Name: **Matrikelnummer/Studienkennzahl:**

Ja-Nein-Fragen

*Bitte tragen Sie in die Kästchen **W** (wahr) oder **F** (falsch) ein. Eine richtige Antwort zählt 2 Punkte, eine falsche 0 Punkte. Eine unbeantwortete Frage zählt 1 Punkt, damit Sie im Mittel keinen Nachteil haben, wenn Sie nicht raten.*

1. Wenn $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ LOOP-programmierbar und streng monoton ist, dann ist $g(y) = \min\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \geq y\}$ primitiv rekursiv. . . . . ☐

2. Die primitiv rekursiven Funktionen bilden die *kleinste* Menge von Funktionen der Form $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, die $0\colon \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $\dot{-}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und die Projektionen $\pi_i^k\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ enthält und unter Zusammensetzung und primitiver Rekursion abgeschlossen ist. . . . . ☐

3. Sei $\mathcal{F}$ die *größte* Menge von Funktionen der Form $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, so dass $0 \in \mathcal{F}$, alle Projektionen $\pi_i^k \in \mathcal{F}$, die zweistellige Funktion $+ \in \mathcal{F}$, und $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen unter Zusammensetzung und primitiver Rekursion. Dann ist auch die Ackermannfunktion in $\mathcal{F}$. ☐

4. Alle Operationen der Struktur $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$ (die Symbole stehen für die üblichen Elemente und zweistelligen Operationen) sind primitiv rekursiv. . . . . ☐

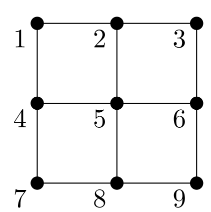
5. Die Cantorsche Paarungsfunktion $J\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, eine Bijektion, erfüllt die Ungleichungen $J(x,y) \leq x$ und $J(x,y) \leq y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. . . . . ☐

6. Sei σ eine beliebige Signatur. Wenn φ eine beliebige σ-Formel ist und $x \in \mathbb{X}$ eine Variable, die in φ frei vorkommt, dann ist $\exists x\varphi$ ein σ-Satz. . . . . ☐

7. Es gibt eine Signatur σ, eine σ-Struktur M und eine σ-Formel φ, so dass gilt: $\hat{\beta}(\varphi) = 1$ für genau eine Belegung $\beta\colon \mathbb{X} \to \underline{M}$. . . . . ☐

8. Es gibt eine Signatur σ, so dass $\exists \overset{0}{\mathsf{x}} \exists \overset{1}{\mathsf{x}} \mathsf{<>>} \overset{0}{\mathsf{x}} \mathsf{>} \overset{1}{\mathsf{x}}$ ein σ-Satz ist. . . . . ☐

9. Wenn $x \in \mathbb{X}$ in den σ-Formeln φ, ψ nicht frei vorkommt, dann ist $\hat{\beta}(\neg\wedge\varphi\exists x\psi) = 1 - \hat{\beta}(\varphi)\hat{\beta}(\psi)$. ☐



Graph G_1

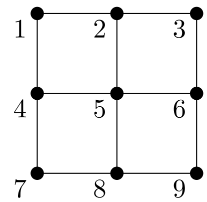
Aufgaben 11 bis 13 beziehen sich auf den abgebildeten Graphen G_1 mit $\underline{G_1} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Wir fassen ihn auf als eine Struktur der Signatur $\sigma_{\mathrm{Gr}} = \{\mathsf{E}\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist. Ein Paar (a,b) von Elementen (Knoten) von G_1 ist genau dann in E^{G_1}, wenn in der Darstellung von G_1 eine Kante zwischen a und b eingezeichnet ist. (E^{G_1} hat also $2 \cdot 12 = 24$ Elemente.)

