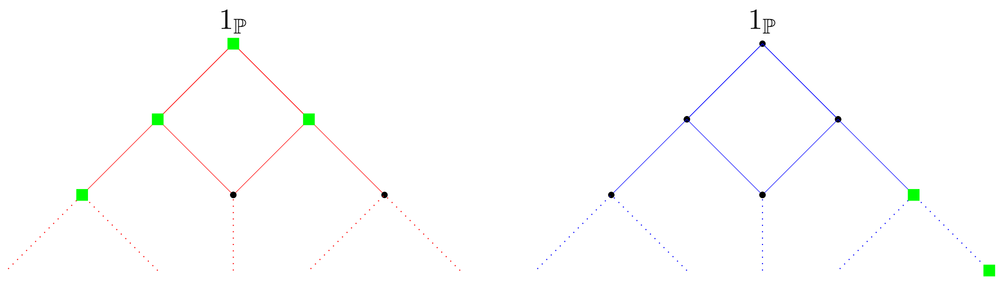

Abbildung 3.3: Nach unten gerichtet, nach oben abgeschlossen

In Abbildung 3.3 können wir Teilmengen mit den quadratisch markierten Punkten identifizieren. In der linken Halbordnung ist diese Teilmenge nach oben abgeschlossen, aber nicht nach unten gerichtet, in der rechten Halbordnung ist die Teilmenge zwar nach unten gerichtet, aber nicht nach oben abgeschlossen.

Definition 3.1.3. Sei $q \in \mathbb{P}$. Eine Menge $D \subseteq \mathbb{P}$ heißt *dicht unter* q genau dann, wenn

$$\forall p \leq q\ \exists g \in D : g \leq p.$$

Ferner heißt D *dicht in* $\mathbb{P}$, wenn D dicht unter allen $p \in \mathbb{P}$ ist.

Fakta 3.1.1. Als direktes Korollar dieser Definition erhalten wir:

1. Sei D dicht unter p und $q \leq p$, dann ist D dicht unter q.

2. Sei D beliebig mit $D' := \{q \mid D \text{ ist dicht unter } q\}$ dicht unter p, dann ist D dicht unter p.

Beweis. 1. Sei $r \leq q$ beliebig, da r per Transitivität auch kleiner p ist, existiert aufgrund der Dichtheit unter p ein $s \leq r$ mit $s \in D$, womit D dicht unter q ist.

2. Sei D beliebig mit $D' := \{q \mid D \text{ ist dicht unter } q\}$ dicht unter p. Sei $q \leq p$ beliebig, dann existiert aufgrund der Dichtheit von D' ein $r \leq q$ mit $r \in D'$ womit per Konstruktion von D' auch ein $s \leq r$ existiert mit $s \in D$. In Summe erhalten wir $s \leq r \leq q \leq p$. Da q beliebig war ist D dicht unter p.

$\square$

Definition 3.1.4. Sei $p, q \in \mathbb{P}$. Wir nennen p und q *kompatibel* und schreiben $p \| q$ genau dann, wenn

$$\exists r \in \mathbb{P} : r \leq p \wedge r \leq q.$$

Falls kein solches r existiert, nennen wir p und q *inkompatibel* und schreiben $p \perp q$. Weiters bezeichne $p^{\perp}$ die Menge aller zu p inkompatiblen Bedingungen.

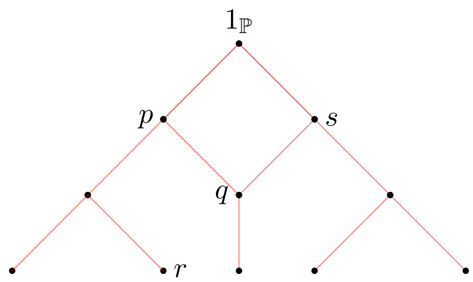

Abbildung 3.4: Kompatibel und Inkompatibel

Hat eine Halbordnung ein maximales Element, so ist dieses mit jedem Element a kompatibel, da alle Elemente $b \leq a$ auch kleiner dem maximalen Element sind. In Abbildung 3.4 ist $r \perp q$, $r \perp s$ und $p \| s$, da $p \geq q \leq s$.

Definition 3.1.5. Sei $\mathcal{D}$ eine Familie dichter Teilmengen einer Halbordnung $\mathbb{P}$. Ein Filter $G \subseteq \mathbb{P}$ heißt $\mathcal{D}$*-generisch*, wenn er mit jedem D aus $\mathcal{D}$ nicht leeren Schnitt hat.

Lemma 3.1.1. Sei $\mathbb{P}$ eine Halbordnung und $\mathcal{D} := (D_i)_{i \in I}$ eine höchstens abzählbare Familie dichter Mengen. Dann existiert für alle $p \in \mathbb{P}$ ein $\mathcal{D}-$generischer Filter G mit $p \in G$.

Beweis. Sei $p \in \mathbb{P}$ beliebig und $\mathcal{D}$ o.B.d.A. abzählbar mit Indexmenge $I = \omega$, vermöge der Abzählung von $\mathcal{D}$. Wir definieren nun induktiv eine Familie $(p_i)_{i\in\omega}$ mit $p_0 = p$. Da D_n dicht ist, existiert ein $q \in D_n$ mit $q \leq p_n$. Wir definieren $p_{n+1} := q$. Sei G nun die Menge aller Bedingungen, die zumindest über einem p_i liegen:

$$G := \{r \in \mathbb{P} \mid \exists i \in \omega : p_i \leq r\}.$$

G ist offensichtlich $\mathcal{D}-$generisch, da zumindest $p_n \in D_n \cap G$ für alle $n \in \omega$, also trifft G alle D_n. Um zu zeigen, dass G ein Filter ist, sei $q, r \in G$ beliebig. Da sie in G sind, existieren m, n mit $p_m \leq q$ und $p_n \leq r$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $m \leq n$. Da p_n kleiner als das Infimum aller Vorgänger ist, muss auch $p_n \leq p_m$, insbesondere $p_n \leq q$ per Transitivität. Mit Reflexivität gilt $p_n \in G$, womit G nach unten gerichtet ist. Sei nun ein $q \in G$ fix und $r \in \mathbb{P}$ beliebig mit $q \leq r$. Dann existiert per Konstruktion ein n mit $p_n \leq q$. Mit Transitivität folgt $p_n \leq r$ also $r \in G$, womit G nach oben abgeschlossen ist.

□

Definition 3.1.6. Eine Halbordnung $\mathbb{P}$ heißt *atomfrei*, wenn es unter jedem $p \in \mathbb{P}$ mindestens 2 inkompatible Bedingungen gibt:

$$\forall p \in \mathbb{P}\ \exists r \leq p\ \exists q \leq p : r \perp q$$

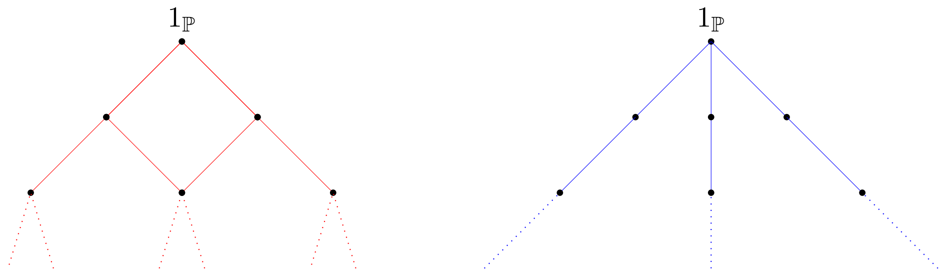

Abbildung 3.5: Atomfrei, nicht Atomfrei

In Abbildung 3.5 ist die linke Halbordnung atomfrei und die Rechte nicht, da zu jedem Punkt alle kleineren Bedingungen kompatibel sind. Die Halbordnung in Abbildung 3.2 ist auch nicht atomfrei.

Definition 3.1.7 (Cohen Forcing)**.** Sei $\mathbb{C} := \omega^{<\omega} = \{f : n \to \omega \mid f \text{ ist eine Funktion}, n \in \omega\}$. Für $p, q \in \mathbb{C}$ schreiben wir $p \leq q$ genau dann, wenn p eine Fortsetzung von q oder gleich q ist. Das Paar $(\mathbb{C}, \leq)$ nennen wir *Cohen Forcing*.

Fakta 3.1.2. Es gilt:

- $p \leq q \Leftrightarrow p \supseteq q$.
- $(\mathbb{C}, \leq)$ ist eine Halbordnung.

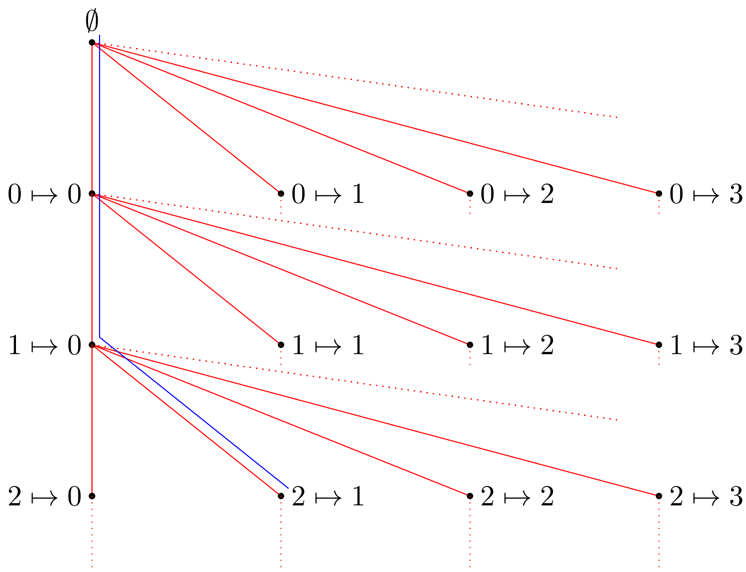

Abbildung 3.6: Cohen forcing

In der Abbildung 3.6 entsprechen die durch Linien nach unten verbunden Punkte Fortsetzungen von Funktionen. Der höchste Punkt (mit der leeren Menge beschriftet), repräsentiert die leere Funktion $\{\}$. Diese ist Teilmenge jeder anderen Funktion, also maximales Element im Cohen Forcing. Der neben der blauen Linie verlaufende Abschnitt soll die Funktion $f : 3 \to \omega,\ f = \{(0,0),(1,0),(2,1)\}$ repräsentieren. Jede Fortsetzung von f, also eine bezüglich $\leq$ kleinere Bedingung, liegt entlang der rot gepunkteten Linie unter dem mit $2 \mapsto 1$ beschrifteten Punkt.

Beweis von Fakta 3.1.2. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der ersten, da die Mengeninklusion eine Halbordnung ist.

Sei also p eine Fortsetzung von q, so ist per definitionem schon $p \supseteq q$. Ist andererseits $p \supseteq q$, so ist, da die Definitionsmengen von p, q irgendwelche $n_p, m_q \in \omega$ sind und für diese dann $n_p \leq m_q$ gelten muss, auch $p \leq q$.

□

Wir wollen nun mithilfe von generischen Filtern einen alternativen Beweis für ein klassisches Resultat aus der Mengenlehre bringen. Die Konstruktionen aus diesem Beweis werden uns später bei der Herleitung eines Zeugen für ¬CH wiederbegegnen.

Satz 3.1.1 (Cantor)**.** Es gilt

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

Beweis. Es ist $|\omega^\omega| = 2^{\aleph_0}$. Wenn $\omega^\omega \setminus X$ für beliebiges abzählbares X nicht leer ist, sind wir fertig. Natürlich können wir uns hier bei den Mengen X auf Teilmengen von ω^ω beschränken. Sei also $X \subseteq \omega^\omega$ abzählbar und beliebig. Da X abzählbar ist, können wir alle ihre Elemente f mit natürlichen Zahlen indizieren: Sei für $n \in \omega$

$$D_n := \{p \in \mathbb{C} \mid p \neq f_n \restriction_{\mathrm{dom}(p)}\},$$

wobei $\mathbb{C}$ das Cohen Forcing ist, f_n die entsprechend indizierten Elemente von X sind und weiters
$$D_n^* := \{p \in \mathbb{C} \mid n < \mathrm{dom}(p)\}.$$
Diese Mengen sind für alle $n \in \omega$ dicht in $\mathbb{C}$: Sei $p \in \mathbb{C}$ mit $d := \mathrm{dom}(p)$ beliebig und o.B.d.A. nicht in D_n beziehungsweise D_n^*. Für D_n erhalten wir dann ein f_n, welches auf der Definitionsmenge von p mit p übereinstimmt, da $p \notin D_n \iff p = f_n \restriction_{\mathrm{dom}(p)}$. Dieses f_n ist also sogar eine Fortsetzung von p. Wir schränken nun f_n ein und ändern einen Funktionswert: $\hat{f}_n := f_n \restriction_d \cup \{(d+1, f_n(d+1)+1)\}$ womit $\hat{f}_n \leq p$ und $\hat{f}_n \in D_n$, infolge von $\hat{f}_n(d+1) \neq f_n(d+1)$. Für D_n^* ist $n \not< d$ also $d \leq n$. Dann ist aber $\hat{p} := p \cup \{(d+k, d+k) \mid k \leq n-d+1\}$ in D_n^*, da $n \in n+1 = \mathrm{dom}(\hat{p})$. Da $\hat{p}$ die Funktion p fortsetzt, ist auch $\hat{p} \leq p$. Betrachten wir die Familie
$$\mathcal{D} := (D_n \cup D_n^*)_{n\in\omega},$$
so existiert, da $\mathcal{D}$ als Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist, per Lemma 3.1.1 ein $\mathcal{D}$-generischer Filter G. Da G alle D_n^* trifft, existiert für alle $n \in \omega$ ein $p_n \in G$ mit $n < \mathrm{dom}(p)$. Da G als Filter nach unten gerichtet ist, müssen sich diese p_n, wie alle $p \in G$, fortsetzten, womit ihre Vereinigung wieder wohldefiniert ist:
$$\bigcup_{n\in\omega} p_n = \bigcup G \in \omega^\omega$$
Allerdings existiert, da G alle D_n trifft, für alle $m \in \omega$ ein $p \in G$ mit $p_m \neq x_m \restriction_{\mathrm{dom}(p)}$. Da wie oben gezeigt, $\bigcup G$ wohldefiniert ist, muss $p_m = p_n$ bei $m = n$, womit auch $\bigcup G \neq x_m$. Es gilt also
$$\bigcup G \in \omega^\omega \backslash X,$$
womit $\omega^\omega \backslash X$, nicht leer ist, was zu zeigen war.

