Analysis 2 für Informatik

Übungsbeispiele

• **Beispiel 1)** Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

$$(a) \quad z = x^2 - y^2, \qquad\qquad (b) \quad z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}.$$

• **Beispiel 2)** Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

$$(a) \quad z = xy, \qquad\qquad (b) \quad z = \frac{x}{y}.$$

• **Beispiel 3)** Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

$$(a) \quad z = x^2 y, \qquad\qquad (b) \quad z = \frac{x}{y^2}.$$

• **Beispiel 4)** Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x, y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

• **Beispiel 5)** Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x, y) = x^2 y + 2x - y$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

• **Beispiel 6)** Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **homogen** vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f, für die $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ auch im Definitionsbereich von f liegt, gilt:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n).$$

Man beweise, dass die beiden Produktionsfunktionen $f(x, y) = cx^\alpha y^{1-\alpha}$ und $g(x, y) = (cx^\alpha + dy^\alpha)^{1/\alpha}$ (x Arbeit, y Kapital, c, d, α konstant) homogene Funktionen vom Homogenitätsgrad $r = 1$ sind.

• **Beispiel 7)** Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **homogen** vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f, für die $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ auch im Definitionsbereich von f liegt, gilt:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n).$$

Man prüfe nach, ob die Funktionen

$$(a) \quad f(x, y, z) = x + (yz)^{1/2} \ (\text{für } y, z \geq 0) \qquad\qquad (b) \quad f(x, y) = x^2 + y$$

$$(c) \quad f(x, y) = ax^b y^c \ (\text{mit } a, b, c \in \mathbb{R},\ x, y > 0)$$

homogen sind.

• **Beispiel 8)**

(a) Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x+2y)$.

- **Beispiel 9)**

(a) Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.5, 0.2)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die beiden Funktionen $g(x,y) = x^2 \sin y + e^{x+2y}$ und $\vec{h}(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} x^2 \sin y \\ e^{x+y} \end{smallmatrix}\right)$.

- **Beispiel 10)** Man prüfe nach, ob die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} für die folgenden Funktionen $f(x,y)$ übereinstimmen:

$$(a) \quad f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}, \qquad (b) \quad f(x,y) = x^3 e^{y^2}, \qquad (c) \quad f(x,y) = \sqrt{xy^3}.$$

- **Beispiel 11)** Man berechne alle Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie die Jacobi-Matrix für die folgenden Funktionen:

$$(a)\ f(x,y,z) = x^2 \sin(yz) + e^{x+y+z}, \quad (b)\ \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \sin t \\ e^{3t} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{pmatrix}, \quad (c)\ \vec{h}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \sin y \\ e^{x+2y} \end{pmatrix}.$$

- **Beispiel 12)** Man bestimme den Definitionsbereich der Vektorfunktion $\mathbf{x}(t)$, sowie die Ableitung $\mathbf{x}'(t)$, wo sie existiert:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\left(\frac{2t}{\sqrt{1-3t^2}} \right)^{\frac{5}{4}}, \sin\left(\frac{1}{1+t^2} \right) \right)$$

- **Beispiel 13)** Man bestimme den Definitionsbereich der Vektorfunktion $\mathbf{x}(t)$, sowie die Ableitung $\mathbf{x}'(t)$, wo sie existiert:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sin(1+\cos(t)), \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1-t^2}} \right)$$

- **Beispiel 14)** Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist durch

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$ gilt:

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

(Dabei sind Q, p und ϵ_0 Konstante.) In beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}$ nach der Formel $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$.

• **Beispiel 15)** Man bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktion: $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{4x^2y^2}{1+x+y}\right)$

• **Beispiel 16)** Man bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktion: $f(x,y,z) = \dfrac{y+\sqrt{xz}}{1+\sin^2(xyz)}$

• **Beispiel 17)** Man bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktion: $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x^3y}{y-x^3}\right)$

• **Beispiel 18)** Man bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktion: $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x}+y^3z^2}{1+\cos^2(1+x)}$

• **Beispiel 19)** Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x+y-z) \\ \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \end{pmatrix}$

• **Beispiel 20)** Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y^2z} \\ x^yz^2 \end{pmatrix}$

• **Beispiel 21)** Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x-z}{y+1}} \\ z \cdot e^{-\frac{x}{y}} \end{pmatrix}$

• **Beispiel 22)** Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\operatorname{Arctan}(x+y^2)) \\ x\cos(y^2-\sqrt{x})\cdot\tan(xyz) \end{pmatrix}$

• **Beispiel 23)** Man berechne die quadratische Approximation der Funktion $f(x,y) = e^x\cos y$ im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$.

• **Beispiel 24)** Man berechne die quadratische Approximation der Funktion $f(x,y) = \sqrt{1+4x^2+y^2}$ im Punkt $(0,0)$ und approximiere damit $f(0.1, 0.2)$.

• **Beispiel 25)** Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation der Funktion

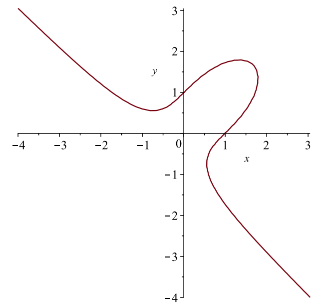
$$f(x,y) = x^2(y-1) + xe^{y^2}$$

im Entwicklungspunkt $(1,0)$.

• **Beispiel 26)** Durch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$ liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme $\frac{dz}{dt}$ mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst x und y in z einsetzt und anschließend nach dem Parameter t differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

• **Beispiel 27)** Die Funktion $y(x)$ sei implizit gegeben durch die Gleichung $x^3-3xy+y^3-1 = 0$ und besteht aus drei Funktionszweigen, deren Funktionsgraphen zusammengesetzt eine

Kurve in der x, y-Ebene ergeben (siehe Skizze).



(a) Man bestimme die Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ durch implizites Differenzieren.

(b) Zu $x = 1$ gibt es drei y-Werte y_1, y_2, y_3, die die obige Gleichung erfüllen. Man bestimme diese y-Werte und berechne die Ableitung y' in den drei Punkten P_i auf der Kurve mit den Koordinaten $(1, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ (man beachte, dass y' von x und y abhängt).

(c) Es gibt zwei Punkte Q_1 und Q_2 auf der Kurve, wo y' nicht existiert ("unendlich groß" wird). Man bestimme die Koordinaten dieser beiden Punkte (dort hängen die drei Funktionszweige zusammen).

• **Beispiel 28)** Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = \ln(u \sin(u) - v)$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = \tan(-u + v^3)$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt} g(2t, t^2 + 1)$.

• **Beispiel 29)** Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = e^{-u^2}$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = -e^{v^3}$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt} g(t^2 - 1, 3t)$.

• **Beispiel 30)** Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$ nach y an der Stelle $(0,0)$, wobei $f(u,v) = u^2 + v^2$, $g(x,y) = \cos x + \sin y$ und $h(x,y) = x + y + 1$ ist.

• **Beispiel 31)** Es sei $F(x,y) = \frac{2x^4 + y}{y^5 - 2x}$, $x = 2u - 3v + 1$, $y = u + 2v - 2$. Man berechne $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ für $u = 2$, $v = 1$ mit Hilfe der Kettenregel.

• **Beispiel 32)** Man bestimme die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ in Richtung $\binom{-1}{1}$ im Punkt $(3,2)$ mit

$$(a) \quad f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}, \qquad (b) \quad f(x,y) = x^3 e^{y^2}, \qquad (c) \quad f(x,y) = \sqrt{xy^3}.$$

• **Beispiel 33)** Man berechne die Ableitung von $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ im Punkt $P_0(3,2)$

(a) in Richtung der Koordinatenachsen,

(b) in Richtung von $(-1,-1)$, sowie

(c) in Richtung von $\operatorname{grad} f$.

• **Beispiel 34)** In welcher Richtung erfolgt die maximale Änderung von

$$f(x,y,z) = x^2 \sin(yz) - y^2 \cos(yz)$$

vom Punkt $P_0(4, \frac{\pi}{4}, 2)$ aus und wie groß ist sie annähernd?

• **Beispiel 35)** Gegeben sei die quadratische Form $q(\mathbf{x}) = q(x,y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, sodass $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$? Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

• **Beispiel 36)** Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ positiv definit ist.

• **Beispiel 37)** Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $x^2 + axy + 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$ positiv definit ist.

• **Beispiel 38)** Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $-x^2 + axy - 3xz - y^2 - 2yz - 4z^2$ negativ definit ist.

• **Beispiel 39)** Gegeben sei die quadratische Form $q(\mathbf{x}) = q(x, y, z) = ax^2 + 4xy + 2xz + 3y^2 + 2ayz + 4z^2$ mit $a \in \mathbb{Z}$. Man bestimme die symmetrische Matrix A, sodass $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Bestimmen Sie weiters einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass q positiv definit ist.

• **Beispiel 40)** Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrix: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

• **Beispiel 41)** Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrix: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

• **Beispiel 42)** Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrix: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & -7 & -20 \end{pmatrix}$

• **Beispiel 43)** Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrix: $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

• **Beispiel 44)** Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrix: $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

• **Beispiel 45)** Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrix: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Setzen Sie den Vektor $(1, 0, 0)$ und den Vektor $(0, 0, 1)$ in die der Matrix entsprechenden quadratischen Form ein.

• **Beispiel 46)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

• **Beispiel 47)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x, y) = 2x^3 - 5xy^2 + 3y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

• **Beispiel 48)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

• **Beispiel 49)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x, y) = (x^2 + 5y^2)e^{-x^2-y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

• **Beispiel 50)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-2y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

• **Beispiel 51)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \leq x, y \leq \pi/2$.

• **Beispiel 52)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \leq x, y \leq \pi$.

• **Beispiel 53)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x - \sin y$ für $0 \leq x, y \leq \pi/2$.

• **Beispiel 54)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x - \sin y$ für $0 \leq x, y \leq \pi$.

• **Beispiel 55)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \leq x, y \leq \pi/2$.

• **Beispiel 56)** Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist. $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \leq x, y \leq \pi$.

• **Beispiel 57)** Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = 4(x-2)(y^2 + 10y) + 3x^3$.

• **Beispiel 58)** Man finde alle stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 3$ und bestimme daraus die relativen Extrema.

• **Beispiel 59)** Man bestimme die Extrema von $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$.

• **Beispiel 60)** Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(3-x-y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3-x\}$.

(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich D in der (x,y)-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima im Inneren von D sowie unter den Funktionswerten am Rand von D zu suchen.)

• **Beispiel 61)** Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 62)** Berechnen Sie den maximalen Wert von $3x + 2y$ unter der Nebenbedingung $x + y^2 = 0$ mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 63)** Berechnen Sie den maximalen Wert von $x - 3y$ unter der Nebenbedingung $x^2 - y = 0$ mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 64)** Berechnen Sie den minimalen Wert von $x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $2x + 3y - 1 = 0$ mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 65)** Man bestimme denjenigen Punkt auf der Ebene $z = x + y$, der von dem Punkt $(1, 0, 0)$ den kleinsten (euklidischen) Abstand hat mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 66)** Man bestimme mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren die extremalen Werte der Funktion $f(x, y) = xy$ auf der Einheitskreislinie.

• **Beispiel 67)** Man bestimme zu einer gegebenen Kugel mit Radius R einen eingeschriebenen Zylinder von maximaler Oberfläche mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 68)** Man bestimme zu einer gegebenen Kugel mit Radius R einen eingeschriebenen Zylinder von maximalem Volumen mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 69)** Man bestimme zu einer gegebenen Kugel mit Radius R einen eingeschriebenen Drehkegel von maximaler Oberfläche mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 70)** Man bestimme zu einer gegebenen Kugel mit Radius R einen eingeschriebenen Drehkegel von maximalem Volumen mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 71)** Welcher Quader mit gegebener Oberfläche A besitzt maximales Volumen?
Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

• **Beispiel 72)** Welcher Kegel mit gegebener Oberfläche A besitzt maximales Volumen?
Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

• **Beispiel 73)** Welcher Doppelkegel (das heißt, zwei Drehkegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, die an ihren Basisflächen zusammengeklebt sind) mit gegebener Oberfläche A besitzt maximales Volumen?

Hinweis: Quadrieren Sie die Nebenbedingung und verwenden Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

• **Beispiel 74)** Ein Turm habe die Form eines oben mittels einer Ebene abgeschnittenen Zylinders. Das Dach hat somit die Form einer Ellipse. Der Grundriss des Turms sei ein Kreis mit 12m Durchmesser und Mittelpunkt im Ursprung. Die Ebene, in der das Dach liegt, habe die Gleichung $z = x + 2y + 55$. Berechnen Sie die Höhe des Turms mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 75)** Für welche Werte wird $f(x, y, z) = xyz$ unter den Nebenbedingungen $xy + yz + zx = a$ und $x + y + z = b$ möglichst groß?
Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

• **Beispiel 76)** Für welche Werte wird $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen $xy + yz + zx = a$ und $x + y + z = b$ möglichst groß?
Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

• **Beispiel 77)** Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x + 3y + 2z$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$ und $x + z = 2$ mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 78)** Die Herstellung eines Produkts P unter Verwendung zweier Produktionsfaktoren A und B werde durch die Produktionsfunktion

$$\text{(NB)} \qquad y = f(x_1, x_2) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

beschrieben. Der Gewinn des Produzenten sei durch

$$G(x_1, x_2, y) = yp_0 - x_1p_1 - x_2p_2$$

gegeben. Man maximiere den Gewinn für die Preise $p_0 = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 8$ und unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (NB), und ermittle die im Gewinnmaximum benötigten Faktormengen x_1, x_2, die Produktmenge y und den Unternehmergewinn G.
Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

• **Beispiel 79)** Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ und $x + y = 1$ mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

• **Beispiel 80)** Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x, y, z) = x - y + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ und $x - y = 1$ mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren. Geben Sie weiters den maximalen und minimalen Wert von f unter diesen Nebenbedingungen an.

