

EINHEIT 9

Die Einheit enthält eine Zusatzaufgabe, siehe Webseite für Details zur Auswirkung auf die Benotung.

Noch offen: Aufgabe 8.4.

Aufgabe 9.1: Mehr zum Halteproblem, many one reducible.

- In Aufgabe 8.3 wurde $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert und gezeigt dass h nicht rekursiv ist. Folgere daraus: $H := \{n : U(n, n) \text{ hält}\}$ (die Haltemenge) ist nicht rekursiv.
 H is also die Menge derjenigen Programme (=source-codes) n die auf Input n halten.
Hinweis: Rekursive Funktionen sind abgeschlossen unter rekursiven Fallunterscheidungen.
- Sei $H' := \{n : U(n, 0) \text{ hält}\}$, d.h. die Menge derjenigen source-codes n die auf Input 0 halten. Zeige: H' ist nicht rekursiv.
Hinweis: Ansonsten könnten wir H entscheiden: Gegeben n . Um zu sehen ob $n \in H$, transformiere den source-code n zu einem neuen source-code $g(n)$: Dieses neue Programm $g(n)$ überschreibt die input-variable mit n , und danach ewird einfach das alte Programm n ausgeführt. Argumentiere (nicht formal, sondern mit Church-Turing-These) dass g total und rekursiv ist.
- Wir sagen A is many-one-reducible zu B , in Zeichen: $A \leq_m B$ wenn es eine totale rekursive Funktion g gibt so daß $A = g^{-1}(B)$. Zeige: Wenn $A \leq_m B$ und B rekursiv, dann ist A rekursiv.
- Setzte $A =_m B$ wenn $A \leq_m B$ und $B \leq_m A$. Wir haben zuvor gezeigt dass $H \leq_m H'$. Setze $H^* := \{(n, m) : U(n, m) \text{ hält}\}$. Zeige: $H =_m H' =_m H^*$.
Hinweis: Es ist einfach zu sehen dass H^* "stärker" als H' ist; um zu sehen dass $H^* \leq_m H$ verwende im wesentlichen dasselbe Argument wie für $H \leq_m H'$.

(naive) Mengenlehre: Kardinalzahlen. Das folgende ist eine offensichtliche Möglichkeit, um das "zählen" bzw "Grösse vergleichen", das man von endlichen Zahlen kennt, auf unendliche Mengen zu verallgemeinern: Wir definieren $|A| \leq |B|$ durch: es gibt ein $f : A \rightarrow B$ injektiv. Wir definieren $|A| = |B|$ durch: es gibt ein $f : A \rightarrow B$ bijektiv. Klarerweise ist \leq transitiv und reflexiv; und $=$ is eine Äquivalenzrelation.

Die folgenden zwei Aufgaben sind in "Alltagsmathematik" (nicht in formaler Mengenlehre ZFC) zu rechnen:

Aufgabe 9.2 (Zusatzaufgabe): Cantor-Schröder-Bernstein. Zeige: Wenn $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$, dann gilt $|A| = |B|$.

Hinweis: Der Beweis ist nicht ganz trivial, Sie finden ihn in wikipedia etc.

Daraus folgt also: Wenn man eine Kardinalität von A als (Äquivalenz)klasse aller Mengen B mit $|A| = |B|$ definiert, dann ist \leq eine partielle Ordnung der Kardinalitäten. Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu der Tatsache dass diese Ordnung total ist, d.h., dass je zwei Mengen immer vergleichbar sind.

Aufgabe 9.3: Ein paar einfache Rechnungen. Zeigen Sie (manche Gleichheiten können mit Cantor-Schröder-Bernstein einfacher gezeigt werden als explizit):

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}^3| = |\mathbb{Q}|$, ebenfalls von gleicher Kardinalität sind die Menge der geraden Zahlen und die der endlichen Folgen natürlicher Zahlen.
- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$.
- $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N}|$ gilt nicht. (Hinweis: ansonsten gäbe es eine surjektive Funktion von \mathbb{N} nach \mathbb{R} (wieso?), aber das ist wegen Cantorscher Diagonalisierung unmöglich.)

Die Menge der Folgen reeller Zahlen (d.h.: die Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{R}) haben ebenfalls die Größe $|\mathbb{R}|$. (Der Beweis ist einfach, kann aber ausgelassen werden.) Folgere daraus: Die Menge der stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} hat ebenfalls die Größe \mathbb{R} .

Kardinalzahlen in der axiomatischen Mengenlehre. Die folgenden Bemerkungen dienen nur Ihrer Information.

Wir erwähnen kurz die Situation in der axiomatischen Mengenlehre, genauer: im Axiomensystem ZF (ohne Auswahlaxiom AC) bzw ZFC=ZF+AC. Wie schon behauptet kann man in ZF alle "beweisbaren" mathematischen Aussagen ableiten deren Beweis kein AC benötigt; und in ZFC überhaupt alle "beweisbaren" Aussagen.

- Insbesondere kann man in ZF den Cantor Bernstein beweisen.
- Der nächste wesentliche Schritt sind Wohlordnungen: A (oder notationell genauer: (A, \leq)) ist eine Wohlordnung, wenn es eine totale Ordnung ist und jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element hat. Man kann (ohne AC, d.h. in ZF) zeigen: Je zwei Wohlordnungen A und B sind vergleichbar, d.h., entweder ist A (ordnungs)isomorph zu einem Anfangsabschnitt von B oder umgekehrt. Insbesondere erhält man im ersten Fall $|A| \leq |B|$ und im zweiten Fall $|B| \leq |A|$.
- Eine ganz wesentliche Erkenntnis ist dass man für die Größen von Wohlordnungen kanonische Repräsentanten definieren kann, die sogenannten Kardinalzahlen (dazu wird ganz wesentlich das Fundierungsaxiom benötigt). Insbesondere sind Kardinalzahlen immer wohlordenbar und paarweise vergleichbar.
- In ZF kann man weiters beweisen dass AC äquivalent ist zu: Jede Menge kann wohlgeordnet werden (Wohlordnungssatz), in anderer Notation: Jede Menge kann bijektiv auf eine Kardinalzahl abgebildet werden.
- Damit kann man (in ZF) auch zeigen: AC ist äquivalent zu: Je zwei Mengen sind vergleichbar.

Ganz kurz zu AC: Die bekanntesten Äquivalenzen zu AC sind:

- Das Kartesische Produkt nichtleerer Mengen ist nichtleer. (Das ist die Formulierung, die am "harmlosesten" aussieht und AC zu weiter Akzeptanz verholfen hat, zusammen mit den "schönen Folgerungen" unten),
- Das Zornsche Lemma (die Formulierung die in Anwendungen oft am praktischsten ist),
- Der Wohlordnungssatz (der oben erwähnt ist).

AC ist bekanntlich sehr nützlich, es hat "schöne" Folgerungen (die alle ohne AC nicht beweisbar sind):

- Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.
- Jeder Vektorraum hat eine Basis (äquivalent zu AC).
- Hahn-Banach
- Jeder KRE hat ein maximales Ideal.
- Das produkt kompakter Räume ist kompakt.
- ...

AC hat allerdings auch sehr ungute Implikationen:

- Es gibt nicht-Lebesgue messbare Mengen
- Das Hahn-Banach-Paradoxon
- ...