□

Definition 3.1.8. Sei $\mathbb{P}$ eine Halbordnung. Ein Filter $G \subseteq \mathbb{P}$ heißt $\mathbb{P}$-*generisch*, wenn er mit jeder dichten Teilmenge von $\mathbb{P}$ nicht leeren Schnitt hat.

Die Existenz von $\mathbb{P}$-generischen Filtern folgt für abzählbare Halbordnungen unmittelbar aus Lemma 3.1.1. Wir werden oft nur *generisch* schreiben, da die gemeinte Familie beziehungsweise Halbordnung aus dem Kontext klar sein wird. In der Regel bezeichnet G bei uns immer einen generischen Filter.

Definition 3.1.9. Eine Menge A heißt *Antikette* genau dann, wenn alle Elemente aus A paarweise inkompatibel sind. Existiert darüber hinaus für jede Bedingung in einer Teilmenge $N \subseteq \mathbb{P}$ eine kompatible Bedingung in A, so ist A eine *maximale Antikette* in N.

Die Existenz von solchen Antiketten zu beweisen, ist im Allgemeinen nicht trivial. Sie ist sogar äquivalent zum Auswahlaxiom.

Lemma 3.1.2. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M mit $N \subseteq \mathbb{P}$. Dann existiert eine maximale Antikette A in N.

Beweis. Wir wollen das Lemma von Zorn bemühen. Sei $\boldsymbol{A}$ die Menge aller Antiketten in einer beliebigen Menge $N \subseteq \mathbb{P}$. Diese Menge ist durch Inklusion halbgeordnet. Weiters hat jede Kette in $\mathcal{A}$ in $(\boldsymbol{A}, \subseteq)$ mit $\bigcup \mathcal{A}$ ein maximales Element in $\boldsymbol{A}$. Sei nun A eine bezüglich Inklusion maximale Antikette. Wir wollen zeigen, dass diese Antikette tatsächlich maximal ist. Sei dazu $p \in N$ beliebig. Dann ist entweder $p \in A$ oder $A \cup \{p\}$ keine Antikette, da A bezüglich Inklusion maximal ist. Im ersten Fall sind wir fertig. Ist andererseits $A \cup \{p\}$ keine Antikette, folgt, da A eine Antikette ist, dass p kompatibel mit einem Element von A sein muss, was zu zeigen war. □

Definition 3.1.10. Eine Menge $D_o \subseteq \mathbb{P}$ heißt *offen* genau dann, wenn $\forall p \in D_o, q \in \mathbb{P} : q \leq p \Rightarrow q \in D_o$.

Fakta 3.1.3. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M und G ein Filter in $\mathbb{P}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. G ist $\mathbb{P}$-generisch über M
2. $G \cap D_o \neq \emptyset$, für alle offenen, dichten Mengen D_o in $\mathbb{P}$
3. $G \cap A \neq \emptyset$ für alle maximalen Antiketten A in $\mathbb{P}$.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz durch einen Ringschluss:

$1 \Rightarrow 2$ Eine Menge ist per definitionem genau dann $\mathbb{P}$-generisch, wenn sie für alle dichte Mengen in $\mathbb{P}$ generisch ist. Offene und dichte Mengen sind insbesondere dicht.

$2 \Rightarrow 3$ Wir zeigen die Kontraposition: $\neg 3 \Rightarrow \neg 2$. Sei also A eine von G disjunkte maximale Antikette. Betrachte die Menge $D_o := \{q \in \mathbb{P} \mid \exists p \in A : q \leq p\}$. D_o ist dicht, da für beliebiges p in $\mathbb{P}$ per Maximalität ein kompatibles q in A existiert, womit ein $r \leq p$ in $\mathbb{P}$ existiert, welches per Konstruktion auch in D_o ist. D_o ist per Transitivität auch offen. Wir nehmen nun $p \in G \cap D_o$ an und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Dann ist per Konstruktion $p \leq q$ für ein q in A, da Filter nach oben abgeschlossen sind, ist das ein Widerspruch zur Disjunktheit von G und A, womit D_o disjunkt mit G ist, was zu zeigen war.

$3 \Rightarrow 1$ Wir zeigen die Kontraposition: $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$. Sei also D eine von G disjunkte, dichte Menge: $D \cap G = \emptyset$. Per Lemma 3.1.2 existiert eine in D maximale Antikette $A \subseteq D$. Wir wollen zeigen, dass A auch in $\mathbb{P}$ maximal ist. Sei also q in $\mathbb{P}$ beliebig. Dann existiert per Dichtheit ein p in D mit $p \leq q$. Für dieses $p \in D$ existiert ein kompatibles $a \in A$, bezeugt durch ein $r \in \mathbb{P}$: $a \geq r \leq p$. Somit ist, per Transitivität, A auch eine maximale Antikette in $\mathbb{P}$: $a \geq r \leq p \leq q$. Da $A \subseteq D$ und $D \cap G = \emptyset$, ist auch $A \cap G = \emptyset$.

□

Wir werden jetzt noch einige nützliche Eigenschaften von generischen Filtern erkunden:

Fakta 3.1.4. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M, D dicht unter p und G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M mit $p \in G$. Dann haben G und D nicht leeren Schnitt.

Beweis. Sei $D_p := D \cup p^\perp$. Diese Menge ist dicht, da für $q \in \mathbb{P}$ beliebig - und ohne Beschränkung der Allgemeinheit kompatibel mit p - ein $r \leq p$ existiert, für welches, per Dichte unter p, ein $s \in D_p$ existiert mit $s \leq r \leq q$. Da G $\mathbb{P}$-generisch ist, also alle dichten Mengen trifft, existiert ein $q \in G \cap D_p$. Dieses ist insbesondere in G. Da G aber nach unten gerichtet ist, ist $q \| p$ womit $q \notin p^\perp$ also $q \in D$, womit G auch D trifft. □

Lemma 3.1.3. Sei M ein transitives Modell von ZF, $\mathbb{P} \in M$ eine atomfreie Halbordnung, G generisch über M, dann ist G nicht in M.

Beweis. Wir nehmen $G \in M$ an und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Dann ist per Absolutheit der Differenz zweier Mengen auch $\mathbb{P} \backslash G =: D \in M$. Wir behaupten, dass D dicht ist. Sei $p \in \mathbb{P}$ beliebig. Dann existieren per Atomfreiheit $q, r \in \mathbb{P}$ mit $q, r \leq p$ und $q \perp r$. Da G als Filter nach unten gerichtet ist, aber q und r inkompatibel sind, kann nicht $q \in G \wedge r \in G$. Sei o.B.d.A. nur $r \in G$. Damit ist per Konstruktion $q \in D$ und $q \leq p$. Allerdings haben G und D leeren Schnitt, woraus mit Fakta 3.1.3 folgt, dass G nicht $\mathbb{P}$-generisch ist, ein Widerspruch. □

3.2 Generische Erweiterungen

Die generische Erweiterung soll sich als die am Anfang von Abschnitt 3 angesprochene Erweiterung eines zugrundeliegenden Modells M herausstellen.

Definition 3.2.1. Sei M ein abzählbares Modell von ZFC, $\mathbb{P} \in M$ eine Halbordnung und G $\mathbb{P}$-generisch. Für Ordinalzahlen $\alpha \in \boldsymbol{On} \cap M$ definieren wir durch transfinite Rekursion die Mengen $M_\alpha^\mathbb{P}$ wobei wir $M_{<\alpha}^\mathbb{P} := \bigcup_{\beta \in \alpha} M_\beta^\mathbb{P}$ setzen

$$M_\alpha^\mathbb{P} := \{\tau \in M \mid \tau \subseteq M^2 \text{ und } \forall (\sigma, p) \in \tau : (p \in \mathbb{P} \wedge \sigma \in M_{<\alpha}^\mathbb{P})\ \}$$

und

$$M^\mathbb{P} := \bigcup_{\alpha \in \boldsymbol{On} \cap M} M_\alpha^\mathbb{P}.$$

Die Elemente von $M^\mathbb{P}$ nennen wir $\mathbb{P}$-*Namen*. Darüber hinaus schreiben wir τ^G für die G-*Interpretation* von $\tau \in M^\mathbb{P}$ rekursiv definiert durch:

$$\tau^G := \{\sigma^G \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \tau\}$$

Definition 3.2.2. Sei M ein abzählbares Modell von ZFC und $G \in M$ eine generische Menge. Dann nennen wir die Klasse aller G-Interpretationen

$$M[G] := \{\tau^G \mid \tau \in M^\mathbb{P}\}$$

eine *generische Erweiterung* von M.

Aufgrund dieser Konstruktion werden wir beliebige Elemente von $M[G]$ mit der G-Interpretation eines Namens in $M^\mathbb{P}$ beschreiben können. Zum Beispiel: "Sei $\tau^G \in M[G]$ beliebig", statt "Sei $x \in M[G]$ beliebig". In diesem Fall wäre τ der korrespondierende $\mathbb{P}$-Name.

Ist $M[G]$ tatsächlich eine Erweiterung von M, so ist es selbstverständlich, dass Mengen in M auch Namen für sich selbst haben sollten. Mit einem ausgezeichneten Element $p^* \in \mathbb{P}$ können wir auf natürliche Weise Namen für $X \in M$ wählen, indem wir die Menge aller Paare (x, p^*) mit $x \in X$ betrachten. Es wird sich später (Lemma 3.3.1) als nützlich erweisen, ein möglichst schwaches p^* zu wählen:

Definition 3.2.3. Sei M ein Modell von ZFC. Sei $\mathbb{P}$ eine Halbordnung mit maximalem (schwächsten) Element $1_{\mathbb{P}}$. Für $X \in M$ nennen wir

$$\check{X} := \{(x, 1_{\mathbb{P}}) \mid x \in X\}$$

den $\mathbb{P}$-*Namen* von X. Weiters sei $\dot{G} := \{(\check{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\}$.

Im Beweis des folgenden Lemmas zeigen wir, dass sogar $\check{x}^G = x$ und $\dot{G}^G = G$, falls G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M ist.

Lemma 3.2.1. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P} \in M$ eine Halbordnung mit maximalem Element, $G \subseteq \mathbb{P}$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M. Dann gilt:

- $M[G]$ ist transitiv,
- $M \subseteq M[G]$,
- $G \in M[G]$.

Beweis. Wir zeigen die drei Punkte seperat:

- Seien $x \in X \in M[G]$ beliebig. Zu zeigen ist $x \in M[G]$. Per Konstruktion ist X die G-Interpretation τ^G eines $\mathbb{P}$-Namens τ. Dessen Elemente sind wiederum G-Interpretationen σ^G. Also ist x auch eine G-Interpretation. Da $M[G]$ die Klasse aller G-Interpretationen ist, ist $x \in M[G]$.
- Tatsächlich ist für $X \in M$ sogar $\check{X}^G = X$. Das zeigen wir per Induktion über den $\in$-Rang von X:
  - **Induktionsanfang**: $\check{\emptyset}^G = \{\sigma^G \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \check{\emptyset}\} = \emptyset$ wobei die letzte Gleichheit gilt, da $\check{\emptyset} = \emptyset$.
  - **Induktionsvoraussetzung**: $\check{x}^G = x$ für alle $\check{x} \in \check{X}$.
  - **Induktionsschritt**: Per definitionem ist $\check{X}^G = \{\sigma^G \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \check{X}\}$. Da für $\check{X}$ nur $p = 1_{\mathbb{P}}$ und $x \in X$ infrage kommen, ist

    $$\{\sigma^G \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \check{X}\} = \{\check{x}^G \mid x \in X\}$$

    wobei der letzte Ausdruck per Induktionsvoraussetzung gleich X ist.
- Wir zeigen, dass $\dot{G}^G = G$. Per definitionem ist $\dot{G}^G = \{\sigma^G \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \dot{G}\} = \{\check{p}^G \mid p \in G\}$, da die Elemente von $\dot{G}$ genau die Paare $(\check{p}, p)$ sind. Mit dem vorigen Punkt ist $\check{p}^G = p$ womit $\{\check{p}^G \mid p \in G\} = G$.

Da $\check{X}^G$ und $\dot{G}^G$ als G-Interpretation in $M[G]$ sind, sind wir fertig. □

Mit dem dritten Punkt aus Lemma 3.2.1 und Lemma 3.1.3 erhalten wir unmittelbar, dass generische Erweiterungen für atomfreie Halbordnungen tatsächlich Erweiterungen sind. Der zweite Punkt von Lemma 3.2.1 kann also in diesem Fall zu $M \subsetneq M[G]$ verschärft werden.