10. Sei $f(n) = 10 - n$. Für alle $\beta\colon \mathbb{X} \to G_1$ ist auch $f \circ \beta$ eine Belegung in $\underline{G_1}$, und es gilt $\hat{\beta}(\varphi) = \widehat{\beta \circ f}(\varphi)$ für alle σ_{Gr}-Formeln φ. . . . . ☐

11. Für $n \geq 1$ sei φ_n der σ_{Gr}-Satz $\exists \overset{0}{\mathsf{x}} \exists \overset{1}{\mathsf{x}} \cdots \exists \overset{n}{\mathsf{x}} \wedge^n \mathsf{E} \overset{0}{\mathsf{x}} \overset{1}{\mathsf{x}} \mathsf{E} \overset{1}{\mathsf{x}} \overset{2}{\mathsf{x}} \cdots \ \mathsf{E} \overset{n}{\mathsf{x}} \overset{0}{\mathsf{x}}$. Also z.B. $\varphi_1 = \exists \overset{0}{\mathsf{x}} \exists \overset{1}{\mathsf{x}} \wedge \mathsf{E} \overset{0}{\mathsf{x}} \overset{1}{\mathsf{x}} \mathsf{E} \overset{1}{\mathsf{x}} \overset{0}{\mathsf{x}}$ und $\varphi_2 = \exists \overset{0}{\mathsf{x}} \exists \overset{1}{\mathsf{x}} \exists \overset{2}{\mathsf{x}} \wedge\wedge \mathsf{E} \overset{0}{\mathsf{x}} \overset{1}{\mathsf{x}} \mathsf{E} \overset{1}{\mathsf{x}} \overset{2}{\mathsf{x}} \mathsf{E} \overset{2}{\mathsf{x}} \overset{0}{\mathsf{x}}$. Gilt $G_1 \models \varphi_1$? . . . . ☐

Offene Fragen

Eine ganz richtige Antwort zählt 2 Punkte, eine falsche oder gar keine Antwort zählt 0 Punkte.



Graph G_1

Aufgaben 11 bis 13 beziehen sich auf den abgebildeten Graphen G_1 mit $\underline{G}_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Wir fassen ihn auf als eine Struktur der Signatur $\sigma_{\mathrm{Gr}} = \{\mathsf{E}\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist. Ein Paar (a,b) von Elementen (Knoten) von G_1 ist genau dann in E^{G_1}, wenn in der Darstellung von G_1 eine Kante zwischen a und b eingezeichnet ist. (E^{G_1} hat also $2 \cdot 12 = 24$ Elemente.)

12. Für welche $n > 1$ gilt $G_1 \models \varphi_n$? . . . . ____________

13. (Bonusaufgabe) Zeichnen Sie einen Graphen, an dem man erkennt, dass φ_3 *nicht* bedeutet, dass es einen Kreis (Rundweg) der Länge 4 gibt. . . . . ____________

```
output = Zero()
loop input_1 times {
  loop input_2 times {
    output = Inc(output)
  }
  input_2 = Dec(input_1)
}
```

Programm P_1

Aufgaben 14 bis 16 beziehen sich auf das abgebildete LOOP-Programm P_1. Das Programm berechnet eine Funktion $f_1 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

14. Geben Sie $f_1(x,y)$ an für $x = 0$. . . . . ____________

15. Geben Sie $f_1(x,y)$ an für $x = 1$. . . . . ____________

16. Geben Sie $f_1(x,y)$ an für $x \geq 2$. . . . . ____________

Lösungen

1. Wahr, aber nicht offensichtlich: Wenn f LOOP-berechenbar ist, dann auch natürlich auch primitiv rekursiv. Deshalb ist g genau dann primitiv rekursiv, wenn g durch eine primitiv rekursive Funktion nach oben abgeschätzt werden kann. Wegen der strengen Monotonie von f kann g durch $h(x) = x$ nach oben abgeschätzt werden.

2. Falsch: Sei $\mathcal{F}$ die beschriebene Menge von Funktionen. Man kann durch Induktion zeigen, dass jedes $f \in \mathcal{F}$ die Ungleichung $f(x_1, \ldots, x_k) \leq \min(x_1, \ldots, x_k)$ erfüllt, wobei k die Stelligkeit von f ist. Also ist die Nachfolgerfunktion nicht in $\mathcal{F}$.

3. Wahr: $\mathcal{F}$ ist sogar ganz $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{\mathbb{N}^k}$, weil letztere Menge die Bedingungen selbst erfüllt.

4. Wahr: Die Operationen ($0\colon \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $1 = S \circ 0$, Addition, Multiplikation) sind alle als primitiv rekursiv bekannt.