• **Beispiel 81)** Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert der Funktion $f(x, y, z) = xyz$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

• **Beispiel 82)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint_B (xy + x^2 - y^2)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechteckbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$ und $(-1, 5)$ bestimmt ist.

• **Beispiel 83)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint_B (x + 2xy - y^2)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechteckbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 5)$ und $(3, 5)$ bestimmt ist.

• **Beispiel 84)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint_B \mathrm{e}^{2x}(y + 1)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechteckbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-2, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 3)$ und $(-2, 3)$ bestimmt ist.

• **Beispiel 85)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint\limits_B \sin(x + y)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, (π, π) sei.

• **Beispiel 86)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint\limits_B x^2 \ln(y)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Bereich $\{(x, y) \mid 1 \le y \le 2 \text{ und } |x| \le 2\}$ sei.

• **Beispiel 87)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint_B 12x^2y^3\, dx\, dy$, wobei B der durch $x = 4$, $y = 1$ und $x + 2y = 2$ berandete beschränkte Bereich der (x, y)-Ebene sei.

• **Beispiel 88)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint_B (y - x)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -2)$ und $(4, 3)$ festgelegte konvexe Viereck sei.

• **Beispiel 89)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint_B (xy + y)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Punkte $(-3, 0)$, $(1, 5)$ und $(2, -2)$ bestimmte Dreieck sei.

• **Beispiel 90)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint\limits_B \frac{x-y}{x+y}\, dx\, dy$, mit $B \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(2, 2), (3, 2), (3, 3)$.

• **Beispiel 91)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint\limits_B \frac{1}{x+y}\, dx\, dy$, mit $B = \{(x,y) \,|\, 1 \leq x \leq 2,\ 3 \leq y \leq 2+x\}$.

• **Beispiel 92)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint\limits_B (xy + x^2 - y^2)\, dx\, dy$, mit $B \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis $x^2 + y^2 \leq 1$.

• **Beispiel 93)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint\limits_B (x+y)^2\, dx\, dy$, mit $B \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt durch $x^2 + y^2 \leq 1$.

• **Beispiel 94)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint\limits_B xe^y\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 2 sei.

• **Beispiel 95)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iint\limits_B x\ln(y)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Bereich $\{(x,y) \mid\ y \geq |x| \text{ und } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$ sei.

• **Beispiel 96)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B (xy^2z + 2z^2)\, dx\, dy\, dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich $\{(x,y,z) \mid\ 1 \leq x \leq 2, |y| \leq 2 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$ sei.

• **Beispiel 97)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B \left(\mathrm{e}^{2x}(y+1) + x\sin(z)\right)\, dx\, dy\, dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich $\{(x,y,z) \mid\ 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq \pi\}$ sei.

• **Beispiel 98)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B y\, dx\, dy\, dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt $(0,3,0)$ und Radius 5 sei.

• **Beispiel 99)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B |x| \cdot |y|\, dx\, dy\, dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1 sei.

• **Beispiel 100)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B x^2yz\, dx\, dy\, dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1 sei.

• **Beispiel 101)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B x\, dx\, dy\, dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $B = \{(x,y,z) | 1 \leq z \leq 2, (x-1)^2 + y^2 \leq 2\}$ sei.

• **Beispiel 102)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B xy\, dx\, dy\, dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinderring $B = \{(x,y,z) | 1 \leq z \leq 2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ sei.

• **Beispiel 103)** Berechnen Sie das folgende Bereichsintegral: $\iiint\limits_B x(x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinderring $B = \{(x,y,z) | 0 \leq z \leq 2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$ sei.

• **Beispiel 104)** Es sei B der durch $x = 4$, $y = 1$ und $x + 2y = 2$ begrenzte beschränkte Bereich in der (x,y)-Ebene. Man berechne $\iint\limits_B 12x^2y^2 dxdy$ auf zwei verschiedene Arten (durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge).

• **Beispiel 105)** Man berechne das Doppelintegral

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y}} x^2 \sqrt{1-y}\, dxdy.$$

Welches Bereichsintegral wird dadurch gegeben? Man berechne das Integral auch bei vertauschter Integrationsreihenfolge.

• **Beispiel 106)** Man zeige, dass gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1.$$

Anleitung: Man betrachte zunächst das Bereichsintegral $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$, welches durch Transformation in Polarkoordinaten bestimmt werden kann un den Wert 2π besitzt. Daraus ist die Behauptung abzuleiten.

• **Beispiel 107)** Man berechne das Bereichsintegral $\iiint\limits_B x^2 dxdydz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Hohlzylinder $B = \{(x, y, z) \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$ ist.

• **Beispiel 108)** Berechnen Sie die Fläche einer Ellipse, deren Haupt- bzw. Nebenachse die Länge a bzw. b hat, mittels eines Bereichsintegrals.
Hinweis: Benützen Sie die Transformation $x = a \cdot r \cdot \cos\phi$ und $y = b \cdot r \cdot \sin\phi$.

• **Beispiel 109)** Berechnen Sie

$$\iint_B (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

mit $B = \{(x, y) :\ 1 \leq x^2 - y^2 \leq 3,\ 3 \leq xy \leq 5\}$.
Hinweis: Transformieren Sie den Bereich gemäß

$$x(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}},$$
$$y(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}$$

und benützen Sie die Tatsache, dass die Funktionaldeterminante einer Transformation invers zur Funktionaldeterminante der inversen Transformation ist.

• **Beispiel 110)** Berechnen Sie

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{dx\, dy}{1 - x^2 y^2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $x = \frac{\sin v}{\sin u}$ und $y = \frac{\cos u}{\cos v}$.

• **Beispiel 111)** Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das durch

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1, \qquad -10 \leq y \leq 10,$$

gegebene Hyperbelstück um die y-Achse rotiert.
Hinweis: Das Integral $\int \sqrt{1 + x^2}\, dx$ lässt sich mit der Substitution $x = \sinh t$ ($dx = \cosh t\, dt$) berechnen. Man beachte weiters $\cosh t = (e^t - e^{-t})/2$.

• **Beispiel 112)** Die Punkte $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ seien die Eckpunkte eines Tetraeders. Bestimmen Sie dessen Volumen mit Hilfe eines geeigneten Bereichsintegrals.

• **Beispiel 113)** In die Kugel $\{(x, y, z) \big|\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$ werde ein zylindrisches Loch gebohrt. Der Zylinder sei durch $\{(x, y, z) \big|\ x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$ gegeben. Wie groß ist das Restvolumen?

• **Beispiel 114)** Das Ellipsoid mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und den Achsenlängen $5,3,3$ kann durch die Gleichung
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$$
beschrieben werden. Berechnen Sie die Oberfläche dieses Ellipsoids, indem Sie es als Rotationskörper auffassen.

• **Beispiel 115)** Gegeben ist ein Kegel mit Höhe h und Basiskreisradius r. Berechnen Sie die Mantelfläche, indem Sie den Kegel als Rotationskörper interpretieren.

• **Beispiel 116)** Berechnen Sie die Oberfläche einer Kugel mit Radius R, indem Sie die Kugel als Rotationskörper interpretieren.

• **Beispiel 117)** Man gebe eine Parametrisierung für die Mantelfläche eines Drehzylinders mit dem Radius R und der z-Achse als Rotationsachse an. Für welche Parameterwerte erhält man den Punkt $P(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}, 3\pi/4)$ auf der Zylinderoberfläche.
Gesucht sind ferner die Parameterdarstellungen für folgende drei Kurven durch den Punkt P auf der Mantelfläche:

(a) eine Meridianlinie (d.h. Parallele zur Zylinderachse),
(b) einen Breitenkreis,
(c) eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe π.

• **Beispiel 118)** Gegeben sei die parametrisierte Kurve
$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(t+\frac{\pi}{2})\\ \sin(3t)\end{pmatrix}$$
für $0\le t\le 2\pi$ (Lissajous-Figur). Man skizziere die Kurve $\vec{x}(t)$. Ferner berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ sowie $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $y=y(x)$. In welchen Punkten hat die Kurve waagrechte bzw. senkrechte Tangenten? Können Sie auch die Wendepunkte dieser Kurve bestimmen? (Verwenden Sie dabei ein Computeralgebrasystem oder WolframAlpha.)

• **Beispiel 119)** Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ gemäß
$$\vec{x}(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} x(\theta,\varphi)\\ y(\theta,\varphi)\\ z(\theta,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(R+r\cos\theta)\cos\varphi\\ (R+r\cos\theta)\sin\varphi\\ r\sin\theta\end{pmatrix},\quad \text{mit } 0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi$$
als Parametrisierung der Oberfläche eines Torus angesehen werden kann. Erklären Sie diese Darstellung anhand einer geeigneten Skizze. Wie lautet die Jakobi-Matrix dieser Funktion?

• **Beispiel 120)** Man bestimme Volumen und Oberfläche eines Torus. Dabei beachte man die in Beispiel 119 angegebene Parametrisierung.

• **Beispiel 121)** Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurve.
$$\mathbf{c}(t)=\begin{pmatrix} t^2\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, 0\le t\le 2\pi.$$

Hinweis: Man substituiere $t=\sinh(u)/2$ und verwende $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$ sowie $\cosh(u)=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$.

• **Beispiel 122)** Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurve.

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

• **Beispiel 123)** Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurve.

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -t^3 \\ 6t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 5.$$

• **Beispiel 124)** Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurve.

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

• **Beispiel 125)** Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurve.

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le x(t) \le 5,$$

wobei $x = x(t)$ und $y = y(t)$ implizit durch $y^2 = x^3$ gegeben sind.

• **Beispiel 126)** Wie groß sind die Bogenlängen der folgenden Kurven?

$$(a)\ \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le T, \quad (b)\ \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 2\pi.$$

• **Beispiel 127)** Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurve.

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{4}{3}t^3 \\ 2t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3.$$

• **Beispiel 128)** Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, die durch die Gleichung $x^2+y^2 = |x|$ implizit gegeben ist.

• **Beispiel 129)** Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{pmatrix}, \quad t \ge 0.$$

• **Beispiel 130)** Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(t+1)^{3/2} \\ t^2/2 \end{pmatrix}, \quad t \ge 0.$$

• **Beispiel 131)** Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 - 3\sin t \\ 1 + 4\sin t \end{pmatrix}, \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

• **Beispiel 132)** Man berechne das Kurvenintegral der skalarwertigen Funktion f längs der Kurve $\mathbf{c}(t)$. $f(x,y) = 2x + 5y$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

• **Beispiel 133)** Man berechne das Kurvenintegral der skalarwertigen Funktion f längs der Kurve $\mathbf{c}(t)$. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

• **Beispiel 134)** Man berechne das Kurvenintegral der skalarwertigen Funktion f längs der Kurve $\mathbf{c}(t)$. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$, $\mathbf{c}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$, $\pi/6 \leq t \leq \pi/3$.

• **Beispiel 135)** Man berechne das Kurvenintegral der skalarwertigen Funktion f längs der Kurve $\mathbf{c}(t)$. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mathbf{c}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

• **Beispiel 136)** Ein Turm habe die Form eines oben mittels einer Ebene abgeschnittenen Zylinders. Das Dach hat somit die Form einer Ellipse. Der Grundriss des Turms sei ein Kreis mit 12m Durchmesser, seine Höhe betrage 35m (für den höchsten Punkt). Der tiefste Punkt des Dachs liegt in 30m Höhe. Wie groß ist die Fläche der Außenmauer dieses Turms. Anleitung: Übersetzen Sie die Aufgabenstellung in ein geeignetes Kurvenintegral einer skalarwertigen Funktion und berechnen Sie dieses Integral.

• **Beispiel 137)** Wir betrachten eine Parameterisierung einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$: $\mathbf{c}(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Man berechne die Krümmung dieser Kurve. Wie groß ist die Krümmung an den Scheitelpunkten ($t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$)?

• **Beispiel 138)** Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld $u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$ und entlang des Streckenzugs $(0,0) \to (3,0) \to (3,2)$.

• **Beispiel 139)** Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

(a) längs der beiden achsenparallelen Wege $(0,0) \to (0,2) \to (3,2)$ sowie $(0,0) \to (3,0) \to$ $3,2)$

(b) entlang der Parabel $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$.

• **Beispiel 140)** Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$ und entlang des Streckenzugs $(0,0) \to (3,0) \to (3,2)$.

• **Beispiel 141)** Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 - y \end{pmatrix}$ entlang des Weges $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$ und entlang des Streckenzugs $(0,0) \to (3,0) \to (3,2)$.