Lemma 3.2.2. Seien M, N Modelle von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M und G über M $\mathbb{P}$-generisch. Dann ist $M[G]$ das kleinste (bzgl. $\subseteq$) Modell von ZFC das G enthält und M umfasst:

$$G \in N \wedge M \subseteq N \Rightarrow M[G] \subseteq N.$$

Beweis. Sei $x \in M[G]$ beliebig. $M[G]$ ist die Klasse aller G-Interpretationen. Daher ist $x = \tau^G$ für einen Namen τ der per Voraussetzung auch in N ist. Die rekursive Definition der G-Interpretation ist absolut. Mit $G \in N$ ist also $x = \tau^G = (\tau^G)^N \in N$. □

Lemma 3.2.3. Sei M ein Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M und G über M $\mathbb{P}$-generisch. Dann ist $M[G]$ gleich hoch wie M:

$$M \cap \mathrm{Ord} = M[G] \cap \mathrm{Ord}.$$

Beweis. Wir zeigen die beidseitige Inklusion:

„ $\supseteq$ “ Wir zeigen zuerst per Induktion, dass der $\in$-Rang von τ (also $\mathrm{rank}(\tau)$) nicht kleiner als der seiner G-Interpretation ist:

- **Induktionsanfang**: Die leere Relation ist als $M_0^{\mathbb{P}}$ auch in $M^{\mathbb{P}}$ enthalten. Also gilt in diesem Fall sogar Gleichheit.
- **Induktionsvoraussetzung**: Es gilt $\mathrm{rank}(\sigma^G) \leq \mathrm{rank}(\sigma)$ für alle $\sigma^G \in \tau^G$.
- **Induktionsschritt**: Per Konstruktion von τ^G ist $\mathrm{rank}(\tau^G) \leq \sup\{\mathrm{rank}(\sigma^G) + 1 \mid \exists p \in G : (\sigma, p) \in \tau\}$. Mit der Induktionsvoraussetzung gilt nun auch $\mathrm{rank}(\sigma^G) \leq \mathrm{rank}(\sigma) \leq \mathrm{rank}(\tau)$, für σ^G aus τ^G. Also insgesamt $\mathrm{rank}(\tau^G) \leq \mathrm{rank}(\tau)$.

Sei nun $\alpha \in M[G] \cap \mathrm{Ord}$ beliebig. Da $\alpha \in M[G]$, existiert ein $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ mit $\alpha = \tau^G$. Mit unserer Induktion erhalten wir nun: $\alpha = \mathrm{rank}(\alpha) = \mathrm{rank}(\tau^G) \leq \mathrm{rank}(\tau)$. Es existiert ein $\gamma \in M \cap \mathrm{Ord}$ mit $\tau \in M_\gamma^{\mathbb{P}}$. Also ist $\mathrm{rank}(\tau) \leq \gamma$ womit $\alpha \in M \cap \mathrm{Ord}$.

„ $\subseteq$ “ Da $M[G]$ per Lemma 3.2.1 Obermenge von M ist, sind wir fertig.

□

Lemma 3.2.4. Sei M ein Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M und G über M $\mathbb{P}$-generisch. Ist M eine Menge, so ist $M[G]$ gleichmächtig zu M:

$$|M| = |M[G]|$$

Beweis. Per Lemma 3.2.1 ist $M \subseteq M[G]$ also insbesondere $|M| \leq |M[G]|$. Per definitionem ist aber $M[G] = \{\tau^G \mid \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$, womit $|M[G]| \leq |M^{\mathbb{P}}|$. Da die $\mathbb{P}$-Namen per Konstruktion in M sind, ist auch $|M[G]| \leq |M|$, also $|M| = |M[G]|$ □

Wir haben jetzt schon einige Anforderungen, die wir am Anfang von Abschnitt 3 an unsere Erweiterung gestellt haben, überprüft. Bleibt zu zeigen, dass $M[G]$ tatsächlich ein Modell von ZFC ist:

Fakta 3.2.1. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P} \in M$ eine Halbordnung mit maximalem Element und $G \subseteq \mathbb{P}$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M. Dann erfüllt die generische Erweiterung $M[G]$ folgende Axiome:

1. Leermengenaxiom
2. Unendlichkeitsaxiom
3. Extentionalitätsaxiom
4. Fundierungsaxiom
5. Paarmengenaxiom
6. Vereinigungsaxiom

Beweis. Seien M, $\mathbb{P}$ und G wie oben und beliebig.

1.+2. Die leere Menge und ω sind in M. Mit Lemma 3.2.1 ist $M \subseteq M[G]$ womit sie auch in $M[G]$ sind.

3. Dies folgt allein aus der Transitivität. Wir zeigen die Kontraposition: $\forall x, y \in M[G] : x \neq y \Rightarrow \neg(\forall z : (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$. Sei also $x \neq y$. Durch das Extentionalitätsaxiom in V finden wir ein $z' \in V$ welches sich in einer der beiden Mengen befindet, aber nicht in der anderen. Sei o.B.d.A. $z' \in x \backslash y$. Per Transitivität von $M[G]$ (Lemma 3.2.1) ist aber $x \subseteq M[G]$ und somit $z' \in M[G]$ womit $M[G] \models z' \in x \wedge z' \notin y$ also $M[G] \models \neg(\forall z : (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$, was zu zeigen war.

4. Sei also $x \in M[G] \subseteq V$ beliebig. Da V wohlfundiert ist, existiert ein $y \in V$ mit $y \in x$ und $y \cap x = \emptyset$. Da $M[G]$ transitiv ist, gilt aber auch $y \in M[G]$, womit wir ein $y \in M[G]$ gefunden haben mit $y \cap x = \emptyset$, was zu zeigen war.

5. Sei $x, y \in M[G]$ beliebig. Es existieren also $\tau \in M^{\mathbb{P}}_{\alpha}$ und $\sigma \in M^{\mathbb{P}}_{\beta}$ mit $\tau^G = x$ und $\sigma^G = y$. Wir definieren
$$\rho := \{(\tau, 1_{\mathbb{P}}), (\sigma, 1_{\mathbb{P}})\}$$
Sei o.B.d.A. $\alpha \leq \beta$. Als binäre Relation mit Definitionsmenge $M^{\mathbb{P}}_{\leq\beta}$ und Zielmenge $\mathbb{P}$ ist $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Per definitionem ist $\rho^G = \{\tau^G, \sigma^G\} = \{x, y\}$. Also ist das Paar $\{x, y\}$ als G-Interpretation in $M[G]$. "$A = \{a, b\}$" ist absolut, womit $M[G]$ das Paarmengenaxiom erfüllt.

6. Sei $X \in M[G]$. Es existiert also ein $\tau \in M^{\mathbb{P}}_{\alpha}$ mit $\tau^G = X$. Wir definieren
$$\rho := \{(\sigma, p) \mid \exists \pi \exists q, q' \geq p : (\sigma, q) \in \pi \wedge (\pi, q') \in \tau\}.$$
Als binäre Relation mit Definitionsmenge $M^{\mathbb{P}}_{\leq\alpha}$ und Zielmenge $\mathbb{P}$ ist $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Die Aussage "$A = \bigcup \mathcal{A}$" ist absolut, womit $M[G]$ das Vereinigungsaxiom erfüllt.

$\square$

Um zu zeigen, dass die anderen Axiome von ZFC auch erfüllt sind, müssen wir etwas ausholen und die Erzwingungsrelation einführen.

3.3 Die Erzwingungsrelation

Definition 3.3.1. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung mit $p \in \mathbb{P}$, φ eine Formel und $\tau_1, ..., \tau_n$ in M. Wir schreiben

$$p \Vdash_M^{\mathbb{P}} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$$

und sagen *p erzwingt* $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ (*p forces* $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$) genau dann, wenn $M[G] \models \varphi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$ für alle $G \subseteq \mathbb{P}$ die $\mathbb{P}$-generische Filter über M sind mit $p \in G$.

Diese Definition haben wir jetzt außerhalb von M geführt. Tatsächlich lässt sich eine äquivalente Relation auch in M konstruieren:

Definition 3.3.2. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung. Wir definieren die Relation $\Vdash^*$ zwischen $\mathbb{P}$ und Formeln mit Parametern aus $M^{\mathbb{P}}$ rekursiv über den Formelaufbau. Dazu seien eine Bedingung $p \in \mathbb{P}$, Formeln φ, ψ mit n bzw. m Parametern, $\tau_1, ..., \tau_n$ bzw. $\tau'_1, ..., \tau'_m$ aus $M^{\mathbb{P}}$ und Namen $\sigma_1, \sigma_2 \in M^{\mathbb{P}}$ beliebig.

$\sigma_1 = \sigma_2$

$$p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$$

genau dann, wenn für alle $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ die Menge

$$D_1 := \{q \leq p \mid q \leq s_1 \Rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \sigma_2 : (q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))\}$$

dicht unter p ist und für alle $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$ die Menge

$$D_2 := \{q \leq p \mid q \leq s_2 \Rightarrow \exists(\pi_1, s_1) \in \sigma_1 : (q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_2 = \pi_1))\}$$

dicht unter p ist.

$\sigma_1 \in \sigma_2$

$$p \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2$$

genau dann, wenn

$$I := \{q \leq p \mid \exists(\pi, s) \in \sigma_2 : (q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma_1))\}$$

dicht unter p ist.

$\exists x : \varphi(x, \tau_1, ..., \tau_{n-1})$

$$p \Vdash^* \exists x : \varphi(x, \tau_1, ..., \tau_{n-1})$$

genau dann, wenn

$$E := \{p \leq q \mid (\exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} : q \Vdash^* \varphi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_{n-1})\}$$

dicht unter p ist.

$\psi(\tau_1', ..., \tau_m') \wedge \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$

$$p \Vdash^* \psi(\tau_1', ..., \tau_m') \wedge \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$$

genau dann, wenn $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ und $p \Vdash^* \psi(\tau_1', ..., \tau_m')$ gilt.

$\neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$

$$p \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$$

genau dann, wenn für kein $q \leq p : q \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ gilt.

Wir erkennen unmittelbar durch Überprüfung der einzelnen Punkte, dass:

Fakta 3.3.1. Für jede Formel $\varphi(u_1, ..., u_n)$ ist

$$\{(p, \tau_1, ..., \tau_n) \in \mathbb{P} \times (M^{\mathbb{P}})^n \subseteq M \mid p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\}$$

definierbar über M.

Definition 3.3.3. Wir sagen p *entscheidet* $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ genau dann, wenn

$$p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \quad \text{oder} \quad p \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n).$$

Die folgende Äquivalenz spielt eine entscheidende Rolle im Beweis vom Fundamentalsatz 3.4.1 und motiviert die eher ungewöhnliche Konvention "kleinere" Bedingungen "stärker" zu nennen: Entscheidet eine Bedingung p eine Formel, so entscheidet auch jede kleinere Bedingung diese Formel, wobei die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt. Kleinere Bedingungen entscheiden also potentiell "mehr" Formeln.

Lemma 3.3.1. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M, $p \in \mathbb{P}$, φ eine Formel und $\tau_1, ..., \tau_n$ aus $M^{\mathbb{P}}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$
2. $\forall q \leq p : q \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$
3. $\{q \leq p \mid q \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\}$ ist dicht unter p.

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz mittels Ringschluss und Induktion über den Formelaufbau mit der Notation aus Definition 3.3.2 wobei wir den Schritt von 2. $\Rightarrow$ 3. nicht behandeln, da die Menge aller $q \leq p$ trivialerweise dicht unter p ist.

- Wir behandeln die Fälle $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_1 \in \sigma_2$ und $\exists x : \psi(x, \tau_1, ..., \tau_m)$ simultan:

1. $\Rightarrow$ 2. Sei $q \leq p$ beliebig. Per Voraussetzung sind D_1,D_2 I und E dicht unter p. Da $q \leq p$ sind mit Fakta 3.1.1 D_1,D_2, I und E auch dicht unter q womit $q \Vdash^* (\sigma_1 = \sigma_2)$ beziehungsweise $q \Vdash^* (\sigma_1 \in \sigma_2)$ und $q \Vdash^* \exists x : \psi(x, \tau_1, ..., \tau_m)$ gilt.

3. $\Rightarrow$ 1. Die Voraussetzung gibt uns die Dichtheit von $D_1' := \{q \mid D_1$ ist dicht unter $q\}$ und $D_2' := \{q \mid D_2$ ist dicht unter $q\}$ unter p womit per Fakta 3.1.1 die Mengen D_1 und D_2 dicht unter p sind, also $p \Vdash^* \sigma_1 = \sigma_2$ gilt. Entsprechendes gilt für I beziehungsweise E, womit $p \Vdash^* \sigma_1 \in \sigma_2$ beziehungsweise $p \Vdash^* \exists x : \psi(x, \tau_1, ..., \tau_m)$ gilt.

- $\vartheta \wedge \psi$:

1. $\Rightarrow$ 2. Per Definition von $\Vdash^*$ erhalten wir $p \Vdash^* \vartheta(\tau_1, ..., \tau_l)$ und $p \Vdash^* \psi(\tau'_1, ..., \tau'_m)$. Nun gilt per Induktionsvoraussetzung $1 \Rightarrow 2$ für $\vartheta(\tau_1, ..., \tau_l)$ und $\psi(\tau'_1, ..., \tau'_m)$ womit, wieder per Definition von $\Vdash^*$ (diesmal in die andere Richtung), $q \Vdash^* \vartheta(\tau_1, ..., \tau_l) \wedge \psi(\tau'_1, ..., \tau'_m)$ für alle $q \leq p$ gilt.