5. Falsch: Es gilt $x, y \leq J(x, y)$. Die gefragten umgekehrten Ungleichungen können für eine Bijektion $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gar nicht gelten.

6. Falsch: Wenn φ mehr als eine freie Variable hat, dann kann $\exists x\varphi$ kein σ-Satz sein.

7. Wahr, denn im Fall $|M| = 1$ gibt es überhaupt nur eine einzige Belegung. (Ganz allgemein gilt: Auf den Variablen, die in φ nicht frei vorkommen, kann man β beliebig ändern, ohne $\hat{\beta}(\varphi)$ zu ändern. Deshalb gab es hier auch für eine falsche Antwort noch 1 Punkt, falls gut begründet sogar $1\frac{1}{2}$.)

8. Wahr: Wenn σ ein einstelliges Operationssymbol $\mathtt{>}$ und ein zweistelliges Relationssymbol $\mathtt{<}$ enthält, dann ist $\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\exists\overset{1}{\mathtt{x}}\mathtt{<>>}\overset{0}{\mathtt{x}}\mathtt{>}\overset{1}{\mathtt{x}}$ ein σ-Satz.

9. Wahr, wie man durch Nachvollziehen von Tarskis Definition der Wahrheit leicht sieht.

10. Wahr, denn f ist ein Isomorphismus (von G_1 mit sich selbst).

11. Wahr, wie z.B. jede Belegung β mit $\beta(\overset{0}{\mathtt{x}}) = 1$ und $\beta(\overset{1}{\mathtt{x}}) = 2$ zeigt. Damit ist nämlich $\beta(\wedge\mathtt{E}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}\mathtt{E}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}) = 1$.

12. Für ungerade n ergibt jede Belegung β mit $\beta(\overset{0}{\mathtt{x}}) = \beta(\overset{2}{\mathtt{x}}) = \ldots = 1$ und $\beta(\overset{1}{\mathtt{x}}) = \beta(\overset{3}{\mathtt{x}}) = \ldots = 2$, dass $\hat{\beta}(\wedge^n\mathtt{E}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}\mathtt{E}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}\cdots\ \mathtt{E}\overset{n}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}) = 1$ und daher auch $\hat{\beta}(\exists\overset{0}{\mathtt{x}}\exists\overset{1}{\mathtt{x}}\cdots\exists\overset{n}{\mathtt{x}}\wedge^n\mathtt{E}\overset{0}{\mathtt{x}}\overset{1}{\mathtt{x}}\mathtt{E}\overset{1}{\mathtt{x}}\overset{2}{\mathtt{x}}\cdots\ \mathtt{E}\overset{n}{\mathtt{x}}\overset{0}{\mathtt{x}}) = 1$ ist. Für gerade n geht es gar nicht, weil immer nur gerade Punkte mit ungeraden Punkten durch eine Kante verbunden sind (und umgekehrt).

13. Das einfachste Beispiel ist ein Graph mit zwei Knoten und einer Kante. Tatsächlich erfüllt aber sogar jeder Graph mit mindestens einer Kante φ_3, unabhängig davon, ob es einen Kreis der Länge 4 gibt. Die Formel sagt nämlich nichts darüber aus, welche der Variablen allenfalls identische Werte haben.

14. $f_1(x, y) = 0$, denn schon die äußere Schleife wird dann gar nicht durchlaufen. (Natürlich ist so etwas wie „`output` $= 0$“ genau genommen keine Antwort auf die Frage!)

15. $f_1(x, y) = y$, denn die äußere Schleife wird dann genau einmal durchlaufen. In ihr wird die innere Schleife genau einmal durchlaufen und erhöht den Wert von `output` von 0 um den Wert von `input_2` (also y) auf y.

16. $f_1(x, y) = y + (x-1)^2$. Nachdem die äußere Schleife einmal durchlaufen wurde, hat `output` den Wert y. Danach wird sie noch weitere $(x-1)$-mal durchlaufen. Dabei hat *jedes mal* `input_2` den Wert $x-1$. Also wird `output` noch $x-1$ mal um $x-1$ erhöht. (Häufiger Fehler: die Annahme, dass in der sechsten Zeile auch der Wert von `input_1` verringert wird. Das gab 1 Punkt Abzug.)