Einheit 7: Mengenlehre

Literatur: Martin Ziegler, Vorlesung über Mathematische Logik, Version 2008-07-22, `http://www.logic.univie.ac.at/~kellner/teaching/2010SS_Grundbegriffe/Ziegler_2008-07.pdf`

Der Bereich der Mengenlehre. Wir haben bereits die first order (=prädikatenlogische) Axiome T_1 der Gruppen kennengelernt. Diese Axiome sind per Definition eine vollständige Beschreibung der Gruppen. Es gibt natürlich viele verschiedene Gruppen, und es gibt daher nicht wirklich ein "kanonisches" Modell für diese Theorie.

Es gibt auch Axiomensystem, die eine fixe Struktur beschreiben. Für $(\mathbb{Q},<)$ geht das vollständig (wie wir bereits gesehen haben): Es gibt eine (endliche) Satzmenge T_2 so daß $T_2 \models \varphi$ gdw $(\mathbb{Q},<) \models \varphi$. Das "kanonische Modell" von T_2 sind die rationalen Punkte. Aber es gibt natürlich andere Modelle, zB $(\mathbb{R},<)$.

Für $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ gibt es ebenfalls eine (unendliche, aber "computerberechenbare", genauer: primitiv rekursive) vollständige Axiomenmenge T_3.

Der erste Unvollständigkeitssatz besagt, dass es für $(\mathbb{N},+,\cdot)$ keine derartige vollständige (computerberechenbare) Satzmenge geben kann. Es gibt aber dennoch sehr vernünftige (und in der Praxis für viele Resultate ausreichende) partielle Axiomatisierungen, zB PA (Peano Arithmetik). Wir haben hier also ein "kanonisches Modell", $\mathbb{N}$, und nur eine unvollständige Beschreibung.

Die Mengenlehre ist nun der Aufbau der gesamten Mathematik als Mengen: Das "kanonische Modell", das wir mit dem (notwendigerweise unvollständigen) Axiomensystem (genannt ZFC) beschreiben wollen, ist die Gesamtheit aller mathematischen Objekte (aufgefasst als Mengen).

Was heisst "aufgefasst als Mengen"? In einer etwas formaleren Darstellung der Mathematik wird z.B. eine Funktion f oft als "Menge von geordneten Paaren" $(x, f(x))$ definiert. Um die Sprache der Mengenlehre weiter zu vereinfachen, können wir nun auch das "geordnete Paar" direkt aus der $\in$-Relation definieren, genauso wie die natürlichen Zahlen $0,1,2,\dots$ sowie die Menge $\mathbb{N}$ (in der Mengenlehre üblicherweise ω genannt), die reellen Zahlen etc etc.

Die Sprache der Mengenlehre besteht dann nur aus dem zweistelligen Relationssymbol $\in$. (Der Grund ist, dass eine möglichst einfache Sprache technische Vorteile hat, es wäre kein Problem und würde nichts ändern wenn man das geordnete Paar (als 2stellige Funktion) oder die Konstanten $0,1,2,\dots$ oder $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ zur Sprache dazugibt.)

Und alles wird als "reine Menge" aufgefasst: Wenn zwei Dinge dieselben Elemente enthalten, dann sind sie gleich. Das entspricht nicht der mathematischen Alltagsauffassung: 13 und 29 sind Zahlen und haben gar keine Elemente. In der Mengenlehre werden wir allerdings diese Zahlen durch Mengen kodieren (siehe unten). Auch das hat nur den Grund, dass es Dinge technisch erleichtert (und sonst nichts Wesentliches ändert).

Das führt schon zum ersten und grundlegenden Axiom der Mengenlehre, dem Extensionalitätsaxiom:

$$(\forall x,y)\Big((\forall t)\,(t \in x \leftrightarrow t \in y) \;\rightarrow\; x = y\Big).$$

Russell Paradoxon. Als zweites Axiom würde man gerne das folgende allgemeine Mengenbildungsschema verwenden: Für jede Eigenschaft gibt es die Menge aller Objekte, die die Eigenschaft haben. Im first order setting entspricht eine "Eigenschaft" einer first oder Formel $\phi(x)$, und wir bekommen nicht ein einzelnes Axiom sondern ein Schema für unendlich viele Axiome: Für jede Formel $\phi(x)$ mit freier Variable x gibt es $\{t : \phi(t)\}$, d.h., es gilt die Folgende Instanz des allgemeine Mengenbildungs-Schemas:

$$(\exists z)(\forall t)(t \in z \leftrightarrow \phi(t))$$

Man sieht aber sofort:

Aufgabe 7.1. Zeigen Sie: das allgemeine Mengenbildungs-Schema ist widersprüchlich.

(Hinweis: Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.)