• **Beispiel 142)** Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral $\int\limits_c (\cos x\,dx + e^{-y}\,dy + z^2\,dz)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es über einen Weg von $(-1,3,4)$ nach $(6,9,-2)$.

• **Beispiel 143)** Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral $\int\limits_c (e^{-x}\,dx + \cos y\,dy + z^5\,dz)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es über einen Weg von $(1,2,3)$ nach $(-4,-5,-6)$.

• **Beispiel 144)** Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral $\int\limits_c (y\,dx + (y-x)\,dy)$ nicht wegunabhängig ist, indem Sie zwei verschiedene Kurven von $(0,0)$ nach $(1,1)$ wählen, für welche die Werte der Kurvenintegrale verschieden sind.

• **Beispiel 145)** Berechnen Sie zunächst $\int\limits_c (y\,dx + x\,dy)$ mit $c(t) = (t^2, t)$, $0 \le t \le 1$ und untersuchen Sie danach, ob das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

• **Beispiel 146)** Berechnen Sie $\int\limits_c (y^2\,dx + x^2\,dy)$ mit $c(t) = (t, \sqrt{t})$, $0 \le t \le 1$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

• **Beispiel 147)** Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (y^2\,dx + 2xy\,dy)$
a) entlang des Streckenzuges $(1,1) \to (3,1) \to (3,2)$;
b) entlang der Geraden, die die Punkte $(1,1)$ und $(3,2)$ verbindet.
Untersuchen Sie danach, ob das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

• **Beispiel 148)** Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (\sin y\,dx + x\cos y\,dy)$
a) entlang des Streckenzuges $(-1,0) \to (0,0) \to (0,2)$;
b) entlang der Geraden, die die Punkte $(-1,0)$ und $(0,2)$ verbindet.
Untersuchen Sie danach, ob das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

• **Beispiel 149)** Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy)$
a) entlang des Streckenzuges $(-1,-1) \to (-1,0) \to (2,0)$;
b) entlang der Geraden, die die Punkte $(-1,-1)$ und $(2,0)$ verbindet.
Untersuchen Sie danach, ob das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

• **Beispiel 150)** Berechnen Sie $\int\limits_c (e^x\,dx + e^y\,dy)$ mit $\mathbf{c}(t) = (\sqrt{t}, \ln t)$, $1 \le t \le 2$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

• **Beispiel 151)** Berechnen Sie $\int\limits_c (y^2 e^x\,dx + 2ye^x\,dy)$ mit $\mathbf{c}(t) = (1, \tan t)$, $0 \le t \le \pi/4$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

• **Beispiel 152)** Man untersuche, ob das Kurvenintegral

$$\int_c \big(2xy + \arctan y + \cos x\big)dx + \big(x^2 + \frac{x}{1+y^2}\big)dy$$

wegunabhängig ist und bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion. Welchen Wert hat das Integral über einen Weg c von $(0,0)$ nach $(\pi,1)$?

• **Beispiel 153)** Man zeige, dass das Kurvenintegral

$$\int_c (\cos x dx + e^{-y} dy + z^2 dz)$$

wegunabhängig ist und berechne dieses Integral über einen Weg von $(-1,3,4)$ nach $(6,9,-2)$.

• **Beispiel 154)** Man bestimme, falls möglich, ein Potential des Vektorfeldes

$$\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y}{(x+y)^2} \\ -\frac{2x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}.$$

In welchen Gebieten $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wegunabhängig?

• **Beispiel 155)** Man bestimme, falls möglich, ein Potential des Vektorfeldes

$$\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y)^2} \\ \frac{1}{1+(x^2+y)^2} \end{pmatrix}.$$

In welchen Gebieten $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wegunabhängig?

• **Beispiel 156)** Sei $\alpha \in \mathbb{Z}$. Man untersuche, für welche α das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y) = (y^{\alpha-1}, (\alpha-1)xy^{\alpha-2})$ eine Stammfunktion besitzt und berechne diese gegebenenfalls.

• **Beispiel 157)** Man zeige, dass das Vektorfeld $\vec{f}(x, y) = (y^{\alpha-2}, (\alpha-2)xy^{\alpha-3})$ eine Stammfunktion besitzt und berechne diese.

• **Beispiel 158)** Welches der folgenden Vektorfelder $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ist ein Gradientenfeld und wie lautet ggf. eine zu $\mathbf{f}$ gehörende Stammfunktion?

$(a)\quad (1, 1, 1),\qquad (b)\quad (-x, -y, -z),\qquad (c)\quad (2x, 2y, 0),\qquad (d)\quad (yz, xz, x^2).$

• **Beispiel 159)** Man überprüfe, ob das Vektorfeld $\mathbf{f} = (yz, (x-2y)z, (x-y)y)$ eine Stammfunktion besitzt. Wenn ja, gebe man alle Stammfunktionen an.

• **Beispiel 160)** Man finde (z.B. unter Zuhilfenahme der Formeln von Moivre) für die Funktionen

$$\sin^2 t, \cos^2 t, \sin^3 t, \cos^3 t$$

Darstellungen als trigonometrische Polynome der Periode 2π.

• **Beispiel 161)** Unter Zuhilfenahme der Moivre'schen Formel finde man eine Darstellung für die Funktionen

$$\cos^2 t, \sin^2 t, \cos^3 t, \sin^3 t, \cos^4 t, \sin^4 t$$

als trigonometrische Polynome der Periode 2π.

• **Beispiel 162)** Zeigen Sie die folgende Identität.

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

• **Beispiel 163)** Zeigen Sie, dass für je zwei Funktionen f und g aus der Menge $\{1/\sqrt{2}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \dots\}$ gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{falls } f \equiv g \\ 0 & \text{falls } f \neq g \end{cases}$$

• **Beispiel 164)** Man zeige, dass die Exponentialfunktionen $\{e^{ikt} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthogonalsystem im $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexwertigen 2π-periodischen stückweise stetigen Funktionen bilden, d.h.

$$\langle e^{ikt}, e^{i\ell t}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\overline{e^{i\ell t}} dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-i\ell t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ 2\pi, & k = \ell \end{cases}$$

und leite daraus die Orthogonalität von $\cos(mt)$ und $\sin(mt)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ her, d.h.

$$\langle \cos mt, \sin nt \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)dt = 0.$$

• **Beispiel 165)** Im Vektorraum V der komplexwertigen 2π-periodischen stückweise stetigen Funktionen gebe man ein geeignetes Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ an, so dass die Exponentialfunktionen $\{u_k(t) = e^{ikt} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem in V bilden (vergleiche mit Beispiel 164). Aus der allgemeinen Bessel'schen Ungleichung

$$\sum_k |\langle f, u_k \rangle|^2 \le \|f\|^2$$

leite man dann die Bessel'sche Ungleichung für komplexe Fourierreihen her.

• **Beispiel 166)** Sei $f(t)$ eine auf $[0, T]$ stückweise stetige T-periodische Funktion $f(t)$. Man zeige, dass dann für die zu $f(t)$ gehörende Fourierreihe

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \sim f(t)$$

der folgende Verschiebungssatz (Verschiebung im Frequenzbereich) gilt:

$$e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n} e^{ik\omega t}, \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

• **Beispiel 167)** Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = t, \qquad 0 \le t < 2\pi, \ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

• **Beispiel 168)** Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = t^2, \qquad 0 \le t < 2\pi, \ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

• **Beispiel 169)** Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = t^2, \qquad -\pi \le t < \pi, \ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

• **Beispiel 170)** Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = \cos t + |\cos t|.$$

• **Beispiel 171)** Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \sin\frac{t}{2} & \text{für } 0 < t \le \pi \\ 1 + \cos\frac{t}{2} & \text{für } \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π.

• **Beispiel 172)** Sei $f(t)$ die 2π-periodische Rechteckschwingung mit Amplitude 1: Auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ ist $f(t)$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ -1, & \pi \le t < 2\pi, \end{cases}$$

und außerhalb durch 2π-periodische Fortsetzung. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe $S_f(t)$ von $f(t)$ gegeben ist durch

$$S_f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}\sin\big((2n-1)t\big).$$

• **Beispiel 173)** Unter Verwendung der in Beispiel 172 bestimmten Fourierreihe der Rechteckschwingung $f(t)$ bestimme man die Fourierreihe der im Intervall $[0, 2\pi)$ folgendermaßen definierten 2π-periodischen Funktion $g(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \pi, \\ 2\pi - t, & \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

Anmerkung: Man vergleiche $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ mit $g(t)$.

• **Beispiel 174)** Man bestimme die reelle und die komplexe Fourierreihe der 2π-periodischen Cosinusimpuls-Funktion

$$f(t) = \max\{\cos t, 0\} = \frac{1}{2}\big(\cos t + |\cos t|\big).$$

• **Beispiel 175)** Mit Hilfe des Resultats von Beispiel 174 sowie geeigneter Rechenregeln für Fourierreihen bestimme man die Fourierentwicklung für den gleichgerichteten Cosinus $|\cos t|$ und für den gleichgerichteten Sinus $|\sin t|$ jeweils in Sinus-Cosinus-Form und in Exponentialform.

• **Beispiel 176)** Zeigen Sie, dass für $-\pi/2 < x < \pi/2$ die folgende Identität gilt:

$$\frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \frac{\cos 9x}{7\cdot 9\cdot 11} + \cdots = \frac{\pi}{8}\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos x$$

Gilt diese Identität auch in einem Intervall $(-a, a)$ mit $a > \pi/2$?
Hinweis: Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion $f(x) = \cos x \cdot |\cos x|$ in eine Fourierreihe.

• **Beispiel 177)** Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = \sin(at)$ ($a \notin \mathbb{Z}$) gegeben auf $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π in ihre reelle Fourierreihe.

• **Beispiel 178)** Die Funktion $f(t) = 1 - t$ für $0 < t < 1$ soll auf dem Intervall $(-1, +1)$ zu einer (a) geraden bzw. (b) ungeraden Funktion erweitert und außerhalb dieses Intervalls mit der Periodenlänge 2 periodisch fortgesetzt werden. Man ermittle die beiden komplexen Fourierreihen.

• **Beispiel 179)** Zeigen Sie, dass eine gerade T-periodische Funktion (d.h. $f(t) = f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung keine Sinusterme enthalten kann.

• **Beispiel 180)** Zeigen Sie, dass eine ungerade T-periodische Funktion (d.h. $f(t) = -f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung keine Cosinusterme enthalten kann.

• **Beispiel 181)** Man zeige: Ist eine 2π-periodische Funktion $f(t)$ gerade, d.h. $f(-t) = f(t)$, dann sind alle Fourierkoeffizienten $b_n = 0$, für $n \geq 1$. Ist $f(t)$ hingegen ungerade, d.h. $f(-t) = -f(t)$, dann sind alle Fourierkoeffizienten $a_n = 0$, für $n \geq 0$.

• **Beispiel 182)** Man zeige: Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten a_n, b_n bzw. c_k einer 2π-periodischen Funktion kann an Stelle des Intervalls $[0, 2\pi]$ auch jedes Intervall der Form $[a, a + 2\pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$ als Integrationsintervall gewählt werden.

• **Beispiel 183)** Wie lautet die reelle Fourierreihe der Funktion $f(t) = \frac{t^2}{\pi^2}$ für $-\pi \le t \le \pi$ und $f(t+2\pi) = f(t)$? Können Sie aus dieser Darstellung die Gültigkeit nachstehender Formeln ableiten?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

• **Beispiel 184)** Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Fourierreihe den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
Hinweis: Man betrachte Beispiel 183.

• **Beispiel 185)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n\ge 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)!}$$

Hinweis: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n)!}$ auf.

• **Beispiel 186)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des $\sin z$,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n\ge 0} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)!}$$

Hinweis: Man fasse die Reihe als Imaginärteil von $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\cos((2n+1)t) + i \sin((2n+1)t)}{(2n+1)!}$ auf.

• **Beispiel 187)** Man entwickle die Funktion

$$g(t) = e^t, \quad 0 \le t < T$$

in eine reine Cosinusreihe, d.h., man bestimme die (gewöhnliche) Fourier-Reihe der $2T$-periodischen Funktion $h(t)$, welche die gerade $2T$-periodische Fortsetzung von $g(t)$ darstellt:

$$h(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \le t < T, \\ g(-t), & -T < t < 0, \end{cases} \qquad h(t+2T) = h(t).$$

• **Beispiel 188)** Man entwickle die Funktion

$$f(t) = \sin t, \quad 0 \le t < \pi$$

in eine Fourier-Cosinusreihe, indem man $f(t)$ gerade auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ fortsetzt, davon die 2π-periodische Fortsetzung betrachtet und für die so erhaltene Funktion $g(t)$ die Fourier-Reihe berechnet.

• **Beispiel 189)** Sei $f(x) = e^{i\beta x}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$, wobei β eine reelle, jedoch keine ganze Zahl ist. Man zeige unter Verwendung der Parseval'schen Gleichung für komplexe Fourier-Reihen, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta - k))}{(\beta - k)^2} = \pi^2.$$

• **Beispiel 190)** Man zeige mit Hilfe des Weierstraß'schen M-Tests (Satz 8.10), dass unter der Voraussetzung $s > 0$ die folgende Reihe gleichmäßig auf $[0, \infty)$ konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-st}(-1)^k u\big(t - \frac{kT}{2}\big).$$

Bemerkung: $u(t)$ bezeichnet die Heavisidefunktion.