3. $\Rightarrow$ 1. Die Voraussetzung mit der Definition von $\Vdash^*$ gibt uns 3. für $\vartheta(\tau_1, ..., \tau_l)$ und $\psi(\tau'_1, ..., \tau'_m)$. Per Induktionsvoraussetzung erhalten wir also $p \Vdash^* \vartheta(\tau_1, ..., \tau_l)$ und $p \Vdash^* \psi(\tau'_1, ..., \tau'_m)$ also per definitionem auch $p \Vdash^* \vartheta(\tau_1, ..., \tau_l) \wedge \psi(\tau'_1, ..., \tau'_m)$.

- $\neg\psi$:

1. $\Rightarrow$ 2. Sei $q \leq p$ beliebig. Per Definition von $\Vdash^*$ gibt es kein $r \leq q$ mit $r \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_m)$ womit $q \Vdash^* \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_m)$.

$\neg$1. $\Rightarrow$ $\neg$3. Es existiert also ein $q \leq p$ mit $q \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_m)$. Somit müsste für alle $r \leq q$: $r \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_m)$. Also gibt es kein $s \leq q$ mit $s \Vdash^* \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_m)$, womit die Menge aus 3. nicht dicht unter q und damit nicht dicht unter p ist.

□

3.4 Der Fundamentalsatz der Erzwingungsmethode

Wir haben jetzt die nötigen Vorkenntnisse gesammelt, um die Zusammenhänge von Definition 3.3.1 und Definition 3.3.2 näher zu erkunden.

Satz 3.4.1 (Fundamentalsatz der Erzwingungsmethode)**.** Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P} \in M$ eine Halbordnung, sodass für alle $p \in \mathbb{P}$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter $G \subseteq \mathbb{P}$ über M existiert mit $p \in G$. Sei φ eine Formel und sei $\tau_1, ..., \tau_n$ in $M^{\mathbb{P}}$. Dann gilt:

(1) Wenn $q \in G$ und $q \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ gilt, dann gilt $M[G] \models \varphi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$.

(2) Wenn $M[G] \models \varphi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$ gilt, dann existiert ein $q \in G$, sodass $q \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ gilt.

(3) Für alle $q \in \mathbb{P}$ gilt $q \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow q \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$.

(4) $M[G] \models \varphi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$ gilt genau dann, wenn $\exists q \in G : q \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ gilt.

Nachdem wir diesen Satz bewiesen haben, werden wir nur mehr $\Vdash$ statt $\Vdash^*$ schreiben, oft ohne Verweis auf Punkt (3) von Satz 3.4.1.

3.4.1 Der Fundamentalsatz der Erzwingungsmethode (Beweis)

Wir werden zuerst die ersten zwei Punkte zeigen und dann mit Lemma 3.3.1 den Dritten, um am Ende die Implikation $(1) \wedge (2) \wedge (3) \Rightarrow (4)$ zu zeigen.

Beweis. Wir zeigen (1) und (2) simultan mit Induktion über den Formelaufbau von φ:

$v_1 = v_2$ Für $i \in \{1,2\}$ sei v_i ein beliebiger Parameter $\tau_i \in M^{\mathbb{P}}$. Wir betrachten nun das Paar (τ_1, τ_2). Wir zeigen (1) und (2) getrennt mit Induktion über $(\mathrm{rank}(\tau_1), \mathrm{rank}(\tau_2))$ mit der lexikografischen Ordnung. Der Induktionsanfang ist in beiden Fällen trivial, da $M[G] \models \emptyset = \emptyset$ und für beliebiges $g \in G : g \Vdash^* \check{\emptyset} = \check{\emptyset}$.

(1) Sei also $p \in G$ mit $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Wir zeigen die beidseitige Inklusion der G-Interpretationen. Sei also $\pi_1^G \in \tau_1^G$ beliebig. Dann existieren $s_1 \in G$ mit $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$. Wir wollen zeigen, dass $\pi_1^G \in \tau_2$. Da G als Filter nach unten gerichtet ist, existiert ein $r \in G : r \leq p \wedge r \leq s_1$. Mit Lemma 3.3.1 gilt dann $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$. Also existiert per definitionem ein $q \in G$ mit $q \leq r$, sodass

$$q \leq s_1 \Rightarrow (\exists (\pi_2, s_2) \in \tau_2 : (q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2).$$

Da $\leq$ transitiv ist, gilt sogar $q \leq s_1$, womit wir so ein $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$ mit ($q \leq s_2$ und $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$) wählen können. Da G als Filter nach oben abgeschlossen ist, gilt $q \in G$ und $q \leq s_2$, womit $s_2 \in G$ ist. Mit der Induktionsvoraussetzung gilt allerdings $\pi_1^G = \pi_2^G$, wodurch $\pi_1^G \in \tau_2^G$. Die andere Inklusion verläuft analog. Insgesamt gilt also

$$M[G] \models \tau_1^G = \tau_2^G.$$

(2) Sei also angenommen, dass $M[G] \models \tau_1^G = \tau_2^G$. Wir konstruieren nun eine Formel:

$$\begin{aligned}\psi_1(r) \Leftrightarrow :& \exists (\pi_1, s_1) \in \tau_1 : r \leq s_1 \wedge \forall (\pi_2, s_2) \in \tau_2, \forall q \in \mathbb{P} : \\ &((q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \Rightarrow q \perp r)).\end{aligned}$$

Wir nehmen $\exists r \in G : \psi_1(r)$ an und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Es existiert also per Konstruktion ein Zeuge $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ mit $r \leq s_1$. Da G als Filter nach oben abgeschlossen ist, ist $s_1 \in G$, womit $\pi_1^G \in \tau_1^G$ und $\pi_1^G \in \tau_2^G$. Es muss also ein Paar $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$ existieren mit $\pi_1^G = \pi_2^G$. Mit der Induktionsvoraussetzung existiert ein $q_0 \in G$ mit $q_0 \Vdash^* (\pi_1 = \pi_2)$. Da G als Filter nach unten gerichtet ist, existiert ein $q \in G$ mit $q \leq q_0 \wedge q \leq s_2$. Mit Lemma 3.3.1 gilt auch $q \Vdash \pi_1 = \pi_2$. Da $(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)$ folgt, per Konstruktion von $\psi_1(r)$, dass $q \perp r$. Da Filter nach unten gerichtet sind, ist das absurd. Es gibt also kein $r \in G$, für das $\psi_1(r)$ gilt. Sei weiters $\psi_2(r) \Leftrightarrow: \exists (\pi_2, s_2) \in \tau_2 : r \leq s_2 \wedge \forall (\pi_1, s_1) \in \tau_1, \forall q \in \mathbb{P} : ((q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \Rightarrow q \perp r))$ eine Formel, dann zeigt ein analog verlaufender Beweis, dass es kein $r \in G$ gibt, für das $\psi_2(r)$ gilt.

Wir betrachten die Menge

$$D := \{r \mid \psi_1(r) \vee \psi_2(r) \vee r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2\}.$$

Wenn D dicht ist, existiert, da G generisch ist, ein $p \in G \cap D$ mit $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$, was wir zeigen wollten. Bleibt zu zeigen, dass D tatsächlich dicht in $\mathbb{P}$ ist:

Sei also $r \in \mathbb{P}$ beliebig. Gilt $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ sind wir fertig. Sei also angenommen, dass $r \nVdash^* \tau_1 = \tau_2$. Wir wollen nun ein $p \leq r$ finden mit $\psi_1(p)$ oder $\psi_2(p)$.

Mit der Notation aus der Definition von $\Vdash^*$ gibt es, da $r \not\Vdash^* \tau_1 = \tau_2$, Namen $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ und $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$, sodass eine der Mengen

$$D_1 = \{q \leq r \mid q \leq s_1 \Rightarrow \exists (\rho, s) \in \tau_2 : (q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \rho)\}$$

oder

$$D_2 = \{q \leq r \mid q \leq s_2 \Rightarrow \exists (\rho, s) \in \tau_1 : (q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi_2 = \rho)\}$$

nicht dicht unter r ist. Wir behandeln zunächst den Fall, dass D_1 nicht dicht unter r ist. Sei also $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ derart, dass D_1 nicht dicht unter r ist. Somit existiert existiert ein $p \leq r$, sodass alle $q \leq p$ nicht in D_1 sind, also:

$$\forall q \leq p : (q \leq s_1 \wedge \forall (\rho, s) \in \tau_2 : \neg(q \leq s \wedge q \Vdash^* \rho = \pi_1)).$$

Da $p \leq p$ ist, gilt insbesondere $p \leq s_1$. Wir nehmen an, dass wenn $(\rho, s) \in \tau_2$ mit $q \leq s$ und $q \Vdash^* \rho = \pi_1$ gilt, die Bedingungen p und q kompatibel sind und wollen dies zu einem Widerspruch führen: Es existiert also per definitionem ein q' mit $p \geq q' \leq q$. Per Lemma 3.3.1 gilt nun $q' \Vdash^* \rho = \pi_1$ und $q' \leq q \leq s$, andererseits ist aber $q' \leq p \leq s_1$ und $\neg(q' \leq s \wedge q' \Vdash^* \rho = \pi_1)$, also ein Widerspruch. Daher gilt unter diesen Voraussetzungen schon $q \perp p$. Es gilt also $\psi_1(p)$, womit $p \in D$ und D dicht ist. Ist D_2 nicht dicht unter r, so zeigt ein analoger Beweis, dass $\psi_2(p)$ gilt womit $p \in D$ und D ebenfalls dicht ist.

Wir haben also den Fall $v_1 = v_2$ bewiesen. In den anderen Fällen werden wir auf ähnliche Ideen wie in diesem Beweis zurückgreifen.

$v_1 \in v_2$ Für $i \in \{1, 2\}$ sei v_i ein beliebiger Parameter $\tau_i \in M^{\mathbb{P}}$. Wie im Fall $v_1 = v_2$ betrachten wir das Paar (τ_1, τ_2) und zeigen (1) und (2) getrennt mit Induktion über $(\text{rank}(\tau_1), \text{rank}(\tau_2))$ mit der lexikografischen Ordnung. Der Induktionsanfang ist in beiden Fällen trivial, da die leere Menge keine Elemente hat.

(1) Sei also $p \in G$ mit $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ gegeben. Mit der Notation aus der Definition von $\Vdash^*$ ist also

$$I = \{q \leq p \mid \exists (\pi, s) \in \tau_2, q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi = \tau_1)\}$$

dicht unter p. Da G generisch ist, können wir ein $q \leq p$ aus $I \cap G$ wählen. Da $q \in I$ existiert per Konstruktion von I ein Name $(\pi, s) \in \tau_2$ mit $q \leq s$ und $q \Vdash^* \pi = \tau_1$. Aus letzterem folgt, da $q \in G$, per Abschnitt 3.4.1(1), dass $M[G] \models \pi^G = \tau_1^G$. Da G als Filter nach oben abgeschlossen ist und $q \leq s$, ist auch $s \in G$. Mit $(\pi, s) \in \tau_2$ und $\pi^G = \tau_1^G$ ist also tatsächlich $\tau_1^G \in \tau_2^G$.

(2) Sei also $M[G] \models \tau_1^G \in \tau_2^G$. Per Konstruktion der G-Interpretation ist also ein Name $(\pi, s) \in \tau_2$ mit $s \in G$ und $\pi^G = \tau_1^G$. Aus dieser Gleichheit folgt, diesmal mit dem zweiten Punkt von Abschnitt 3.4.1, dass ein $r \in G$ existiert mit $r \Vdash^* \tau_1 = \pi$. Da G als Filter nach unten gerichtet ist, können wir ein $p \in G$ mit $s \geq p \leq r$ wählen. Für dieses gilt dann per Lemma 3.3.1 und $r \Vdash^* \tau_1 = \pi$ die Aussage $\forall q \leq p(q \Vdash^* \tau_1 = \pi)$. Da $p \leq s$ gilt aber auch

$$\forall q \leq p(q \leq s \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \pi),$$

wobei uns nun die zweite Äquivalenz aus Lemma 3.3.1 die Dichte von dem I aus der Definition von $\Vdash^*$ gibt, womit tatsächlich $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$.

$\psi_1(\tau_1, ..., \tau_n) \wedge \psi_2(\tau'_1, ..., \tau'_m)$ Wir trennen wieder beide Behauptungen:

(1) Per Voraussetzung existiert also ein $p \in G$ mit $p \Vdash^* \psi_1(\tau_1, ..., \tau_n) \wedge \psi_2(\tau'_1, ..., \tau'_m)$. Per Konstruktion von $\Vdash^*$ gilt für dieses p auch $p \Vdash^* \psi_1(\tau_1, ..., \tau_n)$ beziehungsweise $p \Vdash^* \psi_2(\tau'_1, ..., \tau'_m)$. Per Induktionsvoraussetzung gilt der erste Punkt für ψ_1 und ψ_2. Da mit diesem $p \in G$ die nötigen Voraussetzungen gelten, folgt $M[G] \models \psi_1(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$ und $M[G] \models \psi_2(\tau_1'^G, ..., \tau_m'^G)$, womit $M[G] \models \psi_1(\tau_1^G, ..., \tau_n^G) \wedge \psi_2(\tau_1'^G, ..., \tau_m'^G)$.