Aufgabe 7.2. Lesen Sie: Seiten 38–40 des Ziegler Skripts. Formulieren Sie die Existenz von Durchschnitt und Mengendifferenz als first order Satz und beweisen Sie dies Existenz (mithilfe von Aussonderungsaxiomen). Beweisen Sie Lemma 7.2.

Aufgabe 7.3. Lesen Sie: Seiten 41–45 des Ziegler Skriptums (ohne den Abschnitt von *Exkurs* (S. 43) bis Folgerung 7.5). Wir definieren nun $S(x) := x \cup \{x\}$. Formuliere die Existenz von $S(x)$ als first order Formel $\phi(x)$; und beweisen Sie $\forall x \phi(x)$. Zeigen Sie $(\forall x) S(x) \neq x$ (verwenden Sie dazu Fundierung).

Aufgabe 7.4. Wir identifizieren die natürliche Zahl 0 mit der leeren Menge $\varnothing$, 1 mit $S(0)$, 2 mit $S(1) = S(S(0))$ etc. Das Unendlichkeitsaxiom (S 45) besagt: Es gibt ein x das die leere Menge enthält und das unter S abgeschlossen ist. Zeigen Sie (mit Hilfe eines Aussonderungsaxioms): Es gibt ein kleinstes solches x (kleinst in Bezug auf die Teilmengenbeziehung). Bemerkung: Dieses (eindeutige) kleinste x ist die Menge der natürlichen Zahlen und wird ω genannt.

Wie geht es weiter? Man hat nun (auf relativ "künstliche" Weise) das geordnete Paar und die natürlichen Zahlen in der Sprache der Mengenlehre definiert (oder: kodiert).

Man kann auch die Addition und Multiplikation in den natürlichen Zahlen definieren, und das Induktionsprinzip formulieren und beweisen (und allgemeiner für transifinite Ordinalzahlen, d.h. im wesentlichen für Wohlordnungen grösser als ω).

Von hier an ist es dann leicht (und auch sehr natürlich) die gesamte restliche Mathematik ebenfalls in der Mengenelehre zu formulieren: $\mathbb{Q}$ als (bestimmte) Paare von natürlichen Zahlen, $\mathbb{R}$ als (bestimmte) Teilmengen von Q (Dedekindschnitte), $\mathbb{C}$ als paare natürlicher Zahlen, etc.

Das Bemerkenswerte ist nun: sämtliche Mathematik lässt sich nicht nur natürlich in der Sprache der Mengenlehre formulieren, sondern **alles, was heutzutage als mathematischer Beweis anerkannt wird, kann auch aus den ZFC Axiomen (Seite 39 des Ziegler Skriptums) bewiesen werden.**

Wir werden in den nächsten Vorlesunsstunden sehen, dass es für first order (=Prädikatenlogik) ein machinelles Anbleitungskalkül gibt. Wenn man also die Menge der Axiome durch ein Computerprogramm generieren kann, dann kann man auch die Menge der Folgerungen so generieren. ZFC ist jedenfalls primitiv rekursiv; daher ist also die Menge sämtlicher (mit momentan anerkannten mathematischen Methoden) beweisbarer Sätze durch ein einziges Computerprogramm generierbar.

(In der Praxis hat man davon natürlich gar nichts; wenn man so ein Computerprogramm anwirft und wartet bis es einen interessanten Satz beweist braucht man mehr Rechenschritte als das Universum Elementarteilchen hat.)

Bemerkung: Die ZFC Folgerungen sind genau die (momentan) beweisbaren Sätze; nicht die "wahren" Sätze: Wir nehmen ja zB offensichtlich an dass ZFC konsistent ist, und laut dem 2. Unvollständigkeitssatz ist die Konsistenz von ZFC zwar in der Sprache der Mengenlehre formulierbar; aber nicht aus ZFC beweisbar. Das ist also ein Beispiel für einen wahren, aber unbeweisbaren Satz.

Philosophie. "Philosophisch" unklarer ist der Status von Sätzen wie die Kontinuumshypothese (CH): Man kann zeigen dass CH aus ZFC weder beweisbar noch widerlegbar ist (wieder die Konsistenz von ZFC vorausgesetzt). Man kann argumentieren, dass entweder CH oder die Negation von CH wahr sein muss (entsprechend der Tatsache dass ja $\phi \vee \neg\phi$ in der klassischen Logik gilt). Diesem Argument liegt aber in irgendeiner Form die Annahme zugrunde, dass ZFC ein "wohldefiniertes" bzw "kanonisches" Gebilde beschreibt, nämlich das Universum aller mathematischen Objekte; ganz so wie ja zB PA die "kanonsiche" Menge aller natürlichen Zahlen beschreibt.

Während die meisten MathematikerInnen (zumindest implizit) davon ausgehen, dass die Menge der natürlichen Zahlen tatsächlich ein wohldefiniertes, kanonisches Gebilde ist, dass nicht von der persönlichen Meinung des einzelnen abhängt, ist das bei einem "Universum aller Mengen" weniger klar.