• **Beispiel 191)** Man zeige die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1 + 2nx}}$$

im Intervall $[0, \infty)$.

• **Beispiel 192)** Man zeige die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt[n]{1 + x^2}}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

• **Beispiel 193)** Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ gegen eine stetige Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert und berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx.$$

• **Beispiel 194)** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $T > 0$. Untersuchen Sie, ob die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a_n x)$$

auf dem Intervall $[-T, T]$ gleichmäßig konvergiert.

• **Beispiel 195)** Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (1 + nx)^2}$$

für $x \in [0, \infty)$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert und berechnen Sie

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Hinweis: Sie dürfen die folgende für $|x| < 1$ gültige Identität ohne Beweis verwenden:

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

• **Beispiel 196)** Es sei $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

gleichmäßig auf $[-1+\epsilon, 1-\epsilon$ gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Beweisen Sie damit, dass für $|x| < 1$ die folgende Identität gilt:

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

• **Beispiel 197)** Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit Periode 2π in ihre reelle Fourierreihe.

• **Beispiel 198)** Sei $a \notin \mathbb{Z}$. Entwickeln Sie $f(t) = \pi\cos(at)$, $0 \le t < 2\pi$, mit 2π-periodischer Fortsetzung in eine Fourierreihe und beweisen Sie durch geeignete Wahl von t die Identität

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2-4} - \frac{2a}{a^2-9} + \frac{2a}{a^2-16} - \cdots$$

• **Beispiel 199)** Man zeige, dass für die Fouriermatrix F_N, gegeben durch

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

mit $w = e^{2\pi i/N}$, gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = N \cdot E_N.$$

Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die $N \times N$-Einheitsmatrix.

• **Beispiel 200)** Man zeige unter Verwendung von Beispiel 199, dass zwischen den Funktionswerten y_j, $j = 0, \ldots, N-1$ und den Spektralkoeffizienten c_k, $k = 0, \ldots, N-1$ folgende Beziehung gilt, die sogenannte Parsevalsche-Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2.$$

• **Beispiel 201)** Im Vektorraum $V = \mathbb{C}^N$ gebe man ein geeignetes Skalarprodukt $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle$ an, so dass die N Vektoren

$$\left\{ \vec{u}_k = \left(e^{\frac{2\pi i}{N} kj}, j = 0, \ldots, N-1\right), k = 0, \ldots, N-1 \right\}$$

eine Orthonormalbasis in V bilden. Aus der allgemeinen Parseval'schen Gleichung

$$\sum_k |\langle f, u_k \rangle|^2 = \|f\|^2$$

leite man dann die Parseval'sche Gleichung für die DFT her.

• **Beispiel 202)** Man zeige die folgenden Verschiebungsformeln einer diskreten periodischen Funktion $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$ (mit $w = e^{2\pi i/N}$):

$$\begin{aligned} (a)\ \text{Verschiebung im Zeitbereich:} &\qquad (y_{k+n})_k \xrightarrow{DFT} (w^{kn} c_k)_k, \\ (b)\ \text{Verschiebung im Frequenzbereich:} &\qquad (w^{kn} y_k)_k \xrightarrow{DFT} (c_{k-n})_k. \end{aligned}$$

• **Beispiel 203)** Gesucht ist das (eindeutig bestimmte) trigonometrische Polynom

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

von minimalem Grad n, welches im Intervall $[0, 2\pi]$ an den drei Stützstellen $t_j = \frac{2\pi j}{3}$, für $j = 0, 1, 2$, die vorgegebenen Funktionswerte $f(t_j) = y_j$ annimmt:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wie lautet das trigonometrische Polynom in der Sinus-Cosinus-Form?

• **Beispiel 204)** Seien $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ und $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^N$ ihre Spektralwerte. Außerdem bezeichne $(x_k)_k$ die N-periodische Fortsetzung des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sowie $w = e^{2\pi i/N}$. Zeigen Sie, dass für die sogenannte *periodische Faltung* gilt:

$$\mathbf{y} * \mathbf{z} := \left(\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell z_{k-\ell} \right)_k \xrightarrow{DFT} (c_k \cdot d_k)_k$$

• **Beispiel 205)** Berechnen Sie die Spektralkoeffizienten des N-periodischen diskreten Rechteckimpulses $(x_k)_k$ mit $x_0 = x_{N-1} = 1$ und $x_j = 0$ für $j = 1, 2 \ldots, N-2$.

• **Beispiel 206)** Man berechne die Spektralkoeffizienten c_k, $0 \le k \le N-1$, für die diskrete Rechteckfunktion $\vec{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1})^T$, wobei $N = 2M$ als gerade vorausgesetzt wird, mit

$$y_j = \begin{cases} 1, & 0 \le j \le \frac{N}{2} - 1, \\ 0, & \frac{N}{2} \le j \le N-1. \end{cases}$$

Weiters bestimme man den Limes von c_k für $N \to \infty$.

• **Beispiel 207)** Sei N durch 3 teilbar, also $N = 3M$. Man berechne die Spektralkoeffizienten c_k, $0 \le k \le N-1$, für die diskrete N-periodische Funktion, welche durch den Vektor $\mathbf{y} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0)$ beschrieben wird.

• **Beispiel 208)** Man gebe explizit die Fourier-Matrix F_4 und deren Inverse F_4^{-1} zur Diskreten Fourier-Transformation mit $N = 4$ an. Insbesondere führe man damit für den Vektor

$$\vec{y} = (10, 2, 4, 16)^T$$

die DFT und anschließend die IDFT durch.

• **Beispiel 209)** Führen Sie für $\mathbf{c} = (0, 1, 2, 3)$ die schnelle Implementierung der IDFT via FFT-Algorithmus aus.

• **Beispiel 210)** Man betrachte die diskrete N-periodische Funktion, welche durch den Vektor
$\vec{y} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0)^T$ beschrieben wird, wobei N durch 3 teilbar sein muss, also $N = 3M$ mit $M \in \mathbb{N}$ gilt. Man berechne nun die Spektralkoeffizienten c_k, mit $0 \leq k \leq N-1$, von $\vec{y}$.

• **Beispiel 211)** Berechnen Sie das Produkt der beiden Polynome $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ und $q(x) = 4x^3 + x^2 + 2x + 3$ mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation.

• **Beispiel 212)** Wie verläuft die Multiplikation der Polynome $p(x) = 4 - 4x$ und $q(x) = 6 + 2x$ mit Hilfe der Diskreten Fourier-Transformation?
Anleitung: Man repräsentiere $p(x)$ und $q(x)$ durch Vektoren in $\mathbb{C}^4$ und berechne deren Faltung mittels Diskreter Fourier-Transformation mit $N = 4$.

• **Beispiel 213)** Unter der generellen Voraussetzung, dass $f(t)$ absolut integrierbar ist, zeige man folgende Rechenregeln für die Fourier-Transformation ($F(\omega)$ bezeichne die Fourier-Transformierte von $f(t)$).

(a) Streckung: Für $c \neq 0$ gilt:
$$\mathcal{F}\big\{f(ct)\big\} = \frac{1}{|c|} F\Big(\frac{\omega}{c}\Big).$$

(b) Differentiation im Zeitbereich: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar und ist weiters $f'(t)$ Fourier-transformierbar, so gilt:
$$\mathcal{F}\big\{f'(t)\big\} = i\omega F(\omega).$$

• **Beispiel 214)** Unter der generellen Voraussetzung, dass $f(t)$ absolut integrierbar ist, zeige man folgende Rechenregeln für die Fourier-Transformation ($F(\omega)$ bezeichne die Fourier-Transformierte von $f(t)$).

(a) Streckung: Für $c \neq 0$ gilt:
$$\mathcal{F}\big\{f(ct)\big\} = \frac{1}{|c|} F\big(\frac{\omega}{c}\big).$$

(b) Verschiebung im Zeitbereich:
$$\mathcal{F}\big\{f(t-a)\big\} = e^{-i\omega a} F(\omega), \quad \text{für } a \in \mathbb{R}.$$

• **Beispiel 215)** Für die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ beweise man folgende Rechenregeln (falls f absolut integrierbar ist und $\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\omega)$):

$$(a)\ \overline{f(t)} \to \overline{\hat{f}(-\omega)}, \quad (b)\ f(ct) \to \frac{1}{|c|}\hat{f}(\frac{\omega}{c}),\ c \neq 0, \quad (c)\ f(t-\alpha) \to e^{-i\omega\alpha}\hat{f}(\omega),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

• **Beispiel 216)** Berechnen Sie die Spektralfunktion von
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

• **Beispiel 217)** Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

• **Beispiel 218)** Man berechne die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ für den Abklingvorgang (einseitig abfallender Impuls)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\delta t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass $\hat{f}(\omega)$ (als Kurve mit dem Parameter $\omega \geq 0$) einen Halbkreis in der komplexen Ebene um den Mittelpunkt $\frac{1}{2\delta}$ mit Radius $\frac{1}{2\delta}$ beschreibt.

• **Beispiel 219)** Man berechne die Spektralfunktion $\hat{f}(\omega)$ für den Dreiecksimpuls

$$f(t) = \begin{cases} C(1 + \frac{t}{T}), & -T < t < 0, \\ C(1 - \frac{t}{T}), & 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

• **Beispiel 220)** Zeigen Sie: Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, dann kann die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ durch

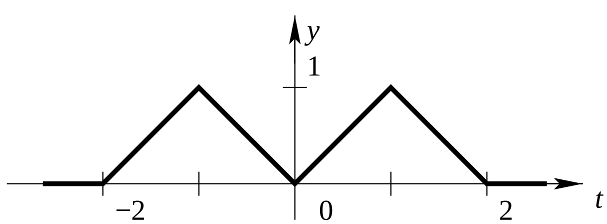
$$F(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t)\, dt$$

berechnet werden.

• **Beispiel 221)** Man zeige: falls $f(t)$ eine ungerade Funktion ist, also $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dann kann die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$F(\omega) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin(\omega t) dt.$$

• **Beispiel 222)** Unter Berücksichtigung von Beispiel 220 berechne man die Fouriertransformierte für die im Buch auf Seite 385 skizzierte Zeitfunktion $y = f(t)$:



• **Beispiel 223)** Man zeige: falls $f(t)$ eine ungerade Funktion ist, also $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dann kann die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$F(\omega) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin(\omega t) dt.$$

• **Beispiel 224)** Man löse mit Hilfe der Fourier-Transformation folgende Integralgleichung vom Fredholm-Typ für $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} x(\tau) d\tau = \frac{1}{1+t^2}.$$

• **Beispiel 225)** Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t, & -1 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

• **Beispiel 226)** Man bestimme die Spektralfunktion und deren Bandbreite für die folgende Funktion:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Wie groß muss die Abtastfrequenz ω_s sein, damit das Abtasttheorem für f anwendbar ist?
Hinweis: Man beachte Beispiel 225.

• **Beispiel 227)** Unter Verwendung des Fourier-Integraltheorems (Satz 8.46) und Beispiel 8.50 (aus dem Buch) zeige man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} e^{-i\omega x} d\omega = \begin{cases} \pi, & |x| < 1, \\ \frac{\pi}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Was liefert das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega$?

• **Beispiel 228)** Man bestimme die Laplacetransformierten der folgenden Funktionen.

(a) e^{6t+2},

(b) $f(t) = 1 + 2t + 3t^2$.

• **Beispiel 229)** Man bestimme die Laplacetransformierten der folgenden Funktionen.

(a) $f(t) = \int\limits_0^t \tau \sin(\tau)\, d\tau$,

(b) $f(t) = \sin^3(t)$.
Anleitung: Man bestimme Konstanten a, b, sodass $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ mit Hilfe der Summensätze oder der Moivre-Formeln.

• **Beispiel 230)** Man bestimme die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

(a) $f(t) = 1{+}2t{+}3t^2$, (b) $g(t) = e^{4+5t}$, (c) $h(t) = e^{i\omega t}$, $h_1(t) = \cos(\omega t)$, $h_2(t) = \sin(\omega t)$.

• **Beispiel 231)** Man beweise folgende Skalierungseigenschaft der Laplace-Transformation (mit $a > 0$):

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)$$

und berechne die Laplace-Transformierten folgender Funktionen:

(a) $t\cos(6t)$,

(b) $t^2\cos(7t)$.

• **Beispiel 232)** Beweisen Sie die beiden Verschiebungssätze

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(s+a) \qquad s\text{-Verschiebung}$$

und

$$\mathcal{L}(f(t-a)\sigma(t-a)) = e^{-as}F(s) \qquad t\text{-Verschiebung},$$

wobei σ die Sprung- oder Heavisidefunktion bezeichnet.

• **Beispiel 233)** Man zeige mittels partieller Integration, dass

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0_+)$$

gilt, wobei $F(s)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$ bezeichnet und $f(0_+)$ für den rechtsseitigen Grenzwert steht. (Die Funktionen $f(t)$ und $f'(t)$ seien Laplace-Transformierbar und $f(t)$ sei stetig auf $\mathbb{R}^+$.)
Durch vollständige Induktion gewinne man daraus die entsprechende Regel für die höheren Ableitungen $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))$.