(2) Per Voraussetzung gilt also $M[G] \models \psi_1(\tau_1^G, ..., \tau_n^G) \wedge \psi_2(\tau_1'^G, ..., \tau_m'^G)$, insbesondere $M[G] \models \psi_1(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$ beziehungsweise $M[G] \models \psi_2(\tau_1'^G, ..., \tau_m'^G)$. Per Induktionsvoraussetzungen existieren nun $p, q \in G$ mit $p \Vdash^* \psi_1(\tau_1, ..., \tau_n)$ und $q \Vdash^* \psi_2(\tau'_1, ..., \tau'_m)$. Da G als Filter nach unten gerichtet ist existiert ein $r \in G$ mit $q \geq r \leq p$. Wir wenden nun zweimal 3.3.1 an und erhalten somit $r \Vdash^* \psi_1(\tau_1, ..., \tau_n)$ und $r \Vdash^* \psi_2(\tau'_1, ..., \tau'_m)$. Per Konstruktion von $\Vdash^*$ gilt nun $r \Vdash^* \psi_1(\tau_1, ..., \tau_n) \wedge \psi_2(\tau'_1, ..., \tau'_m)$. Wir haben also ein passendes $r \in G$ gefunden.

$\neg\psi(\tau_1, ..., \tau_n)$ Wir trennen wieder beide Behauptungen:

(1) Per Voraussetzung ist nun $p \in G$ mit $p \Vdash^* \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Wir nehmen $M[G] \models \psi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$ an und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Mit der Induktionsvoraussetzung existiert also ein $q \in G$ mit $q \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Da G als Filter nach unten gerichtet ist, existiert ein $r \in G$ mit $q \geq r \leq p$. Wir wenden wieder zweimal Lemma 3.3.1 an, und erhalten $r \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$ und $r \Vdash^* \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Da $r \leq r$, ist das per Konstruktion von $\Vdash^*$ ein Widerspruch.

(2) Per Voraussetzung gilt also $M[G] \models \neg\psi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$. Wir konstruieren die Menge

$$D := \{q \mid q \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n) \vee q \Vdash^* \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_n)\}$$

Wir zeigen, das D dicht ist: Sei $p \in \mathbb{P}$ beliebig. Wir nehmen an, dass es kein $q \leq p$ gibt welches in D ist und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Daraus folgt insbesondere, dass $q \not\Vdash^* \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_n)$, für alle $q \leq p$. Womit es per Konstruktion von $\Vdash^*$ mindestens ein $r \leq q$ geben muss, mit $r \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Somit ist ein $r \in D$ mit $r \leq q \leq p$, ein Widerspruch. D ist also dicht.

Da G generisch ist, existiert ein $q \in D \cap G$. Da $q \in D$ gilt also $q \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$ oder $q \Vdash^* \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Gilt $q \Vdash^* \neg\psi(\tau_1, ..., \tau_n)$ sind wir fertig. Sei also $q \Vdash^* \psi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Da $q \in G$ gilt mit dem ersten Punkt aber $M[G] \models \psi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$. Ein Widerspruch zur Annahme, dass $M[G] \models \neg\psi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$.

$\exists x : \psi(x, \tau_1, ..., \tau_n)$ Wir trennen wieder beide Behauptungen:

(1) Sei also $p \in G$ mit $p \Vdash^* \exists x : \psi(x, \tau_1, ..., \tau_n)$. Mit der Notation aus der Definition von $\Vdash^*$ ist die Menge

$$E = \{q \leq p \mid \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} : q \Vdash^* \psi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)\}$$

also dicht unter p. Da G generisch ist, existiert ein $r \in G \cap E$. Also existiert ein Name $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ mit $r \Vdash^* \psi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $M[G] \models \psi(\sigma^G, \tau_1^G, ..., \tau_n^G)$. Damit haben wir mit σ^G einen Zeugen gefunden, womit

$$M[G] \models \exists x : \psi(x, \tau_1^G, ..., \tau_n^G).$$

(2) Sei also $M[G] \models \exists x : \psi(x, \tau_1^G, ..., \tau_n^G)$. Es gibt also einen Zeugen σ^G mit $M[G] \models \psi(\sigma^G, \tau_1^G, ..., \tau_n^G)$. Dazu existiert der korrespondierende Name $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Per Induktionsvoraussetzung können wir nun den zweiten Punkt auf $\psi(\sigma^G, \tau_1^G, ..., \tau_n^G)$ anwenden und erhalten ein $p \in G$ mit $p \Vdash^* \psi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)$. Mit dem dritten Punkt aus Lemma 3.3.1 ist E (aus der Definition von $\Vdash^*$) dicht unter p, da mit σ für alle $q \leq p$ ein Zeuge gefunden wurde. Es gilt also

$$p \Vdash^* \exists x : \psi(x, \tau_1, ..., \tau_n).$$

Damit sind die ersten beiden Punkte gezeigt. Für (3) zeigen wir die beidseitige Implikation:

$\Leftarrow$ Sei also $p \in \mathbb{P}$ beliebig mit $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Sei $G \subseteq \mathbb{P}$ ein beliebiger $\mathbb{P}$-generischer Filter über M mit $p \in G$. Mit (1) folgt dann

$$M[G] \models \varphi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G),$$

womit, da G beliebig war, auch schon

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$$

gilt.

$\Rightarrow$ Sei also $p \in \mathbb{P}$ beliebig mit $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Mit Lemma 3.3.1 gilt $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ genau dann, wenn

$$D := \{q \leq p \mid q \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\}$$

dicht unter p ist. Wir nehmen an, dass D nicht dicht unter p ist und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Es gibt also ein $q \leq p$, sodass für alle $r \leq q : r \nVdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Damit gilt per Konstruktion von $\Vdash^*$

$$q \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$$

Mit " $\Leftarrow$ " gilt dann aber $q \Vdash \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ und $q \in G$, wobei G jener $\mathbb{P}$-generischer Filter der per Vorraussetzung existiert. Da Filter nach oben abgeschlossen sind und $q \leq p$ ist auch $p \in G$, aufgrund der Definition von $\Vdash$ gilt also $M[G] \models \varphi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G) \wedge \neg\varphi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$, ein Widerspruch.

Somit ist der dritte Punkt gezeigt.

Bei (4) entspricht die Rückrichtung der Definition von $\Vdash$. Die Hinrichtung folgt aus dem zweiten und dritten Punkt: Sei G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter und $M[G] \models \varphi(\tau_1^G, ..., \tau_n^G)$. Dann existiert per (2) ein $p \in G$ mit $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$. Das ist laut (3) äquivalent zu $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$, was wir zeigen wollten.

$\square$

3.5 M[G] als Modell von ZFC

Satz 3.5.1. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M mit maximalem Element, $G \subseteq \mathbb{P}$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M. Dann erfüllt die generische Erweiterung ZFC:

$$M[G] \models \text{ZFC}$$

Beweis. Wir haben in Fakta 3.2.1 schon gezeigt, dass $M[G]$ das Leermengen-, Unendlichkeits-, Extensionalitäts-, Fundierungs-, Paarmengen- und Vereinigungsaxiom erfüllt. Wir müssen also noch zeigen, dass $M[G]$ das Aussonderungs-, Ersetzungs-, Potenzmengen- und Auswahlaxiom erfüllt:

Aussonderungsaxiom Sei $\varphi(x, x_1, ..., x_n)$ eine beliebige Formel und $\tau^G, \tau_1^G, ..., \tau_n^G$ aus $M[G]$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass

$$\{t \in \tau^G \mid M[G] \models \varphi(t, \tau_1^G, ..., \tau_n^G)\} \in M[G].$$

Wir definieren

$$\rho := \{(\pi, p) \mid \exists q \in \mathbb{P} : (p \leq q \wedge (\pi, q) \in \tau \wedge p \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, ..., \tau_n))\}.$$

Die Relation $\Vdash^*$ ist in M konstruiert und definierbar (vgl. Fakta 3.3.1), mit dem Fundamentalsatz 3.4.1(3) also auch $\Vdash$ womit $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Wir zeigen, dass ρ die gesuchte Menge ist:

Sei also $\sigma^G \in M[G]$ beliebig. Dann ist per Konstruktion der generischen Erweiterung $\sigma^G \in \rho^G \Leftrightarrow \exists p \in G : (\sigma, p) \in \rho$. Per Konstruktion von ρ, ist das äquivalent zu $\exists q \in \mathbb{P} : (p \leq q \wedge (\sigma, q) \in \tau$ und $p \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n))$, womit auch schon $q \in G$, da Filter nach oben abgeschlossen sind. Ersteres impliziert per definitionem $\sigma^G \in \tau^G$ und letzteres impliziert per Fundamentalsatz $M[G] \models \varphi(\sigma^G, \tau_1^G, ..., \tau_n^G)$. Insgesamt erhalten wir also - mit dem beliebigen σ in der Rolle von t:

$$\{t \in \tau^G \mid M[G] \models \varphi(t, \tau_1^G, ..., \tau_n^G)\} = \rho^G \in M[G].$$

Ersetzungsaxiom Wir zeigen eine Formulierung des Ersetzungsschema, welche $\exists!$ in unseren Vorraussetzungen zu $\exists$ abschwächt:

Für jede Formel $\varphi(v, w, w_1, ..., w_n, M)$, in der N nicht frei vorkommt:

$$\forall w_1, ..., w_n : \forall M : ([\forall x \in M \exists y : \varphi(x, y, w_1, ..., w_n, M)] \Rightarrow \\ \exists N : \forall y [y \in N \Leftrightarrow \exists x \in M : \varphi(x, y, w_1, ..., w_n, M)])$$

Diese Version ist offensichtlich nicht schwächer, aber ist sogar äquivalent.

Sei $\varphi(v, w, w_1, ..., w_n, M)$ eine solche, beliebige Formel in der σ^G nicht frei vorkommt, $\tau^G, \tau_1^G, ..., \tau_n^G$ aus $M[G]$ beliebig und $M[G] \models \forall x \in \tau^G \exists y : \varphi(x, y, \tau_1^G, ..., \tau_n^G, \tau^G)$. Wir wollen zeigen, dass ein $\sigma^G \in M[G]$ existiert mit:

$$M[G] \models \forall x \in \tau^G \exists y \in \sigma^G : \varphi(x, y, \tau_1^G, ..., \tau_n^G, \tau^G)$$

σ^G spielt hier die Rolle einer Obermenge von N und τ^G die Rolle von M. Aus dieser Obermenge können wir dann die ungewünschten Elemente mithilfe des schon bewiesenen Aussonderungsaxiom in $M[G]$ entfernen.

Wir definieren den $\mathbb{P}$-Namen

$$\rho := \{(\pi, p) \mid \exists(\hat{\pi}, \hat{p}) \in \tau : (p \leq \hat{p} \wedge p \Vdash \varphi(\hat{\pi}, \pi, \tau_1, ..., \tau_n, \tau)) \wedge \\ \forall \pi'(p \Vdash \varphi(\hat{\pi}, \pi', \tau_1, ..., \tau_n, \tau) \Rightarrow \operatorname{rank}(\pi') \geq \operatorname{rank}(\pi))\}$$

Diese Menge soll, ähnlich wie im Beweis vom Aussonderungsaxiom, alle $\mathbb{P}$-Namen beinhalten, deren G-Interpretationen die Elemente von σ^G sind. Sei also $x^G \in \tau^G$ beliebig. Dann existiert per Voraussetzung ein $y^G \in M[G]$, mit $y \in M^{\mathbb{P}}_{<\alpha}$ für eine Ordinalzahl α in M, sodass $M[G] \models \varphi(x^G, y^G, \tau_1^G, ..., \tau_n^G, \tau^G)$. Mit dem Fundamentalsatz 3.4.1(4) existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash \varphi(x, y, \tau_1, ..., \tau_n, \tau)$.

Wir behaupten, dass dann schon ein $(\pi, s) \in \rho$ existiert, mit $s \Vdash \varphi(x, \pi, \tau_1, ..., \tau_n, \tau)$. Dann würde $\pi^G \in \rho^G =: \sigma^G$ existieren für das -mit dem gleichen Punkt des Fundamentalsatzes- $M[G] \models \varphi(x^G, \pi^G, \tau_1^G, ..., \tau_n^G, \tau^G)$, was zu zeigen ist.

Bleibt zu überprüfen, dass tatsächlich für dieses beliebige x^G ein $(\pi, s) \in \rho$ existiert, also:

- $\exists(\hat{\pi}, \hat{p}) \in \tau : (s \leq \hat{p} \wedge s \Vdash \varphi(\hat{\pi}, \pi, \tau_1, ..., \tau_n, \tau))$
- $\forall \pi'(p \Vdash \varphi(\hat{\pi}, \pi', \tau_1, ..., \tau_n, \tau) \Rightarrow \operatorname{rank}(\pi') \geq \operatorname{rank}(\pi))$

Wir setzen $\hat{\pi} := x$, den Namen des vorhin beliebig gewählten $x^G \in \tau^G$. Sei $q \in \mathbb{P}$ beliebig mit $(x, q) \in \tau$. Dann definieren wir $\hat{p} := q$. Wir wollen nun zeigen, dass uns dieser Zeuge $(\hat{\pi}, \hat{p})$ wirklich ein (π, s) liefert welches beide Punkte erfüllt:

Da G ein Filter ist, existiert ein $r \in G : r \leq q \wedge r \leq p$. Mit Lemma 3.3.1 folgt, dass $t \Vdash \varphi(x, y, \tau_1, ..., \tau_n, \tau)$ für alle kleineren $t \in G : t \leq p$ gilt, insbesondere für r. Wir setzen nun $s := r$. Der zweite Punkt fordert, dass π minimalen Rang hat. Hierbei können wir uns durch y ein $\pi \in M^{\mathbb{P}}_{<\alpha} \in V_\alpha$ wählen. Insbesondere ist ρ also keine echte Klasse. Der erste Punkt folgt unmittelbar, da $p \Vdash \varphi(x, y, \tau_1, ..., \tau_n, \tau)$ also auch $s \Vdash \varphi(x, \pi, \tau_1, ..., \tau_n, \tau)$.

