Einheit 6

Noch offen: **Aufgabe 5.4.** = Übungsaufgabe 2.5 des Vorlesungsskriptums (S.24).

Logische Folgerung. (First order Logik ist eine andere Bezeichnung von Prädikatenlogik. Ein Satz ist eine (prädikatenlogische) Formel ohne freie Variablen.)

In der Vorlesung wurde schon definiert[1] was es heisst, dass ein Satz φ in einer Struktur M gilt (in Symbolen: $M \vDash \varphi$). Wir sagen auch: "M erfüllt ϕ."

Damit kann man definieren was es heisst dass eine Struktur M eine Theorie (=Satzmenge, manchmal auch Axiomensystem genannt) T erfüllt: $M \vDash T$ heisst einfach $M \vDash \varphi$ für alle $\varphi \in T$. Eine Struktur M die T erfüllt nennt man auch ein T-Modell.

Sei zB T_{Gruppe} die (endliche) Menge der Gruppenaxiome, dann ist eine $\{\cdot\}$-Struktur M ein T_{Gruppe}-Modell genau dann wenn $(M, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Wir sagen: T impliziert den Satz ϕ (in Symbolen: $T \vDash \phi$), wenn gilt: Jedes T-Modell erfüllt φ.

Zum Beispiel: $T_{\text{Gruppe}} \vDash \phi$ gdw ϕ in allen Gruppen gilt.

Wir sagen: Ein Satz ϕ ist logisch allgemeingültig, wenn ϕ in jeder Struktur gilt (d.h., wenn $\varnothing \vDash \phi$).

Aufgabe 6.1. Gib einen (semi)formalen Satz an der besagt dass das Universum mindestens drei Elemente hat. Gib eine (unendliche) Satzmenge T an die genau die unendlichen Strukturen als Modelle hat. Argumentiere (ohne Beweis) dass es keinen Satz ϕ gibt der genau die endlichen Strukturen als Modell hat. (Bemerkung: Es gibt nicht einmal eine unendliche Satzmenge mit dieser Eigenschaft.)

Aufgabe 6.2. Zeige:

- $T \vDash \psi$ genau dann wenn $T \cup \{\neg\psi\}$ kein Modell hat.
- Wenn $T = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ eine endlichs Satzmenge ist, dann ist $T \vDash \psi$ äquivalent dazu dass $(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \to \psi$ logisch allgemeingültig ist.

Ausblick/Bemerkungen. Der folgende Ausblick auf den rest der Vorlesung soll die Einführung der first order logic motivieren; es ist weder für die Übung noch für die Übungsprüfung relevant.

Es gibt sehr viele (und sehr komplizierte) Gruppen, auf den ersten Blick scheint also $T_{\text{Gruppe}} \vDash \phi$ (ϕ gilt in allen Gruppen) ein furchtbar komplizierter Begriff zu sein.

Es stellt sich aber heraus: Es gibt einen "mechanischen", "syntaktischen" Ableitungskalkül (der gewissermassen nur die Struktur der Zeichenketten bearbeitet und sich nicht für den Inhalt der Sätze interessiert), der korrekt und vollständig ist: Die Zeichenkette ϕ lässt sich aus der Menge T von Zeichenketten syntaktisch ableiten (in Zeichen: $T \vdash \phi$) gdw $T \vDash \phi$ gilt. Insbesondere kann man (zB konkret für T_{Gruppe}) ein Computerprogramm schreiben, das (wenn man es "unendlich lang" laufen liesse) die (unendliche) Liste genau derjenigen first-order Sätze generiert, die in allen Gruppen gelten (man kann aber kein Computerprogramm schreiben das *entscheidet* ob ein Satz in allen Gruppen gilt).

Diese bemerkenswerte Tatsache ist der "Gödelsche Vollständigkeitssatz", und macht einen Grossteil der Nützlichkeit der first order Logik aus (und impliziert andrerseits in Verbindung mir dem Unvollständigkeitssatz, dass die Aussagekraft der first order Logik recht beschränkt sein muss).

Man kann also für die formale Sprache der Prädikatenlogik aus einer endlichen (allgemeiner: durch einen Computer generierbare) Axiomenmenge alle Folgerungen mit einem Computerprogramm generieren.

Als ein Beispiel für ein Axiomensystem haben wir bereits die Gruppenaxiome genannt; diese beschreiben "per Definition" die Klasse der Gruppen. Oft interessiert man sich in der Mathematik allerdings für eine ganz bestimmte Struktur (zB die natürlichen Zahlen in elementarer Zahlentheorie, die reellen Zahlen in elementarer Analysis, die "Menge der Punkte und Geraden" in der klassischen Geometrie, etc). Man kann die Untersuchung solcher Strukturen (genauer: deren first order Eigenschaften) in zwei Teilaufgaben trennen: Finde geeignete Axiome (abhängig von der

[1] Und zwar heisst es das was es klarerweise heissen muss, die Definition ist völlig offensichtlich.

Struktur), und führe Beweise ausgehend von den Axiomen (dieser Teil hängt nicht von den Strukturen ab; der vollständige first order Kalkül ist immer der selbe).

Es zeigt sich dass es für einige Strukturen M vollständige Axiomatisierungen gibt (eine endliche oder zumindest computergenerierbare Satzmenge T, so daß $T \vDash \phi$ gdw $M \vDash \phi$; daraus folgt auch — im Unterschied zB zu T_{Gruppe} — dass entscheidbar ist ob $T \vDash \phi$). Beispiele für derart axiomatisierbare Theorien sind:

- $(\mathbb{Q}, <)$ oder $(\mathbb{R}, <)$ (die Theorien sind ja dieselben, und zwar die der DLOs)
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ (ein Resultat von Tarksi)
- klassische Geometrie (Hilbert)
- $(\mathbb{N}, +)$ (die sogenannte Presburger arithmetic). Insbesondere ist es entscheidbar ob ein Satz, der nur + verwendet, in $\mathbb{N}$ gilt oder nicht. (Man aber beweisen dass so ein Entscheidungsferfahren exponentielle Laufzeit haben muss!)

Der Unvollständigkeitssatz besagt allerdings, dass keine Struktur die Zahlentheorie kodieren kann (also insbesondere nicht $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$) auf solche Weise axiomatisierbar sein kann (weil es nicht entscheidbar ist, ob ein Satz ϕ in $\mathbb{N}$ gilt oder nicht.)

Insbesondere ist PA (Peano Arithmetik) keine vollständige Axiomatisierung der elementaren Zahlentheorie (eine Erkenntnis, die damals recht überraschen kam). (In der Praxis ist allerdings der allergrösste Teil der zahlentheoretischen Resutate sehr wohl in PA beweisbar, man kann nur von sehr wenigen zeigen dass man darüber hinausgehende Methoden braucht.)