• **Beispiel 234)** Es sei $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. Zu welcher Funktion ist $F(s) = \frac{1}{(1+as)(1+bs)}$ Laplace-Transformierte? Man löse diese Aufgabe sowohl mittels (a) Partialbruchzerlegung als auch mittels (b) Faltung.

• **Beispiel 235)** Lösen Sie folgende AWP mittels Laplacetransformation.

$$y'' + 3y' + 2y = 6e^{-x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$$

• **Beispiel 236)** Lösen Sie folgende AWP mittels Laplacetransformation.

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh(2x), \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 4.$$

• **Beispiel 237)** Man löse mit Hilfe der Laplace-Transformation die folgende partielle Differentialgleichung unter den vorgegebenen Nebenbedingungen:

$$xu_x + u_t = xt, \quad u(0,t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \quad u(x,0) = 0 \text{ für } x \geq 0.$$

Anleitung: Die Laplace-Transformation bezüglich t liefert für $U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$xU_x + sU = \frac{x}{s^2}.$$

Lösen dieser Differentialgleichung und Berücksichtigen der Anfangswerte liefert nach der Rücktransformation die gesuchte Lösung.

• **Beispiel 238)** Berechnen Sie die folgenden Faltungsprodukte und ihre Laplacetransformierten.

(a) $1 * 2$,

(b) $e^t * e^{2t}$.

• **Beispiel 239)** Berechnen Sie die folgenden Faltungsprodukte und ihre Laplacetransformierten.

(*a*) $\sin t * \cos 2t$,

(*b*) $u(t-1) * t$.

Mit $u(t)$ wird die Heavisidefunktion bezeichnet.

• **Beispiel 240)** Man löse die Integralgleichung:

$$x(t) = t^2 + \int_0^t x(y) \sin(t-y) dy.$$

• **Beispiel 241)** Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformierten die folgende Differential-Integralgleichung.

$$\dot{x}(t) + \int_0^t x(\tau) \cosh(t-\tau)\, d\tau = 0, \quad x(0) = 1.$$

Bemerkung: $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

• **Beispiel 242)** Man löse mit Hilfe der L-Transformation folgendes AWP (lineare Dgl. mit nichtkonstanten Koeffizienten):

$$y'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1.$$

Anmerkung: Durch die L-Transformation erhält man im Bildbereich eine lineare Dgl. 1. Ordnung. Die in der allgemeinen Lösung auftretende Konstante bestimme man dadurch, dass $Y(s)$ die Laplace-Transformierte der L-transformierbaren Fkt. $y(t)$ sein soll und daher $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ gelten muss.

• **Beispiel 243)** Zeigen Sie: Ist $f(t)$ eine periodische Funktion mit Periode p, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $f(t+p) = f(t)$, dann gilt

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt.$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{np}^{(n+1)p} f(t)e^{-st}\, dt$ und substituieren Sie in geeigneter Weise.

• **Beispiel 244)** Man berechne folgende Laplace-Urbilder:

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+3}{s(s-1)(s+2)}\right)$,

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s-1}{s^2+2s-8}\right)$,

(*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s+7}{s^2-2s+5}\right)$,

(*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-7s}}{(s+3)^3}\right)$.

• **Beispiel 245)** Man betrachtet einen RLC-Reihenschwingkreis unter konstanter Spannung $U(t) = 300$ Volt. Die Werte sind dabei $R = 160$ Ohm für den Widerstand, $L = 2$ Henry für die Induktivität und $C = 0.02$ Farad für die Kapazität. Man schreibe die entsprechende Differentialgleichung 2. Ordnung für die Ladung $Q(t)$ und löse sie mit Hilfe der Laplace-Transformation (Strom und Ladung sind bei $t = 0$ als null anzunehmen). Man zeichne anschließend den Strom $j(t)$ für $t \geq 0$.

• **Beispiel 246)** Man löse Beispiel 245, wenn der Schwingkreis von der oszillierenden Spannung $U(t) = 100\sin(3t)$ angeregt wird. Man zeige somit, dass sich der Strom $j(t)$ für große Zeiten annähernd wie die oszillierende Funktion $A\sin(3t+\phi)$ verhält, wo A und ϕ zu bestimmen sind.

• **Beispiel 247)** Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplacetransformation.

$$xy'' + y' + 2xy = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Bemerkung: Die Formel $\mathcal{L}(J_0(at)) = 1/\sqrt{z^2+a^2}$ darf ohne Beweis verwendet werden.

• **Beispiel 248)** Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplacetransformation.

$$\begin{aligned} y_1' + 2y_2 &= e^x, \\ y_2' + 2y_1 &= e^{-x}, \end{aligned} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0.$$

• **Beispiel 249)** Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplacetransformation.

$$\begin{aligned} y_1'' + y_2' + 3y_1 &= 1, \\ y_2'' - 4y_1' + 3y_2 &= 0, \end{aligned} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1'(0) = y_2'(0) = 0.$$

• **Beispiel 250)** Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplacetransformation.

$$y'' + 4y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 < t \leq \pi \\ 0 \text{ für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

und periodischer Fortsetzung, also $f(t+2\pi) = f(t)$.

• **Beispiel 251)** Zeigen Sie, dass die Laplacetransformierte $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \quad 0 \leq t < \log\log 3 \\ (-1)^n e^{e^t/2} & \text{für } \log\log n \leq t < \log\log(n+1) \end{cases}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ existiert. $F(s)$ muss nicht berechnet werden.
Bemerkung: $\log x$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus von x.
Hinweis: Spalten Sie das Laplace-Integral in geeigneter Weise auf, sodass eine Reihe entsteht, auf die das Leibnizkriterium anwendbar wird.

• **Beispiel 252)** Man bestimme die Urbilder $f(t)$ der angegebenen Laplace-Transformierten $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$:

(*a*) $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$,

(*b*) $F(s) = \frac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s}$.

Anmerkung: Man beachte $-\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\}$ resp. betrachte die Laplace-Transformierte der Heavisidefunktion.

• **Beispiel 253)** Man bestimme eine Folge $(f_k)_{k\geq 0}$, sodass die z-Transformierte $F(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\}$ folgendermaßen gegeben ist:

$$\mathcal{Z}\{(f_k)\} = \frac{8z^2 - 19z}{(z-2)(z-3)}.$$

• **Beispiel 254)** Man bestimme eine Folge $(f_k)_{k\geq 0}$, sodass die z-Transformierte $F(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\}$ folgendermaßen gegeben ist:

$$\mathcal{Z}\{(f_k)\} = \frac{-8z^2 - 26z}{(z-2)(z-3)}.$$

• **Beispiel 255)** Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

• **Beispiel 256)** Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Beispiel 257)** Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

• **Beispiel 258)** Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

• **Beispiel 259)** Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ -4 & -6 & -12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

• **Beispiel 260)** Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ -6 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

• **Beispiel 261)** Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 1 \\ 2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

• **Beispiel 262)** Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A sowie zu jedem Eigenwert alle Eigenvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

• **Beispiel 263)** Man verwende die Methode der erzeugenden Funktionen zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung $x_{n+1} - x_n + 5 = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

• **Beispiel 264)** Man finde die Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$ zu den Anfangsbedingungen $x_0 = 2$ und $x_1 = 5$ mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen.

• **Beispiel 265)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1$.

• **Beispiel 266)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 5$.

• **Beispiel 267)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

• **Beispiel 268)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n = 5a_{n-1} + 2^{n-1} - 6n5^n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

• **Beispiel 269)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n = 2a_{n-1} + (1 + 2^n)^2$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

• **Beispiel 270)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 1 + \sin(2n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = -1$.

• **Beispiel 271)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n - a_{n-1} + 2a_{n-2} = 1 + \cos(2n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$.

• **Beispiel 272)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n - a_{n-2} = \sin(n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 7$, $a_1 = -12$.

• **Beispiel 273)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (n^2 + 3n - 4)3^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 10$, $a_1 = -7$.

• **Beispiel 274)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (3n - 10)2^{n+2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

• **Beispiel 275)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = 1$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = a_2 = -1$.

• **Beispiel 276)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = n^2 2^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

• **Beispiel 277)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^{2n-2} - n^2 5^{n+3}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

• **Beispiel 278)** Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen: $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 2^n - 3(-1)^n$ $(n \geq 3)$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

• **Beispiel 279)** Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 3a_n + 3b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 1$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

• **Beispiel 280)** Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + 4b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 2$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

• **Beispiel 281)** Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_g(x) = \sum_{k\geq 0} a_{2k} x^{2k}$ aus.

• **Beispiel 282)** Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_u(x) = \sum_{k\geq 0} a_{2k+1} x^{2k+1}$ aus.

• **Beispiel 283)** Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Man drücke $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

• **Beispiel 284)** Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und $b_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$. Man drücke $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

• **Beispiel 285)** Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$: $a_n = n^2 + 2^n$.

• **Beispiel 286)** Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$: $a_n = n + n3^n$.

• **Beispiel 287)** Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$: $a_n = n(n-1) + (-1)^n$.

• **Beispiel 288)** Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$: $a_n = n(-1)^n + 2^{-n}$.

• **Beispiel 289)** Man bestimme mit Hilfe erzeugender Funktionen: $s_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)$.

• **Beispiel 290)** Man bestimme mit Hilfe erzeugender Funktionen: $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

• **Beispiel 291)** Man löse die Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x-y}$ mit der Isoklinenmethode.

• **Beispiel 292)** Man bestätige, dass die Funktionen

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}, \ C \in \mathbb{R}, \quad \text{sowie} \quad N = 0$$

Lösungen der logistischen Differentialgleichung $N'(t) = rN(1 - \frac{N}{K})$ sind. Man berechne und skizziere jene Lösungsfunktion, welche die Anfangsbedingung $N(0) = \frac{K}{10}$ erfüllt.

• **Beispiel 293)** Man stelle zu der Kurvenschar

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$$

mit dem „Scharparameter“ c eine Differentialgleichung auf, welche alle Funktionen der Schar als Lösungskurven besitzt.

• **Beispiel 294)** Man bestimme die Differentialgleichung der Kurvenscharen $x^2 + y^2 = C$ und $y = Ce^{x/C}$.

• **Beispiel 295)** Man betrachte die Kurvenschar $\Phi(x, y, C) = y - Cx^2 - C^2$, $C \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung, die diese Kurvenschar als allgemeine Lösung besitzt.

(b) Weisen Sie nach, dass die Einhüllende dieser Kurvenschar ebenfalls Lösung dieser Differentialgleichung ist. Die Einhüllende erhält man durch Elimination von C aus den Gleichungen

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x, y, C) = 0$$

• **Beispiel 296)** Man beweise das Lemma von Gronwall: Sei $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiters gelte für alle $x \in [a, b]$ die Ungleichung

$$0 \leq \phi(x) \leq C + L \int_a^x \phi(t)\, dt$$

mit $C, L \geq 0$. Dann gilt für alle $x \in [a, b]$

$$\phi(x) \leq Ce^{L(x-a)}.$$

• **Beispiel 297)** Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes:
Ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach y differenzierbar, dann genügt f in jedem Rechteck $R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, das ganz in G liegt, einer L-Bedingung (bezüglich y) mit L-Konstanten $L = \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in R\}$.

• **Beispiel 298)** Man zeige, dass die Funktion $f(x, y) = 5|\cos(\pi y)| + x^2$ in $G = \mathbb{R}^2$ einer L-Bedingung genügt und gebe eine L-Konstante an.

• **Beispiel 299)** Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y' = y.$$

Für welche Anfangswerte von (x_0, y_0) ist das zugehörige AWP $y(x_0) = y_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar? Welche Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dabei verletzt?

• **Beispiel 300)** Für welche Werte von y_0 ist das AWP $\quad xy' + 2y = 3x, \quad y(0) = y_0$ lösbar? Geben Sie für diese Werte jeweils die Lösung an.

• **Beispiel 301)** Vom neuesten Modell eines Mobiltelefonproduzenten werden im Weihnachtsgeschäft 3000 Stück abgesetzt, nach 12 Monaten sind davon nur mehr 2820 Stück in Betrieb. Unter der Annahme, dass die monatliche Ausscheidungsrate proportional zur Nutzungsdauer ist, bestimme man die Anzahl $y(t)$ der in Betrieb stehenden Mobiltelefone (von den ursprünglich 3000 Stück) in Abhängigkeit von ihrer Verwendungsdauer t, sowie die längste Nutzungsdauer.

• **Beispiel 302)** Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (a) &\quad y'' - 8y' - 20y = 0, \\ (b) &\quad y'' + 8y' + 16y = 0, \\ (c) &\quad y'' - 8y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

• **Beispiel 303)** Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 6y' - 27y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 6y' + 9y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 6y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

• **Beispiel 304)** Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 12y' + 36y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 12y' + 60y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 12y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

• **Beispiel 305)** Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 10y' + 100y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 10y' + 16y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 10y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

• **Beispiel 306)** Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = 0$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

• **Beispiel 307)** Man löse das AWP

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

• **Beispiel 308)** Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - y' - 2y = x$.

• **Beispiel 309)** Man löse das AWP

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \quad y(0) = -9, \ y'(0) = 6$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

• **Beispiel 310)** Man löse das AWP

$$y'' - 8y' + 16y = e^{3x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

• **Beispiel 311)** Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + 3y = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0,$$

(a) mit Hilfe der Ansatzmethode,

(b) mit Hilfe der Laplace-Transformation.