An dieser Stelle verwenden wir prominent das Fundierungsaxiom in M für den Rang. Bemerkenswert ist allerdings, dass (erstmals) das Potenzmengenaxiom in M verwendet wird, um zu zeigen, dass V_α eine Menge ist. Wir zeigen also nicht $N \models \mathrm{ZF} - \mathrm{Pot} \Rightarrow N[G] \models \mathrm{ZF} - \mathrm{Pot}$ für entsprechende N, G. Die Methode die verwendet wurde um sicherzustellen, dass es sich hier um eine Menge handelt, wird auch “Scott's trick”genannt.

Potenzmengenaxiom Sei $\tau^G \in M[G]$ beliebig. Gesucht ist ein $P \in M[G]$ mit

$$\{x \in M[G] \mid x \subseteq \tau^G\} \subseteq P.$$

Ist so eine Menge gefunden, können wir -da wir es schon bewiesen haben- das Aussonderungsaxiom in $M[G]$ verwenden um die Potenzmenge zu konstruieren. Sei $N := \{\pi \mid \exists p : (\pi, p) \in \tau\}$ und

$$\rho := \{(\sigma, 1_{\mathbb{P}}) \mid \sigma \in M^{\mathbb{P}} \wedge \sigma \subseteq N \times \mathbb{P})\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Wie schon beim Aussonderungs- und Ersetzungsaxiom, überprüfen wir jetzt diese Konstruktion:

Sei also $\sigma^G \subseteq \tau^G$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass $\sigma^G \in \rho^G$. Dazu bauen wir diese Teilemengen in $M^{\mathbb{P}}$:

$$\sigma' := \{(\pi, p) \mid \pi \in N \wedge p \Vdash \pi \in \sigma\}$$

Mit dem Fundamentalsatz ist $\sigma' \in M^{\mathbb{P}}$. Wir behaupten, dass $\sigma^G = (\sigma')^G \in \rho^G$ gilt. Um Letzteres einzusehen, betrachten wir $(\sigma', 1_{\mathbb{P}})$. Da σ' Definitionsbereich N hat, liegt $(\sigma', 1_{\mathbb{P}})$ in ρ, womit $\sigma'^G \in \rho^G$ gilt.

Für $(\sigma')^G = \sigma^G$ zeigen wir die beidseitige Inklusion:

$\subseteq$: Sei $\pi^G \in (\sigma')^G$ beliebig. Dann existiert per Konstruktion der G-Interpretation und per Konstruktion von σ' ein $p \in G$, für das $(\pi, p) \in \sigma'$ mit $p \Vdash \pi \in \sigma$ gilt. Da $p \in G$ ist, folgt mit dem Fundamentalsatz, dass $M[G] \models \pi^G \in \sigma^G$ gilt.

$\supseteq$: Sei $\pi^G \in \sigma^G$ beliebig. Dann ist $(\pi, p) \in \sigma$ für ein $p \in G$ und $p \Vdash \pi \in \sigma$. Per Voraussetzung ist σ^G Teilmenge von τ^G womit per Fundamentalsatz 3.4.1(4): $(\exists q \in G : (\pi, q) \in \sigma) \Rightarrow (\exists q \in G : (\pi, q) \in \tau)$ gilt, also $\pi \in N$. Dann ist per Konstruktion $(\pi, p) \in \sigma'$. Da $p \in G$ ist, gilt schon $\pi^G \in \sigma'^G$, was zu zeigen war.

Es ist also $(\sigma')^G = \sigma^G \in \rho^G$, womit $P = \rho^G \in M[G]$. Jetzt können wir mit dem Aussonderungsaxiom die Menge $\mathcal{P} := \{x \in P \mid x \subseteq \tau^G\}$ konstruieren. Da, wie oben gezeigt, alle Teilmengen von τ^G die $M[G]$ kennt in P sind, ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\tau^G)^{M[G]}$.

Auswahlaxiom Sei $\tau^G \in M[G]$ beliebig. Sei $f \in M$, $\alpha \in \mathrm{Ord} \cap M[G]$ mit $f : \alpha \to \tau$, sodass f bijektiv ist. Da in M per Auswahlaxiom jede Menge wohlgeordnet werden kann, existieren solche f, α sogar für alle Elemente von M. Wir wollen nun eine Surjektion $g : \alpha \to \tau^G$ in $M[G]$ konstruieren, dann haben wir für eine beliebige Menge eine Wohlordnung „gefunden", und damit das Auswahlaxiom in $M[G]$ gezeigt. Dafür konstruieren wir uns einen Operator

$$\lceil ., . \rceil : \begin{cases} M^{\mathbb{P}} \times M^{\mathbb{P}} \to M^{\mathbb{P}}, \\ (\tau_1, \tau_2) \mapsto \{(\{(\tau_1, 1_{\mathbb{P}}), (\tau_2, 1_{\mathbb{P}})\}, 1_{\mathbb{P}}), (\{(\tau_1, 1_{\mathbb{P}})\}, 1_{\mathbb{P}})\}. \end{cases}$$

Dieser Operator ist ein G-Interpretationspaarhomomorphismus, da per Konstruktion $\lceil \tau_1, \tau_2 \rceil^G = \{(\{(\tau_1, 1_{\mathbb{P}}), (\tau_2, 1_{\mathbb{P}})\}, 1_{\mathbb{P}}), (\{(\tau_1, 1_{\mathbb{P}})\}, 1_{\mathbb{P}})\}^G = \{\{\tau_1^G, \tau_2^G\}, \{\tau_1^G\}\} = (\tau_1^G, \tau_2^G)$, für beliebige $\tau_1, \tau_2 \in M^{\mathbb{P}}$. Wir definieren nun einen $\mathbb{P}$-Namen für unsere gesuchte Funktion:

$$\rho := \{(\lceil \check{\xi}, \sigma \rceil, 1_{\mathbb{P}}) \mid \xi < \alpha \wedge \exists p \in \mathbb{P} : f(\xi) = (\sigma, p)\}.$$

Da $\rho \subseteq M^{\mathbb{P}}_{\leq \alpha} \times \mathbb{P}$ gilt, ist $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Die G-Interpretation von ρ ist eine Relation mit Definitionsmenge α. Da per Konstruktion jedem $\xi \in \alpha$ genau der Funktionswert σ von f zugeordnet wird, und f wohldefiniert ist, ist ρ^G eine Funktion.

Bleibt noch zu überprüfen, dass diese Funktion ρ^G tatsächlich funktioniert, also $\tau^G \subseteq (\rho^G)''\alpha$. Sei also $\sigma^G \in \tau^G$ beliebig. Da σ^G eine G-Interpretation ist, existiert ein $p \in G$ mit $(\sigma, p) \in \tau$. Da f eine Bijektion auf τ ist, existiert genau ein $\xi \in \alpha$ mit $f(\xi) = (\sigma, p)$. Per Konstruktion von ρ ist dann $(\lceil \check{\xi}, \sigma \rceil, 1_{\mathbb{P}}) \in \rho$, und da $(\lceil \check{\xi}, \sigma \rceil, 1_{\mathbb{P}})^G = \lceil \check{\xi}, \sigma \rceil^G = (\xi, \sigma^G)$ auch $(\xi, \sigma^G) \in \rho^G$. Also ist $\rho^G(\xi) = \sigma^G$ und $\sigma^G \in (\rho^G)''\alpha$, was wir zeigen wollten.

Insgesamt haben wir also alle ZFC Axiome überprüft, womit $M[G] \models$ ZFC. □

4 Anwendungen von Forcing

In diesem Kapitel wollen wir zwei konkrete Konsistenzbeweise präsentieren. Einerseits Con(ZFC) $\Rightarrow$ Con(ZFC+“V $\neq$L”), andererseits die stärkere Aussage Con(ZFC) $\Rightarrow$ Con(ZFC+ $\neg$CH).

Satz 4.0.1. *Sei M ein Modell von ZFC, $\mathbb{P}$ eine atomfreie Halbordnung in M und G ein $\mathbb{P}$-generischer Filter. Dann gilt für die generische Erweiterung $M[G] \models V \neq L$.*

Beweis. Wir nehmen $M[G] \models V = L$ an und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Es existiert also eine Ordinalzahl α mit $L_\alpha^{M[G]} = M[G]$. Da per Lemma 3.2.3 $M[G]$ gleich hoch wie M ist, muss $\alpha = M[G] \cap \mathrm{Ord} = M \cap \mathrm{Ord}$ sein. Mit Lemma 3.2.1 ist $G \in M[G]$ und mit Lemma 3.1.3 $G \notin M$ also $G \in M[G] \backslash M$. Per Absolutheit ist aber $L_\alpha^{M[G]} = L_\alpha^M \subseteq M$ womit $M[G] \subseteq M$ und damit $M[G] \backslash M = \emptyset$, ein Widerspruch. □

Definition 4.0.1. Sei α eine Ordinalzahl. Für jede Funktion $p \in \mathbb{C}^\alpha$, sei $\mathrm{supp}(p)$ die Menge aller $\gamma \in \alpha$ mit $p(\gamma) \neq \emptyset$. Wir nennen $\mathrm{supp}(p)$ den Träger von p. Sei

$$\mathbb{C}(\alpha) := \{p \in \mathbb{C}^\alpha \mid |\mathrm{supp}(p)| < \aleph_0\}$$

die Menge aller Funktionen in $\mathbb{C}^\alpha$ mit endlichem Träger. Wir schreiben auch $\mathbb{C}(\alpha)$ beziehungsweise $(\mathbb{C}(\alpha), \leq)$ für $(\mathbb{C}(\alpha), \leq_{\text{ext } \mathbb{C}(\alpha)})$ wobei $\leq$ die Halbordnung des Cohenforcings ist, welche auf $\mathbb{C}(\alpha)$ kanonisch zu $\leq_{\text{ext } \mathbb{C}(\alpha)}$ fortgesetzt wird:

$$p \leq_{\text{ext } \mathbb{C}(\alpha)} q :\iff \forall \xi \in \alpha : p(\xi) \leq q(\xi).$$

Lemma 4.0.1 (Delta System Lemma)**.** *Sei κ eine überabzählbare, reguläre Kardinalzahl und $\mathcal{A} := (A_i)_{i \leq \kappa}$ eine Familie von endlichen Mengen. Dann existiert eine $\kappa-$große Teilfamilie $\mathcal{B} := (A_{j(i)})_{j(i) \leq \kappa}$ von $\mathcal{A}$ und eine Menge R sodass*

$$A_{j(n)} \cap A_{j(m)} = R$$

oder $n = m$ für beliebige $n, m \in \mathrm{dom}(j) = \kappa$.

In diesem Fall nennen wir $\mathcal{B}$ ein *Delta System* und R die *Wurzel* von $\mathcal{A}$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Elemente dieser endlichen Mengen Ordinalzahlen kleiner κ sind, da

$$\max_{i \leq \kappa} |A_i| \cdot \kappa \leq \omega \cdot \kappa = \max(\omega, \kappa) = \kappa.$$

Da κ regulär und überabzählbar ist, hat κ per definitionem überabzählbare Kofinalität. Per definitionem ist also die Kardinalität jeder kofinalen Teilfamilie überabzählbar. Wir erhalten also für eine endliche Ordinalzahl n eine Teilfamilie $\mathcal{C} := (A_{k(i)})_{k(i)\leq\kappa}$, sodass $|A_{k(i)}| = n$ für alle $i \leq \kappa$. Sei $\mathcal{D}$ eine beliebige $\kappa-$große Familie von n-elementigen Mengen. Finden wir nun für jedes $n \in \omega$ eine $\kappa-$große Teilfamilie $\mathcal{B}$ von $\mathcal{D}$ und eine Ordinalzahl $\delta < \kappa$ mit

$$\delta \cap B_i = \delta \cap B_j = B_i \cap B_j, \forall i, j \in \kappa, i \neq j,$$

haben wir sowohl das Delta System als auch die Wurzel gefunden.

Wir zeigen diese Aussage nun mit vollständiger Induktion über n:

IA Sei $\mathcal{D}$ also eine Familie einelementiger Mengen, deren Elemente Ordinalzahlen sind. Wählen wir $\mathcal{B} := \mathcal{D}$ und $\delta := \emptyset$ so sind wir fertig, da je zwei einelementige Mengen nur triviale Schnitte haben können.

IV Für beliebige κ-große Familien von n-elementigen Mengen von höchstens κ-großen Ordinalzahlen existiert eine Ordinalzahl δ und eine κ-große Teilfamilie $\mathcal{B}$, sodass $\forall i, j \in \kappa, i \neq j : \delta \cap B_i = \delta \cap B_j = B_i \cap B_j$.