• **Beispiel 312)** Man bestimme die Lösung des folgenden linearen Anfangswertproblems mittels Laplace-Transformation:

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh(2x), \quad y(0) = y'(0) = 0, \ y''(0) = 4.$$

• **Beispiel 313)** Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 2y' = e^x$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

• **Beispiel 314)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $4x\,dy - y\,dx = x^2\,dy$.

• **Beispiel 315)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $(1+2y)\,dx - (4-x)\,dy = 0$.

• **Beispiel 316)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $\cos y\,dx + (1-e^{-x})\sin y\,dy = 0$ (für $x = 0$ sei $y = \pi/2$).

• **Beispiel 317)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $y' - y\tan x = 0$.

• **Beispiel 318)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

• **Beispiel 319)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $y' + y\cos x = \sin x\cos x$, $y(0) = 1$.

• **Beispiel 320)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

• **Beispiel 321)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $y'' - 3y' - 4y = 2x$.

• **Beispiel 322)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $y''' - 7y' + 6y = 1$.

• **Beispiel 323)** Man löse die folgende Differentialgleichung: $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$

• **Beispiel 324)** Man löse die exakte Differentialgleichung $(x+y+1)\,dx - (y-x+3)\,dy = 0$.

• **Beispiel 325)** Man löse die exakte Differentialgleichung $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)\,dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\,dy = 0$.

• **Beispiel 326)** Man löse die exakte Differentialgleichung $(4x^3y^3 + \frac{1}{x})\,dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y})\,dy = 0$.

• **Beispiel 327)** Man löse die exakte Differentialgleichung $\big(\cos y + y\cos x\big) + \big(\sin x - x\sin y\big)y'(x) = 0$. (Eine implizite Gleichung für y genügt.)

• **Beispiel 328)** Man löse die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen: $4x\,dy - y\,dx = x^2\,dy$.

• **Beispiel 329)** Man löse die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen: $(1 + 2y)\,dx - (4-x)\,dy = 0$.

• **Beispiel 330)** Man löse die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen: $\cos y\,dx + (1-e^{-x})\sin y\,dy = 0$ (für $x = 0$ sei $y = \pi/2$).

• **Beispiel 331)** Man löse die Differentialgleichung durch Trennung der Variablen: $y' = y\sin x$.

• **Beispiel 332)** Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y - xy' + 1 = 0$

• **Beispiel 333)** Man bestimme die Lösung der Anfangswertaufgabe: $y' + \frac{1}{1-x} y = x^2, \; y(0) = 1$.

• **Beispiel 334)** Man bestimme die Lösung der Anfangswertaufgabe: $y' + \frac{1}{1+2x} y = 2x - 3, \; y(0) = 2$.

• **Beispiel 335)** Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $y' = \sin^2 x \cos^2 y$.

• **Beispiel 336)** Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung: $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

• **Beispiel 337)** Man löse mittels integrierendem Faktor: $(x - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$.

• **Beispiel 338)** Man löse mittels integrierendem Faktor: $y(3-5x^2y)\, dx + x(2-3x^2y)\, dy = 0$, $m(x, y) = x^2 y$.

• **Beispiel 339)** Man löse die homogene Differentialgleichung $(2x+3y)\, dx + (y-x)\, dy = 0$.

• **Beispiel 340)** Man löse die homogene Differentialgleichung $(x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x})\, dx + x \cos \frac{y}{x}\, dy = 0$.

• **Beispiel 341)** Man löse die homogene Differentialgleichung $(x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0$ (für $x = 1$ sei $y = -1$).

• **Beispiel 342)** Man löse die homogene Differentialgleichung $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y)\, dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - y)\, dy = 0$.

• **Beispiel 343)** Man löse die folgende spezielle Differentialgleichung: $y' = -\frac{1}{x} y + \frac{\ln x}{x} y^2$.

• **Beispiel 344)** Man löse die folgende spezielle Differentialgleichung: $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.

• **Beispiel 345)** Man löse die folgende spezielle Differentialgleichung: $y' = y^2 + (1-2x)y + (1 - y + x^2) \quad (y_1 = x)$.

• **Beispiel 346)** Man löse die folgende spezielle Differentialgleichung: $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$ $(y_1 = -x^{-1})$.

• **Beispiel 347)** Man löse die folgende Differentialgleichung mittels speziellem Ansatz: $x^2 y'' - 5xy' + 5y = 0$. Ansatz: $y = x^r$.

• **Beispiel 348)** Man löse die folgende Differentialgleichung mittels speziellem Ansatz: $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$. Ansatz: $y(x) = x^r$.

• **Beispiel 349)** Man löse die folgende Differentialgleichung mittels speziellem Ansatz: $x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0$. Ansatz: $y = x^r$.

• **Beispiel 350)** Man löse die folgende Differentialgleichung mittels speziellem Ansatz: $x^2 y'' - xy' - 3y = x$. Ansatz für $y_h(x)$: $y = x^r$. Zur Bestimmung von $y_p(x)$ versuchen Sie die Standardansätze.

• **Beispiel 351)** Man löse die folgende Differentialgleichung mittels speziellem Ansatz: $x^2 y'' + xy' - 3y = 5x^2$. Ansatz für $y_h(x)$: $y = x^r$. Zur Bestimmung von $y_p(x)$ versuchen Sie die Standardansätze.

• **Beispiel 352)** Man ermittle alle Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2 - 4}{x}$$

durch Trennung der Variablen und anschließender Partialbruchzerlegung.

• **Beispiel 353)** Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\Big(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\Big)dx + \big(y + e^x\big)dy = 0.$$

Hinweis: Die Gleichung kann mit Hilfe eines integrierenden Faktors in eine exakte Gleichung transformiert werden.

• **Beispiel 354)** Man löse die Differentialgleichung

$$(x^2 + y^2)dx + xy\,dy = 0$$

mit Hilfe der Methode des integrierenden Faktors. Weiters bestimme man die Lösung für die für $x = 1$ gilt, dass $y = -1$.

• **Beispiel 355)** Man löse die Bernoulli'sche Differentialgleichung

$$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$$

• **Beispiel 356)** Durch die Transformation $y(x) = z(\ln x)$ und Rückführung auf eine lineare Differentialgleichung bestätige man, dass die allgemeine Lösung der nachstehenden Euler'schen Differentialgleichung

$$x^2y'' - 6y = 12\ln x$$

durch

$$y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = \frac{2}{3}, y'(1) = -1$?

• **Beispiel 357)** Das Wachstum einer Population der Größe $N(t)$ zur Zeit t werde durch die Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = r(K - N) \quad \text{mit} \quad N(0) = N_0$$

beschrieben. Dabei sind r und K positive Parameter. Man löse die Differentialgleichung (a) durch Bestimmung der homogenen Lösung und Variation der Konstanten bzw. (b) durch Auffinden einer partikulären Lösung für die inhomogene Gleichung mittels eines konstanten unbestimmten Ansatzes $N_p(t) = A$. Ferner skizziere man den Graphen der Lösungsfunktion für $r = 0.08$ und $K = 1000$.

• **Beispiel 358)** Ein RCL-Schwingkreis besteht aus einer Induktivität L von 0.05 Henry, einem Widerstand R von 20 Ohm, einem Kondensator C von 100 Mikrofarad sowie einer elektromotorischen Kraft ("Batterie") von $E = E(t) = 100\cos(200t)$, die in Reihe geschaltet sind. Bestimme den Strom $i = i(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ unter der Anfangsbedingung $i(0) = 0$ und der Bedingung, dass für die Ladung $q(t) = \int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau$ gilt mit $q(0) = 0$. Wählen Sie zur Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Ansatzmethode.
Anleitung: Es gilt $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau = E(t)$.

• **Beispiel 359)** Ein elektrischer Schwingkreis enthält einen Widerstand R mit 8 Ohm, der mit einer Induktion L von 0.5 Henry und einer Batterie von $E = E(t)$ Volt in Reihe geschaltet ist. Bei $t = 0$ ist der Strom gleich Null. Berechne den Strom $I = I(t)$ zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ und den maximalen Strom, wenn

1. $E = E(t) = 64$,
2. $E = E(t) = 32e^{-8t}$.

Hinweis: Es muss gelten, dass die Summe der Spannungsabfälle im Schwingkreis = 0 ist (Batterie: negativer Abfall). Der Spannungsabfall beim Widerstand ist RI und bei der Induktion $L\frac{dI}{dt}$.

• **Beispiel 360)** Ein Tank enthält 100 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0.5 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 3 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit derselben Rate aus.

1. Wie viel Salz ist zu einer beliebigen Zeit in dem Tank?
2. Wann enthält der Tank 25 kg Salz?

• **Beispiel 361)** Ein Tank enthält 400 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0.4 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 20 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit der Rate von 12 Liter pro Minute aus. Wie viel Salz enthält der Tank nach einer Stunde ?

• **Beispiel 362)** Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = y\left(4\frac{y}{y+1} - 0.5y - 1\right)$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

• **Beispiel 363)** Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = \Big(\frac{8y}{y+1} - y - 1\Big)y$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

• **Beispiel 364)** Man untersuche auch das globale Lösungsverhalten für die Lösungen der Differentialgleichung aus Beispiel 363 in der (y, y')-Phasenebene.

• **Beispiel 365)** Die Legendre-Dgl. besitzt die Gestalt

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten im folgenden den Fall $m = 1$. Durch Nachrechnen bestätigt man sofort, dass $y(x) = x$ eine Lösung der Gleichung ist. Ermitteln Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = C(x)x$ eine zweite, unabhängige Lösung der Differentialgleichung. Wie sieht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus?

• **Beispiel 366)** Man betrachte die homogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Ermitteln Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = x^r$ eine Lösung $\phi_1(x)$. Eine zweite, unabhängige Lösung $\phi_2(x)$ bestimme man mittels Reduktionsansatz $y(x) = u(x)\phi_1(x)$. Beweisen Sie auch die Unabhängigkeit von $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$.

• **Beispiel 367)** Man betrachte die inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
Hinweis: Aus Beispiel 366 erhält man als Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung $\{\frac{1}{x}, \frac{\log x}{x}\}$.

• **Beispiel 368)** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Euler'schen Differentialgleichung, indem man die Substitution $x = e^t$ und $y(x) = z(\ln(x)) = z(t)$ durchführt und damit die Gleichung auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführt, welche sich anschließend mit den kennengelernten Methoden lösen lässt:

$$x^2y'' + xy' - 3y = 5x^2.$$

• **Beispiel 369)** Lösen Sie folgendes System von Differentialgleichungen, indem Sie diese durch geeignetes Einsetzen auf eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung zurückführen.

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - y_2 + t, \\ y_2' &= \ y_1 - y_2 + t^2, \end{aligned} \qquad y_1(0) = -\frac{3}{8}, \quad y_2(0) = \frac{1}{8}.$$

• **Beispiel 370)** Lösen Sie folgendes System von Differentialgleichungen, indem Sie diese durch geeignetes Einsetzen auf eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung zurückführen.

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 + 4y_3, \\ y_2' &= 8y_1 + 3y_2 + 8y_3, \\ y_3' &= -8y_1 - 5y_3. \end{aligned}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass die erste und dritte Gleichung unabhängig von der zweiten sind.

• **Beispiel 371)** Man betrachte das folgende System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung für $x_1(t), x_2(t)$ mit vorgegebenen Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 5x_2 + 1, \qquad & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + x_2, \qquad & x_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Man löse nun dieses System auf folgende Weise (Eliminationsmethode). Zuerst eliminiere man x_2 aus dem Gleichungssystem: Ableiten von

$$x_2 = \frac{-\dot{x}_1 + x_1 + 1}{5}$$

und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert für x_1 eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Man bestimme die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für x_1 und danach durch Rücksubstitution auch die allgemeine Lösung für x_2. Anpassen an die Anfangsbedingungen liefert schließlich die gesuchte Lösung.

• **Beispiel 372)** Man finde eine Lösung $u(x, y) = f(x)$ von $u_{xx} - u_y = 6x$ und eine Lösung $u(x, y) = g(y)$ von $u_{xx} - u_y = -2y$. Man ermittle mit Hilfe des Superpositionsprinzips eine Lösung von

$$u_{xx} - u_y = 18x + 8y.$$

• **Beispiel 373)** Man löse die partielle Differentialgleichung $au_x + bu_y = 1$ und zeige, dass die Lösung (für $a \neq 0$) in der Form

$$u(x, y) = \frac{1}{a}x + C\big(y - \frac{b}{a}x\big)$$

geschrieben werden kann, wo $C = C(t)$ eine beliebig gewählte, differenzierbare Funktion in einer Variablen ist. Wie lautet die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x = 0, y) = y^2 + 1$?

• **Beispiel 374)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $u_{xx}+u_x+x+y = 1$.

• **Beispiel 375)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $u_{xy} + u_x + x + y = 1, \qquad u(x, 0) = 0, u(0, y) = 0$.

• **Beispiel 376)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $u_{xy}+yu_x = 0, \qquad u(x, x) = x^2, u_x(x, x) = u_y(x, x)$.

• **Beispiel 377)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $xu_x - 2xu_y = u, \qquad u(1, y) = y^2$.

• **Beispiel 378)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $(1+x)u_x-(1+y)u_y = 0$.

• **Beispiel 379)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $yu_x-xu_y = y^2-x^2$.

• **Beispiel 380)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $xyu_x+u_y = xy\cos(x)$.

• **Beispiel 381)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $x^2u_x+yu_y+xyu = 1$.

• **Beispiel 382)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $3u_x+2u_y-xyu = 0$.

• **Beispiel 383)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $u_x + 9u_y - xu = x$.

• **Beispiel 384)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $x^2u_x-2u_y-xu = x^2$.

• **Beispiel 385)** Man löse die folgende partielle Differentialgleichung: $u_x + u_y - u = x$.

• **Beispiel 386)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen.

(a) $xu_x + 2yu_y = 0$,

(b) $xu_x - 2yu_y + u = e^x$,

(c) $xu_x - xyu_y - u = 0$,

(d) $yu_x - 4xu_y = 2xy$.

• **Beispiel 387)** Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichungen aus Beispiel 386 mit folgenden entsprechenden Bedingungen.

(a) $u(x, 1/x) = x$,

(b) $u(1, y) = y^2$,

(c) $u(x, x) = x^2e^x$,

(d) $u(x, 0) = x^4$.

• **Beispiel 388)** Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung:

$$xu_x + 2yu_y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung, welche die folgende Bedingung erfüllt:

$$u\big(x, \frac{1}{x}\big) = x.$$

• **Beispiel 389)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Rumpf-Differentialgleichung:

$$\frac{u_x}{x} + \frac{u_y}{y} + \frac{u_z}{z} = 0.$$

• **Beispiel 390)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung: $9u_{xx} - \frac{1}{4}u_{yy} = \sin x$.

• **Beispiel 391)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung: $12u_x + 4u_y = x$.

• **Beispiel 392)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung: $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 = 0$ (nur reelle Lösungen).

• **Beispiel 393)** Zeigen Sie, dass zum Lösen der partiellen Differentialgleichung

$$au_x + bu_y + cu_z = f(x, y, z), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

die Substitution

$$\xi = x, \qquad \eta = bx - ay, \qquad \zeta = cx - az$$

zum Ziel führt. Bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung der PDG

$$2u_x + 3u_y + 4u_z = e^{x+y+z}.$$

• **Beispiel 394)** Man finde die allgemeine Lösung $u(x, y, z, t)$ der Differentialgleichung

$$u_t = u_x + 2u_y - u_z.$$

Welche Lösung erfüllt $u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 + z^2$?

• **Beispiel 395)** Eliminieren Sie mit Hilfe der Substitution $u(x, y) = v(x, y)e^{\lambda x + \mu y}$ und geeignete Wahl von λ und μ die ersten Ableitungen aus der PDG

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0.$$

Bemerkung: Die entstehende PDG müssen Sie nicht lösen.

• **Beispiel 396)** Eliminieren Sie mit Hilfe der Substitution $u(x, y) = v(x, y)e^{\lambda x + \mu y}$ und geeignete Wahl von λ und μ die ersten Ableitungen aus der PDG

$$u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y.$$

Bemerkung: Die entstehende PDG müssen Sie nicht lösen.

• **Beispiel 397)** Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$xu_x - yu_y = xy.$$

• **Beispiel 398)** Man bestimme die allgemeine Lösung der Rumpf-Differentialgleichung

$$u_x + (y + 2z)u_y + zu_z = 0.$$

• **Beispiel 399)** Man betrachte folgendes System von partiellen Differentialgleichungen für $z = z(x, y)$:

$$yz_x - xz_y = 0, \quad z_{xy} = 0.$$

Man bestimme nun alle Funktionen $z(x, y)$, welche dieses System lösen.
Anleitung: Man bestimme für eine der beiden partiellen Differentialgleichungen die allgemeine Lösung und setze in die andere Gleichung ein.

• **Beispiel 400)** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden linearen partiellen Differentialgleichung für $u(x, y)$:

$$(x^2 + 1)u_x - 2xyu_y + 2xu + 1 = 0.$$

• **Beispiel 401)** Eine Funktion $u(x, y)$ heißt *homogen* vom Grad n, wenn

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x, y)$$

für alle $\lambda > 0$ und x, y gilt. Durch Differenzieren dieser Beziehung nach λ zeige man: falls u eine stetig differenzierbare Funktion ist, genügt sie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$xu_x + yu_y = nu.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung?

• **Beispiel 402)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$yz_x - xz_y + xyz = 0$$

sowie jene Lösung, die die Parabel $z = y^2$ der yz-Ebene enthält.

• **Beispiel 403)** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden quasilinearen Differentialgleichung für $u(x, t)$ (konservative Burgers-Gleichung):

$$u_t + uu_x = 0.$$

• **Beispiel 404)** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden quasilinearen Differentialgleichung für $u(x, y)$:

$$(x + u)u_x + (y + u)u_y + u = 0.$$

Anleitung: Die durch den Ansatz $f(x, y, u) = \text{const}$ erhaltene Rumpf-Differentialgleichung

$$(x + u)f_x + (y + u)f_y - uf_u = 0$$

führt zum System von Phasen-Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{du} = -\frac{x + u}{u}, \quad \frac{dy}{du} = -\frac{y + u}{u},$$

welche beide über die Substitution $v = \frac{x}{u}$ bzw. $v = \frac{y}{u}$ implizit gelöst werden können.

• **Beispiel 405)** Lösen Sie das AWP

$$u_t + u^2 u_x = 0, \qquad u(x, 0) = x.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass eine implizite Lösung der Form $u = f(x - tg(u))$ existiert.

• **Beispiel 406)** Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $uu_x + u^2u_y - z = 0$.

• **Beispiel 407)** Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$.

• **Beispiel 408)** Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $u_x + 3u_y = u^2$.

• **Beispiel 409)** Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $x^2u_x + uu_y = 1,\ u(x, 1-x) = 0,\ x > 0$.

• **Beispiel 410)** Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $u_x + y^2u_y = \cos(u)$.

• **Beispiel 411)** Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $u_x - u_y = u^2$.

• **Beispiel 412)** Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $u_x - y^2u_y = u$.

• **Beispiel 413)** Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $xu_x + u_y = e^u$.

• **Beispiel 414)** Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach „hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch"':

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$,

(b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + u = 0$,

(c) $3u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} - u = 0$,

(d) $u_{xy} + xyu_{yy} + u_y = 0$,

(e) $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$.

• **Beispiel 415)** Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen nach „hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch" und ermittle jeweils eine Normalform:

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$, (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + u = 0$,
(c) $3u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} - u = 0$, (d) $u_{xy} + xyu_{xx} + u_y = 0$.

• **Beispiel 416)** Man bestimme das Gebiet, in dem die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$$

hyperbolisch ist, und bestimme weiters die Normalform.

• **Beispiel 417)** Bestimmen Sie die Normalform der Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y + x + y + 1 = 0.$$

• **Beispiel 418)** Man bringe folgende Gleichung auf Normalform und gebe die allgemeine Lösung an:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

• **Beispiel 419)** Man wähle den Produktansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ und bestimme damit Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$x^2u_{xy} + 3y^2u = 0.$$

• **Beispiel 420)** Man bestimme alle Lösungen der Form $u(x,y) = X(x) + Y(y)$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$9u_{xx} + u_{yy} = 27u.$$

• **Beispiel 421)** Man betrachte die Temperaturverteilung $u(x,t)$ eines Stabes der Länge ℓ, welche an der Stelle $0 \leq x \leq \ell$ zur Zeit $t \geq 0$ durch die homogene Wärmeleitungsgleichung (mit einer vom Material abhängigen Konstanten $\alpha > 0$) beschrieben werden kann:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}.$$

Man löse nun mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ das folgende Rand-Anfangswert-Problem (für eine vorgegebene Funktion $f(x)$):

$$u(x,0) = f(x), \quad \text{für } 0 \leq x \leq \ell, \qquad u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad \text{für } t \geq 0.$$

• **Beispiel 422)** Man berechne die Lösung $u(x,t)$ aus Beispiel 421, wenn $\ell = 2$ und die Anfangsbedingung

$$f(x) = x + (2-2x)H(x-1),$$

lautet. (Zeichnen Sie zuerst die antisymetrische 4-periodische Funktion f; H bezeichnet dabei die Heaviside Funktion.)

• **Beispiel 423)** Man finde Lösungen der Potentialgleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ auf einer Kreisscheibe. Dazu transformiere man die Gleichung auf Polarkoordinaten und bestimme Lösungen der transformierten Gleichung mittels eines Produktansatzes. (Anfangs- oder Randbedingungen sind nicht zu berücksichtigen.)

• **Beispiel 424)** Eine Saite, welche eine Schwingungsgleichung mit Parameter $c = 1$ erfülle, sei in $x = 0$ und $x = \pi$ eingespannt und liege zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Gänze in der x-Achse. Der Geschwindigkeitszustand zu diesem Zeitpunkt sei durch $u_t = \frac{3}{4}(\sin x + \sin(3x))$ beschrieben. Wie sieht die Gestalt der Saite zu den Zeiten $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ aus? Wie lassen sich diese Ergebnisse interpretieren? (Betrachten Sie dazu auch die Geschwindigkeit in diesen Zeitpunkten)

• **Beispiel 425)** Man bestimme mit Hilfe der Bisektion auf drei Dezimalstellen genau die positive Nullstelle der Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall I:$f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$, $I = [\pi/2, \pi]$.

• **Beispiel 426)** Man bestimme mit Hilfe der Bisektion auf drei Dezimalstellen genau die positive Nullstelle der Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall I:$f(x) = \cos x - x$, $I = [0, \pi/2]$.

• **Beispiel 427)** Man bestimme mit Hilfe der Bisektion auf drei Dezimalstellen genau die positive Nullstelle der Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall I:$f(x) = (\tan x)^2 - x$, $|x| < \frac{\pi}{4}$

• **Beispiel 428)** Lösen Sie Beispiel 425 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

• **Beispiel 429)** Lösen Sie Beispiel 426 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

• **Beispiel 430)** Lösen Sie Beispiel 427 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

• **Beispiel 431)** Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $F(x) = x^2 - 1$ im Intervall $[0, 3]$, indem Sie jeweils 3 Schritte der angegebenen Verfahrens durchführen, und vergleichen Sie die Ergebnisse. (a) Bisektion, (b) Regula falsi, (c) Newtonsches Näherungsverfahren (Startwert Intervallende).

• **Beispiel 432)** Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $F(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[1, 3]$. Zeigen Sie dafür jeweils, dass eine Nullstelle von F einem Fixpunkt der angegebenen Funktion entspricht und führen Sie jeweils 3 Schritte der iterativen Fixpunktbestimmung durch. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

(a) $x = f(x) = (x^2 + 3x - 4)/3$ (Startwert Intervallende),

(b) $x = g(x) = (4 + 4x - x^2)/4$ (Startwert Intervallende),

(c) wählen Sie eine andere Funktion $h(x)$, sodass die Gleichung $h(x) = x$ äquivalent ist zur Gleichung $F(x) = 0$.

• **Beispiel 433)** Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $F(x) = x^2 - 1$ im Intervall $[0, 3]$, indem Sie jeweils 3 Schritte der angegebenen Verfahrens durchführen, und vergleichen Sie die Ergebnisse. (a) Iterative Fixpunktbestimmung für $x = f(x) = (x^2 + 3x - 1)/3$ (Startwert Intervallende), (b) iterative Fixpunktbestimmung für $x = g(x) = (1 + 2x - x^2)/2$ (Startwert Intervallende), (c) wählen Sie eine andere Funktion $h(x)$, sodass die Gleichung $h(x) = x$ äquivalent ist zur Gleichung $F(x) = 0$.

• **Beispiel 434)** Man zeige, dass die Funktion $\varphi(x) = x - e^{-x} + \cos x$ eine kontrahierende Abbildung des Intervalls $[1.2, 1.3]$ in sich ist, und berechne den (einzigen) Fixpunkt x^* dieser Funktion im angegebenen Intervall (Genauigkeit: zwei Nachkommastellen).
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass im angegebenen Intervall $\varphi''(x) < 0$ gilt. Was kann man daraus für $\varphi'(x)$ schließen? Benutzen Sie dies, um die Kontraktionseigenschaft zu zeigen!

• **Beispiel 435)** Gesucht ist eine in der Nähe von

$$(a) \quad x_0 = 3, \qquad \text{bzw.} \qquad (b) \quad x_0 = -3$$

gelegenen Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{-x} + x^2 - 10$.

• **Beispiel 436)** Nach welcher Zeit t (in Stunden) erreichen die Betriebskosten

$$B(t) = 10.45t + 0.0016t^2 + 17200\left(1 - e^{-0.0002t}\right)$$

eines Netzwerkrouters den Anschaffungspreis $A = 100.000, -$ € ? Ist die Lösung eindeutig bestimmt?
Anleitung: Man bilde die Funktion $f(t) = B(t) - A$, untersuche deren Monotonieverhalten und bestimme schließlich die gesuchte Nullstelle mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

• **Beispiel 437)** Man zeige, daß $f(x) = x^4 - x - 1$ in $[1, 2]$ eine Nullstelle hat und bestimme diese näherungsweise mit (wenigstens) 4 Schritten der Bisektion und der Regula falsi.