IS Sei $\mathcal{D}$ also eine Familie $(n+1)$-elementiger Mengen, deren Elemente Ordinalzahlen kleiner gleich κ sind. Sei $\lambda < \kappa$ eine Ordinalzahl. Betrachte die Teilfamilie $\mathcal{M}_\lambda := (D_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{D}$ die genau jene Mengen D_i beinhaltet, für die $\min D_i = \lambda$. Sei $D'_i := D_i \backslash \{\lambda\}$ und analog $\mathcal{M}'_\lambda = (D'_i)_{i\in I}$. Wir bemerken, dass $|D'_i| = n$. Ist $I = \kappa$ so haben wir per [IV] eine Teilfamilie $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{M}'_\lambda$ und eine Ordinalzahl δ' die ein n Delta System bilden. $(B_i \cup \lambda)_{i\leq\kappa} =: B_\lambda$ und $\delta \cup \{\lambda + 1\} =: \delta_\lambda$ bilden dann das gewünschte Delta System.

Falls es kein λ mit $|I| = \kappa$ gibt, ist also $|I| < \kappa$ für alle $\lambda < \kappa$. Wir konstruieren nun rekursiv eine κ-große Familie $f : \kappa \to \mathcal{D}''\kappa$ mit

$$(\bigcup f''\alpha) \subseteq \min f(\alpha)$$

für alle $\alpha \leq \kappa$ wobei $\mathcal{D}''\kappa$ das Bild der Familie $\mathcal{D}$ ist. Wir wählen nun $\mathcal{B} := f$ mit $\delta := \emptyset$ und haben somit ein entsprechendes Delta System gefunden.

Für diese Konstruktion definieren wir rekursiv eine Funktion g auf κ die uns eine Teilfamilie der $\mathcal{M}_\lambda$'s liefert: Wir schicken die Ordinalzahl α auf die kleinste Ordinalzahl γ, sodass $\mathcal{M}_\gamma$ nicht leer ist. Dabei wollen wir nicht Ordinalzahlen treffen, die schon von g erreicht wurden. Wir definieren also:

$$g(\alpha) := \min(\{\gamma < \kappa \mid \mathcal{M}_\gamma \neq \emptyset\} \backslash \sup(\bigcup\bigcup\{\mathcal{M}_\theta \mid \theta < \sup(g''\alpha)\}''\kappa)).$$

Da κ regulär ist und die $\mathcal{M}_\gamma$ alle kleiner κ sind, ist $\sup(\bigcup\bigcup\{\mathcal{M}_\theta \mid \theta < \mu\}''\kappa)$ kleiner κ für alle $\mu < \kappa$ und g somit wohldefiniert. Wir können nun punktweise $f(\alpha)$ als irgendeine Menge aus $\mathcal{M}_{g(\alpha)}$ wählen, da dann

$$(\bigcup f''\alpha) \subseteq \min \mathcal{M}_i = \min f(\alpha).$$

□

Um die Notwendigkeit der Voraussetzungen zu illustrieren, können wir den abzählbaren Fall betrachten: Hier findet sich im Allgemeinen kein Delta System, da mit $\mathcal{A} = (n)_{n<\omega}$ durch $n \cap m = \min(n, m)$ ein Gegenbeispiel gegeben ist.

Definition 4.0.2. Sei κ eine Kardinalzahl und $\mathbb{P}$ eine Halbordnung. Dann hat $\mathbb{P}$ die κ-c.c. genau dann, wenn für jede Antikette $A \subseteq \mathbb{P} : |A| < \kappa$ gilt. Wir sagen $\mathbb{P}$ hat die *abzählbare Ketten Bedingung*, auch *c.c.c.* genannt, genau dann, wenn jede Antikette aus $\mathbb{P}$ höchstens abzählbar ist.

Lemma 4.0.2. Für eine beliebige Ordinalzahl α hat $\mathbb{C}(\alpha)$ die abzählbare Ketten Bedingung.

Beweis. Sei α eine beliebige Ordinalzahl. Wir nehmen an, dass $\mathbb{C}(\alpha)$ nicht die abzählbare Ketten Bedingung erfüllt und wollen dies auf einen Widerspruch führen. Es existiert also eine überabzählbare Antikette in $\mathbb{C}(\alpha)$. Da diese Antikette überabzählbar ist, hat sie eine ω_1 große Teilmenge, deren Elemente natürlich immer noch inkompatibel zueinander sind. Sei $\mathcal{A}$ also eine solche Antikette mit $|\mathcal{A}| = \omega_1$. Sei $\mathcal{S} := \{\mathrm{supp}(p) \mid p \in \mathcal{A}\}$ die Menge der Träger von Elementen aus $\mathcal{A}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit und für denotationelle Vereinfachung können wir diese Träger wie Definitionsmengen behandeln. Für eine (endliche) Definitionsmenge p kommen aber nur abzählbar viele Funktionen infrage, nämlich genau $\omega^{|p|}$ viele. Wir können also $\mathcal{A}$ nach oben abschätzen:

$$|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{S}| \cdot \omega^{|p|} = \max(|\mathcal{S}|, \omega) = |\mathcal{S}|.$$

Da offensichtlich auch $|\mathcal{S}| \leq |\mathcal{A}|$, gilt $|\mathcal{S}| = \omega_1$. Identifizieren wir $\mathcal{S}$ mit der Familie, die einer Funktion ihre Definitionsmenge zuordnet, können wir das Delta System Lemma 4.0.1 auf $\mathcal{S}$ anwenden und erhalten ein Delta System $\mathcal{S}_\delta$ mit Wurzel δ. Beschränken wir uns auf jene Elemente von $\mathcal{A}$ mit Definitionsmenge in dem Delta System, erhalten wir eine Teilmenge $\mathcal{A}_\delta \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{A}_\delta$ ist natürlich wieder eine Antikette und überabzählbar, da jeder Definitionsmenge in $\mathcal{S}_\delta$ zumindest eine Funktion entspricht und, vermöge dem Delta-System-Lemma, $\mathcal{S}_\delta$ überabzählbar ist. Allerdings ist die Menge aller Funktionen eingeschränkt auf die Wurzel, wie schon erwähnt sogar zu beliebiger Definitionsmenge, nur abzählbar. Also muss es, da $\mathcal{A}_\delta$ überabzählbar ist, Funktionen $p \neq q \in \mathcal{A}_\delta$ geben, die auf δ übereinstimmen. Da $\mathcal{A}_\delta$ ein Delta System ist, haben die Definitionsmengen von p und q Schnitt δ. Also ist hiermit implizit eine Fortsetzung $r \in \mathbb{C}(\alpha)$ von p und q definiert:

$$r := p \cup q_{\restriction \mathrm{dom}(q) \setminus \delta} = q \cup p_{\restriction \mathrm{dom}(p) \setminus \delta}.$$

Damit sind aber p und q kompatibel, also ist $\mathcal{A}_\delta$ keine Antikette. Da $\mathcal{A}_\delta \subseteq \mathcal{A}$, ist $\mathcal{A}$ erst recht keine Antikette, im Widerspruch zur Annahme.

□

4.1 Verletzung der Kontinuumshypothese

Lemma 4.1.1. Sei M ein transitives Modell von ZFC, $\kappa \in M$ eine Kardinalzahl und $\mathbb{P} \in M$ eine Halbordnung mit

$$M \models \text{“}\mathbb{P} \text{ hat die } \kappa\text{–c.c.”}.$$

Sei $G \subseteq \mathbb{P}$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter über M und $X \subseteq M$ ein Element der generischen Erweiterung $M[G]$. Sei μ die Kardinalität von X in $M[G]$, also

$$M[G] \models \mu = |X|.$$

Dann existiert eine Obermenge $Y \in M$ von X mit

$$M \models |Y| \begin{cases} \leq \mu, & \text{falls } \kappa \leq \mu^+ \\ < \kappa, & \text{falls } \kappa \geq \mu^+ \ \wedge \ \mu < \mathrm{cf}(\kappa) \\ \leq \kappa, & \text{falls } \kappa \geq \mu \ \wedge \ \mu \geq \mathrm{cf}(\kappa). \end{cases}$$

Insbesondere ist, wenn X eine reguläre Kardinalzahl gleich κ oder echt größer κ ist, X auch eine Kardinalzahl in $M[G]$.

Beweis. Sei also $X \in M[G]$ beliebig mit $X \subseteq M$. Sei μ die Kardinalität von X in $M[G]$. Dann ist $\mu = |X|^{M[G]}$ und es existiert per definitionem eine Bijektion $f : \mu \to X$ in $M[G]$. Da $f \in M[G]$ existiert ein Name $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ mit $\tau^G = f$. Sei $\check{\mu}$ der Name von μ und $p \in G$ mit

$$p \Vdash \text{“}\tau \text{ ist eine Funktion mit Definitionsmenge } \check{\mu}\text{”}.$$

Wir fixieren nun für jedes Element $\xi \in \mu$ der Definitionsmenge von f in $M[G]$ die Menge aller möglichen Funktionswerte B_ξ von τ bei $\check{\xi}$:

$$B_\xi := \{\eta \in M \mid \exists q \leq p \wedge (q \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\eta})\}.$$

Wir konstruieren nun Antiketten in M anhand der B_ξ um ihre Größe abzuschätzen. Per definitionem existiert für jedes $\eta \in B_\xi$ ein Zeuge q_ξ^η mit $q_\xi^\eta \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\eta}$. Wir behaupten, dass dieses Verfahren eine Antikette induziert: Sei also $\eta \neq \eta'$. Zu zeigen ist, dass dann schon $q_\xi^\eta \perp q_\xi^{\eta'}$. Wir nehmen an, dass ein r existiert mit $q_\xi^\eta \geq r \leq q_\xi^{\eta'}$ und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Da alle drei Bedingungen kleiner p sind, erzwingen diese, per Lemma 3.3.1, dass τ eine Funktion, insbesondere Rechtseindeutig ist. Dieses r erzwingt aber, wieder per Lemma 3.3.1, dass $\check{\eta} = \tau(\check{\xi}) = \check{\eta}'$, insbesondere $\check{\eta} = \check{\eta}'$ also $\eta = \eta'$, ein Widerspruch. Da ξ beliebig war, existiert, vermöge der Bijektion $\eta \mapsto q_\xi^\eta$, eine Antikette A_ξ mit $|A_\xi| = |B_\xi|$. Da per Voraussetzung M die $\kappa-$c.c. hat, gilt $M \models |B_\xi| \leq \kappa$.

Wir können nun ein $Y \supseteq X$ konstruieren, welches die zu zeigenden Ungleichungen erfüllt:

$$Y := \bigcup_{\xi<\mu} B_\xi.$$

Da die B_ξ in M sind, ist auch $Y \in M$. Ein B_ξ ist die Menge aller möglichen Funktionswerte von τ bei ξ. Da die echten Funktionswerte von τ sicher unter den möglichen liegen, ist auch das tatsächliche Bild $X \subseteq Y$.

Wir überprüfen nun die Ungleichungen. Per Fakta 2.3.1 ist zumindest

$$|Y| \leq \sum_{\xi<\mu} |B_\xi| = \mu \cdot \sup_{\xi<\mu} |B_\xi| = \max_{\xi<\mu}(\mu, |B_\xi|).$$

.

- Sei also $\kappa \leq \mu^+$. Dann sind die $|B_\xi|$'s, da sie echt kleiner κ sind, auch echt kleiner μ^+, also auch kleiner gleich μ.
- Sei also $\kappa \geq \mu^+$ und $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$. Da wir nur μ viele echt kleinere Mengen addieren, und μ kleiner der Kofinalität ist, also kleiner der Mindestanzahl an echt kleineren Menge ist die wir bräuchten um κ zu erreichen, ist $|Y| < \kappa$.
- Sei also $\kappa \geq \mu$ und $\mu \geq \mathrm{cf}(\kappa)$. Nun können wir κ erreichen, da wir genau $\mathrm{cf}(\kappa)$ viele Mengen addieren können. Da wir aber nicht mehr Mengen als κ-viele kleinere Mengen als κ addieren können, können wir aber nur höchstens κ erreichen. Damit ist in diesem Fall $|Y| \leq \kappa$.

Damit wäre der erste Punkt gezeigt. Sei nun $\rho \geq \kappa$ eine beliebige Kardinalzahl in M. Mit der Notation aus dem ersten Teil, setzen wir $\mu := |\rho|$ in $M[G]$, $X := \rho$ und $Y \supseteq X$ eine Obermenge von X mit $Y \in M$. Wir nehmen an, dass ρ in $M[G]$ keine Kardinalzahl ist, insbesondere also $\mu = |\rho^{M[G]}| < \rho$ und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Mit den Abschätzungen aus dem ersten Teil erhalten wir

$$M \models |Y| < \rho \begin{cases} \text{falls } \kappa \leq \mu^+ \\ \text{falls } \kappa \geq \mu^+ \ \wedge \ \mu < \mathrm{cf}(\kappa) \\ \text{falls } \kappa < \rho. \end{cases}$$

Das ist absurd, da in M die Kardinalzahl $\rho = X \subseteq Y$ ist. Wir befinden uns also im dritten Fall $\kappa \geq \mu \geq \mathrm{cf}(\kappa)$ und $\rho \leq \kappa$ also $\rho = \kappa$, womit ρ per Voraussetzung regulär ist. Dann ist aber per definitionem $\mathrm{cf}(\rho) = \rho$ und mit $\kappa \geq \mu \geq \mathrm{cf}(\kappa)$ auch $\rho \geq \mu \geq \mathrm{cf}(\rho)$ also $\rho \geq \mu \geq \rho$. Das ist ein Widerspruch zu $\mu < \rho$.