• **Beispiel 438)** Man ermittle für sämtliche Nullstellen der Funktion $f(x) = 3x + 2\sin^2 x + 1$ Näherungen, indem man jeweils 4 Schritte des Newtonverfahrens durchführt.

• **Beispiel 439)** Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $F(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[0, 3]$, indem Sie jeweils 3 Schritte der angegebenen Verfahrens durchführen, und vergleichen Sie die Ergebnisse. (a) Bisektion, (b) Sekanten-Verfahren (Regula falsi in Standardform), (c) Newtonsches Näherungsverfahren (Startwert Intervallende).

• **Beispiel 440)** Man bestimme die Lösungsfolge der beim "Babylonischen Wurzelziehen" auftretenden Iteration

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(wobei $a > 0$, $x_0 > 0$ ist) auf graphischem Weg und zeige, dass stets

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq \sqrt{a}$$

gilt, d.h., die Iterationsfolge (x_n) ist ab $n = 1$ monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt.

• **Beispiel 441)** Man zeige: Für $a > 0$ konvergiert die Iterationsfolge (x_n) gemäß $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ mit $\frac{1}{2a} < x_0 < \frac{3}{2a}$ gegen den Fixpunkt $x^* = \frac{1}{a}$. Diese Iteration stellt somit ein Verfahren zur Division unter ausschließlicher Verwendung von Multiplikationen dar.
Hinweis: Man kann den Fixpunktsatz nicht direkt auf das Intervall $\left[\frac{1}{2a}, \frac{3}{2a}\right]$ anwenden.

• **Beispiel 442)** Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine $m \times n$-Matrix und $\vec{x} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Unter der zu einer Vektornorm $\|\vec{x}\|$ zugehörigen Matrixnorm oder Operatornorm $\|A\|$ versteht man

$$\|A\| = \sum_{\vec{x}\neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|.$$

Man zeige (mindestens zwei der nachfolgenden drei Behauptungen):

(a) Mit der so genannten Betragssummennorm $\|\vec{x}\| = \sum_i |x_i|$ als Vektornorm erhält man die Spaltensummennorm $\|A\| = \max\limits_j \sum_j |a_{ij}|$ als zugehörige Matrixnorm,

(b) der so genannten Maximumsnorm $\|\vec{x}\| = \max\limits_i |x_i|$ entspricht die Zeilensummennorm $\|A\| = \max\limits_i \sum_i |a_{ij}|$,

(c) zur Euklidischen Norm $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ gehört die Spektralnorm $\|A\|$, d.i. die Wurzel des größten Eigenwerts der Matrix $A^T A$.
Anleitung: Die Matrix $A^T A$ ist, wie man zeigen kann, stets symmetrisch, positiv semidefinit, alle ihre Eigenwerte sind reell und nicht negativ, und es gibt eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^n$ aus lauter Eigenvektoren.
Bemerkung: Ist die Matrix A symmetrisch, dann ist die Spektralnorm $\|A\|$ gleich dem betragsmäßig größten Eigenwert von A.

• **Beispiel 443)** Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr}
-0.35x_1 & +1.5x_2 & +122.2x_3 & = & 126 \\
105.7x_1 & -440.9x_2 & -173.7x_3 & = & -1285 \\
21.5x_1 & -101.8x_2 & +33.4x_3 & = & -229
\end{array}$$

mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens (a) ohne Pivotisierung, (b) mit Pivotisierung bei einer Rechengenauigkeit von 4 signifikanten Stellen.

• **Beispiel 444)** Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr}
0.13x_1 & -45.26x_2 & = & -4500 \\
39.16x_1 & -64.32x_2 & = & 1400
\end{array}$$

mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens (a) ohne Pivotisierung, (b) mit Pivotisierung bei einer Rechengenauigkeit von 4 signifikanten Stellen.

• **Beispiel 445)** Man vergleiche die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3.9 & -10.7 \\ -9.3 & 25.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -290 \\ 690 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -291 \\ 689 \end{pmatrix}.$$

Was kann daraus geschlossen werden?

• **Beispiel 446)** Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi, wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, dass das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

• **Beispiel 447)** Man bestimme die Lösung des Gleichungssystems aus Beispiel 446) mit Hilfe des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel.

• **Beispiel 448)** Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi sowie des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel (Startwerte $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, jeweils zwei Schritte), wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, dass das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

• **Beispiel 449)** Man zeige: Die Anzahl der Punktoperationen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten beträgt

(a) $(n^2-1)n!+n$ bei Anwendung der Cramerschen Regel, (Hinweis: Die Auswertung einer $n \times n$-Determinante erfordert $(n-1)n!$ Multiplikationen.)

(b) $\frac{n}{3}(n^2 + 3n - 1)$ beim Eliminationsverfahren von Gauß,

(c) n^2 pro Schritt für das Iterationsverfahren von Jacobi oder Gauß-Seidel.

• **Beispiel 450)** Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) in den Jahren 1950 bis 1990 wieder:

Jahr t	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Bevölkerung $f(t)$	2.5	3	3.6	4.4	5.3	?

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2000.
Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

• **Beispiel 451)** Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) seit dem Jahr 1950 wieder:

Jahr t	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Bevölkerung $f(t)$	2.53	3.04	3.70	4.45	5.31	6.12	6.90

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2020.
Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

• **Beispiel 452)** Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) seit dem Jahr 1950 wieder:

Jahr t	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Bevölkerung $f(t)$	2.54	3.03	3.70	4.46	5.33	6.14	6.96

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2020.
Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

• **Beispiel 453)** Gegeben sind die Wertepaare (x_i, y_i) mit $1 \leq i \leq n$. In manchen Problemstellungen ist von vorneherein bekannt, dass die zugrundeliegende Funktion durch den Ursprung gehen muss. Im Falle der Approximation durch eine Gerade kann man dann den Ansatz $y = bx$ verwenden. Man ermittle nun, wie dabei b gewählt werden muss, wenn man nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgeht. D.h., man minimiere die Quadratsumme

$$Q(b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2.$$

• **Beispiel 454)** Im Rahmen der Polynominterpolation spielt die Vandermonde'sche Matrix

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

eine wichtige Rolle. Man zeige, dass für ihre Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

• **Beispiel 455)** Der Gebrauchswert einer Maschine betrage nach zwei Jahren noch 50%, nach vier Jahren noch 25% des Anschaffungspreises. Man gebe ein Polynom $p(t)$ zweiten Grades als Funktion der Nutzungsdauer t an, das mit diesen empirischen Daten übereinstimmt und für $t = 0$ den Wert 100 (Neuwert mit 100%) annimmt. Ferner vergleiche man die Erfahrungswerte von 70% Gebrauchtwert nach einem Jahr und 35% nach drei Jahren mit den entsprechenden p-Werten.

• **Beispiel 456)** Man bestimme das Interpolationspolynom dritten Grades zu den Interpolationsstellen $(0, 180)$, $(2, 240)$, $(4, 320)$ und $(6, 360)$ durch Lagrange-Interpolation.

• **Beispiel 457)** Man löse das Interpolationsproblem aus Beispiel 456 unter Anwendung des Newtonschen Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Funktionswerte des Interpolationspolynoms an den Stellen $x = 1, 3, 5$?

• **Beispiel 458)** Wie lautet die natürliche kubische Splinefunktion, welche die Wertepaare aus Beispiel 456 interpoliert? Man vergleiche die Funktionswerte für $x = 1, 3, 5$ mit denen des kubischen Interpolationspolynoms.

• **Beispiel 459)** Bestimmen Sie die Lagrange-Polynome $L_i(x)$ und das quadratische Interpolationspolynom für die Datenpunkte

x	1	2	3
y	-1	-2	3

• **Beispiel 460)** Bestimmen Sie die Lagrange-Polynome $L_i(x)$ und das quadratische Interpolationspolynom für die Datenpunkte

x	0	1	4
y	2	-2	1

• **Beispiel 461)** Bestimmen Sie das Interpolationspolynom für die Datenpunkte

x	0	1	2	3
y	1	0	3	2

mit Hilfe der Newton-Interpolation.

• **Beispiel 462)** Mit Hilfe der Sehnentrapezformel berechne man π aus der Gleichung

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Dabei verwende man eine Unterteilung des Integrationsintervalls in 2, 5 und 10 Teilintervalle.

• **Beispiel 463)** Aus der Gleichung in Beispiel 462 berechne man π unte Anwendung (a) der Kepler'schen Fassregel bzw. (b) der Simpson'schen Regel bei Unterteilung des Integrationsintervalls in 10 Teilintervalle.

• **Beispiel 464)** Mit Hilfe der (a) Sehnentrapezregel sowie (b) Simpson'schen Regel berechne man näherungsweise π aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Dabei verwende man eine Unterteilung des Integrationsintervalls bei (a) in 2, 5 und 10 Teilintervalle, bei (b) in 10 Teilintervalle.

• **Beispiel 465)** Man bestimme näherungsweise das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+x^2} \quad dx.$$

• **Beispiel 466)** Mittels der Kepler'schen Fassregel kann das Volumen von Rotationskörpern (z.B. von Fässern) näherungsweise berechnet werden, falls deren Querschnitt an drei Stellen bekannt ist. Man zeige, dass man dabei für (a) den Zylinder, (b) Kegel und (c) Kegelstumpf sowie (d) das Rotationsparaboloid das genaue Volumen erhält.

• **Beispiel 467)** In nachstehender Tabelle sind die Grenzbetriebskosten $k(t)$ einer Maschine bei einer Arbeitsleistung von t Betriebsstunden angegeben. Man bestimme daraus näherungsweise die Gesamtbetriebskosten $K(T) = \int_0^T k(t)dt$ für $T = 100$.

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$k(t)$	0.50	0.67	0.85	1.02	1.18	1.33	1.48	1.60	1.75	1.92	2.12

• **Beispiel 468)** Für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 1 + x - y^3, \; y(0) = 0$$

bestimme man die Lösung an der Stelle $x = 1$ nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren, und zwar für die Schrittweiten (a) $h = 0.25$ sowie (b) $h = 0.1$.

• **Beispiel 469)** Man verbessere die in Beispiel 468 erhaltene Näherungslösung für die Schrittweite $h = 0.25$ durch Anwendung (a) des verbesserten Eulerverfahrens bzw. (b) des Runge-Kutta-Verfahrens.

• **Beispiel 470)** Man finde näherungsweise die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 2xy$ zum Anfangswert $y(0) = 2$ an der Stelle $x = 1$ und vergleiche den erhaltenen Wert mit der exakten Lösung $y(x) = 2 \cdot e^{x^2}$.

• **Beispiel 471)** Man berechne für $y' = x + y^2$ und die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ mit dem Polygonzugverfahren die Werte $y(0.1)$ und $y(0.2)$.

• **Beispiel 472)** Man bestimme für die Differentialgleichung $y' = axy$ mit $a \in \mathbb{R}$ für $a = -2$, $a = -1$ und $a = 1$ je 3 Strecken des Eulerschen Polygonzugs beginnend bei $P(1, 1)$ mit Schrittweite $\Delta x = 1$.

• **Beispiel 473)** Gegeben sei das AWP $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Man berechne die exakte Lösung und ermittle anschließend, wie groß n (Anzahl der Teilintervalle) gewählt werden muss, damit der relative Fehler beim Polygonzugverfahren für $y(x)$ an der Stelle $x = 1$ maximal 15% beträgt.

• **Beispiel 474)** Konstruieren Sie zum AWP $y' = \alpha y$, $y(0) = y_0$ den Eulerschen Polygonzug E_n mit der Schrittweite $h = \xi/n$ auf dem Intervall $[0, \xi]$ (mit einem festen $\xi > 0$)und zeigen Sie, dass $E_n(\xi) \to y_0 e^{\alpha\xi}$ für $n \to \infty$.

• **Beispiel 475)** In Analogie zu Beispiel 474: Konstruieren Sie zum AWP $y' = 1 + y$, $y(0) = y_0$ den Eulerschen Polygonzug E_n mit der Schrittweite $h = \xi/n$ auf dem Intervall $[0, \xi]$ (mit einem festen $\xi > 0$)und zeigen Sie, dass $E_n(\xi) \to y_0 e^{\alpha\xi}$ für $n \to \infty$. Konvergiert nun $E_n(\xi)$ ebenfalls gegen die exakte Lösung der Differentialgleichung?

• **Beispiel 476)** Berechnen Sie vierstellige Runge-Kutta-Näherungswerte y_1, y_2 für die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$, an den Stellen $x_1 = 0.1$ und $x_2 = 0.2$.

• **Beispiel 477)** Man vergleiche das Euler-Verfahren und das Verfahren von Runge-Kutta für das AWP $y' = 1 + \frac{y}{x}, \;\; y(1) = 1$ an der Stelle $x = 1.6$, wobei $n = 3$ gewählt werden soll. Lösen Sie das AWP auch exakt und ermittle jeweils den relativen Fehler für die einzelnen Verfahren.
Anmerkung: Nach Möglichkeit programmiere man die einzelnen Verfahren. Wenn "mit der Hand" gerechnet werden muss, wählen Sie $n = 1$.