□

Satz 4.1.1 (Cohen)**.** Ist ZFC konsistent, so auch ZFC $+ \neg$CH, sogar ZFC $+ 2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Beweis. Da wir einen Konsistenzbeweis führen, können wir voraussetzen, dass ein transitives, abzählbares Modell M von ZFC existiert. Wir zeigen zuerst die erste Aussage, also Con(ZFC $+ \neg$CH). Sei dazu $\alpha \in M$ mit $\alpha \geq \omega_2^M$. Wir betrachten nun $\mathbb{C}(\alpha) \in M$. Per Lemma 3.1.1 existiert ein $\mathbb{C}(\alpha)$-generischer Filter $G \subseteq M$. Durch

$$F : \begin{cases} \alpha \to \omega^\omega \\ \xi \mapsto \bigcup_{p \in G} p(\xi) \end{cases}$$

ist eine Funktion definiert. Dies können wir mit einem ähnlichen Argument wie in unserem Beweis vom Satz von Cantor 3.1.1 einsehen: Für $n \in \omega$, $\xi \in \alpha$ sei

$$D_n^\xi := \{p \in \mathbb{C}(\alpha) \mid n < \mathrm{dom}(p(\xi))\} \in M.$$

Wir behaupten, dass diese D_n^ξ dicht in $\mathbb{C}(\alpha)$ liegen. Fixiere $n \in \omega$ und $\xi \in \alpha$. Sei $p \in \mathbb{C}(\alpha)$ mit $d := \mathrm{dom}(p(\xi))$ beliebig und o.B.d.A. nicht in D_n^ξ. Da p nicht in D_n^ξ liegt, gilt per Konstruktion $n \geq d$. Wir konstruieren nun ein

$$\hat{p} := \underbrace{p \backslash \{(\xi, p(\xi))\}}_{\text{“frei”}} \cup \{(\xi, \underbrace{p(\xi)}_{\text{“alte”}} \cup \underbrace{\{(d+k, d+k) \mid k \leq n-d+1\}}_{\text{“neue”}})\}.$$

Dann ist $\hat{p}$ bei ξ offensichtlich eine Fortsetzung von p und $n < \mathrm{dom}(\hat{p}(\xi))$, womit tatsächlich $p \geq \hat{p} \in D_n^\xi$. Da G generisch ist, gibt es also zumindest ein $p \in G \cap D_n^\xi$, womit $F(\xi)$ tatsächlich in ω^ω, F also linksvollständig ist. F ist auch rechtseindeutig, da zwei gleichen ξ immer die gleiche Vereinigung zugeordnet wird. Diese ist tatsächlich ein Element vom Funktionenraum und wohldefiniert, da sich die Funktionen in G fortsetzten, weil G als Filter nach unten gerichtet ist.

F ist sogar auch injektiv: Sei dazu $\xi \neq \xi'$. Wir betrachten die Menge

$$D_\xi^{\xi'} := \{p \in \mathbb{C}(\alpha) \mid \exists n \in \mathrm{dom}(p(\xi)) \cap \mathrm{dom}(p(\xi')) : p(\xi)(n) \neq p(\xi')(n)\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass diese Menge dicht ist. Sei also $p \in \mathbb{C}(\alpha)$ beliebig und o.B.d.A. nicht in $D_\xi^{\xi'}$. $p(\xi)$ und $p(\xi')$ stimmen also an allen n in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein. Sei $d := \mathrm{dom}(p(\xi))$, $d' := \mathrm{dom}(p(\xi'))$ und $\hat{d} := \max(d, d')$. Wir betrachten

$$\begin{aligned}\hat{p} := &\underbrace{p \backslash \{(\xi, p(\xi)), (\xi', p(\xi'))\}}_{\text{“frei”}} \cup \\ &\{(\xi, \underbrace{p(\xi)}_{\text{“alte”}} \cup \underbrace{\{(d+k, 0) \mid k \leq \hat{d} - d\}}_{\text{“neue”}})\} \cup \\ &\{(\xi', \underbrace{p(\xi')}_{\text{“alte”}} \cup \underbrace{\{(d'+k, 1) \mid k \leq \hat{d} - d'\}}_{\text{“neue”}})\}.\end{aligned}$$

Da $\hat{p}(\xi)(\hat{d}) = 0 \neq 1 = \hat{p}(\xi')(\hat{d})$ ist $\hat{p} \in D_\xi^{\xi'}$. Da $\hat{p}$ die Funktion p bei ξ beziehungsweise ξ' fortsetzt und sonst gleich lässt, gilt auch $\hat{p} \leq p$, womit die $D_\xi^{\xi'}$'s tatsächlich dicht in $\mathbb{C}(\alpha)$ liegen. Weil G generisch ist, existiert ein $q \in G \cap D_\xi^{\xi'}$. Per Konstruktion von F ist $F(\xi) = \bigcup_{p \in G} p(\xi)$ beziehungsweise $F(\xi') = \bigcup_{p \in G} p(\xi')$. Es ist, da $q \in G$, also auch $q(\xi) \subseteq F(\xi)$ und $q(\xi') \subseteq F(\xi')$. Da sich, per Konstruktion von $D_\xi^{\xi'}$, die Funktionswerte von q bei ξ und ξ' aber an zumindest einer Stelle unterscheiden, ist $F(\xi) \neq F(\xi')$.

F ist also tatsächlich eine injektive Abbildung, womit $\alpha \leq |\omega^\omega| = |2^\omega|$. Wir sind noch nicht fertig, da F mithilfe von G, also nicht in M konstruiert wurde. Die obere Abschätzung gilt also nur in $M[G]$, die untere durch ω_2 aber in M. Wir wollen zeigen, dass letztere auch in $M[G]$ hält. Dazu sei, mit der Notation aus Lemma 4.1.1 nun $\kappa := \omega_2$ und $\rho := \alpha$. Da M per Lemma 4.0.2 die Voraussetzungen erfüllt, gilt $M[G] \models \alpha \geq \omega_2$ womit $M[G] \models \aleph_2 \leq 2^{\aleph_0}$, insbesondere

$$M[G] \models \neg\mathrm{CH}.$$

Wir wollen nun die zweite Aussage zeigen, also $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Dazu sei unser Modell ein L_γ für irgendein abzählbares $\gamma < \omega_1^V$ aus der Sicht des Universums V. Sei nun $\alpha = \omega_2^{L_\gamma}$ aus der Sicht von L_γ.

Für die untere Grenze betrachten wir, wie im ersten Teil, nun die Halbordnung $\mathbb{C}(\alpha)$ und wählen, da L_γ abzählbar ist, einen generischen Filter $G \subseteq \mathbb{C}(\alpha)$ über L_γ. Mit dem gleichen F wie oben, erhalten wir dann wieder $\omega^\omega \geq \alpha$ also

$$L_\gamma[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2,$$

womit wir die gewünschte untere Grenze gefunden haben.

Für die obere Grenze müssen wir also noch zeigen, dass $L_\gamma[G] \models 2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$. Dazu sei $\tau^G \in \omega^\omega \cap L_\gamma[G]$ beliebig. Für $n < \omega$ betrachten wir die Mengen

$$E_n := \{p \in \mathbb{C}(\alpha) \mid \exists m < \omega : p \Vdash^{\mathbb{C}(\alpha)}_{L_\gamma} \tau(\check{n}) = \check{m}\}.$$

Wir behaupten, dass diese E_n dicht sind. Sei $p \in \mathbb{C}(\alpha)$ beliebig und o.B.d.A. nicht in E_n. Wir nehmen an, dass für alle $q \leq p : q \notin E_n$ gilt und wollen dies zu einem Widerspruch führen. Per Konstruktion von $\Vdash^*$ und dem Fundamentalsatz 3.4.1 gilt also $p \Vdash^{\mathbb{C}(\alpha)}_{L_\gamma} \neg\tau(\check{n}) = \check{m}$ für alle m, womit, wieder mit dem Fundamentalsatz, auch $L_\gamma[G] \models \forall m \in \omega : \tau^G(n) \neq m$, ein Widerspruch zu $\tau^G : \omega \to \omega$. Per Lemma 3.1.2 existieren nun maximale Antiketten $A_n \subseteq E_n$ für alle $n < \omega$. Wir definieren mithilfe der Funktion $\lceil .,. \rceil$ -jener aus der Herleitung vom Auswahlaxiom in $M[G]$ aus 3.5- den *netten Namen* σ für τ^G

$$\sigma = \sigma(\tau) := \{(\lceil \check{n}, \check{m} \rceil, p) \mid p \in A_n \wedge p \Vdash^{\mathbb{C}(\alpha)}_{L_\gamma} \tau(\check{n}) = \check{m}\}.$$

Wir behaupten, dass σ tatsächlich ein Name für τ^G ist, also, dass $\sigma^G = \tau^G$. Wir zeigen die beidseitige Inklusion:

$\subseteq$ Sei also $\theta^G \in \sigma^G$ beliebig. Da für den G-Interpretationspaarhomomorphismus $\lceil .,. \rceil$, wie wir schon gezeigt haben, für $x = \check{x}^G, y = \check{y}^G : \lceil \check{x}, \check{y} \rceil^G = (x, y)$ gilt, ist $\theta^G = (n, m)$ für $n, m < \omega$. Es existiert insbesondere ein $p \in G$ mit $(\lceil \check{n}, \check{m} \rceil, p) \in \sigma$. Per Konstruktion von σ gilt dann allerdings $p \Vdash^{\mathbb{C}(\alpha)}_{L_\gamma} \tau(\check{n}) = \check{m}$, womit per Fundamentalsatz schon $(n, m) \in \tau^G$, also $\theta^G \in \tau^G$.

$\supseteq$ Sei also $\theta^G \in \tau^G$ beliebig. Da $\tau^G : \omega \to \omega$, ist θ^G ein Paar von der Form (n, m) mit $n, m \in \omega$. Mit dem Fundamentalsatz existiert dann ein $p \in G$ mit $p \Vdash^{\mathbb{C}(\alpha)}_{L_\gamma} (\check{n}, \check{m}) \in \tau$ also

$$p \Vdash^{\mathbb{C}(\alpha)}_{L_\gamma} \tau(\check{n}) = \check{m}.$$

Da A_n eine maximale Antikette ist, gilt per Fakta 3.1.3, dass $G \cap A_n$ nicht leer ist. Sei also $q \in G \cap A_n$. Da $A_n \subseteq E_n$, gilt per Konstruktion der E_n, dass

$$q \Vdash^{\mathbb{C}(\alpha)}_{L_\gamma} \tau(\check{n}) = \check{m}'$$

für ein $m' < \omega$. Da G als Filter nach unten gerichtet ist, existiert ein $r \in G : p \geq r \leq q$. Für dieses gilt dann per Lemma 3.3.1 und dem Fundamentalsatz, dass

$$r \Vdash^{\mathbb{C}(\alpha)}_{L_\gamma} \tau(\check{n}) = \check{m}' \wedge \tau(\check{n}) = \check{m}.$$

Da $\tau^G : \omega \to \omega$ rechtseindeutig ist, folgt mit dem Fundamentalsatz $m = m'$. Es gilt also $(\lceil \check{n}, \check{m} \rceil, q) \in \sigma$, womit $(n, m) \in \sigma^G$.

Es gibt also für jedes $x \in \omega^\omega \cap L_\gamma[G]$ einen netten Namen $\sigma \in L_\gamma^{\mathbb{C}(\alpha)}$ mit $x = \sigma^G$. Jedes Element eines netten Namens ist von der Form $(\lceil \check{n}, \check{m} \rceil, p)$ für ein $p \in A_n$. Da $\mathbb{C}(\alpha)$ die c.c.c. hat, und A_n eine Antikette ist, gibt es aber für jedes $n \in \omega$ höchstens abzählbar viele m, p mit $(\lceil \check{n}, \check{m} \rceil, p) \in \sigma$. Darüber hinaus gibt es durch die c.c.c. nicht mehr als $\alpha^{\aleph_0}$ solche Antiketten. Tatsächlich gibt es nicht mehr als α nette Namen für die Funktionen aus ω^ω:

Mit der Hausdorff-Formel 2.3.1 ist für $k, \lambda \geq \aleph_0$:

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+,$$

womit

$$\begin{gathered}(\alpha^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \alpha^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = \alpha^{\aleph_0} = \aleph_2^{\aleph_0} = (\aleph_1^+)^{\aleph_0} = \\ {\aleph_1}^{\aleph_0} \cdot \aleph_1^+ = ({\aleph_0}^+)^{\aleph_0} \cdot \aleph_1^+ = {\aleph_0}^{\aleph_0} \cdot \aleph_0^+ \cdot \aleph_1^+ = \alpha,\end{gathered}$$

wobei wir in jedem Schritt wo die passende Form gegeben ist, die Hausdorff-Formel angewendet haben und GCH für $\aleph_0^{\aleph_0} \leq \aleph_1^+$, welche in L_γ bekannterweise gilt. Es gibt also höchstens α viele nette Namen für Elemente aus ω^ω, womit $L_\gamma[G] \models 2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$, vermöge der Bijektion, die eine Funktion auf ihren netten Namen schickt, und der Injektion, die nette Namen in α hinein abbildet.

Es gilt also zusammen mit dem ersten Teil:

$$L_\gamma[G] \models 2^{\aleph_0} = \aleph_2,$$

was zu zeigen war.

$\square$

Literaturverzeichnis

[Kun04] Kenneth Kunen. *Set theory : an introduction to independence proofs.* North-Holland, 2004.

[Mü20] Sandra Müller. Lecture notes in axiomatic set theory, March 2020.

[Sch14] Ralf Schindler. *Set theory : exploring independence and truth.* Springer, 2014.