Bemerkung zu DLOs

- Seit T die im Übungsblatt angegebene Satzmenge "dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte". Eine DLO ist eine $\{<\}$-Struktur, die T erfüllt.
- Zum Beispiel sind $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ DLOs, nicht aber $[0,1]$ oder $\mathbb{Z}$.
- In der Übung wurde gezeigt: (modulo Isomorphie) ist $\mathbb{Q}$ die einzige abzählbare DLO. (Man sagt auch: T is $\aleph_0$ ("Aleph Null") kategorisch.)
- Später in der Vorlesung wird der Vollständigkeitssatz vorgestellt werden. Daraus wird dann folgen: Eine $\aleph_0$ kategorische Theorie ist vollständig, d.h. für jeden $\{<\}$-Satz ϕ kann man aus der Axiomenmenge T entweder ϕ ableiten oder $\neg\phi$.
- Am Ende der Übung wurde erwähnt: T ist nicht $2^{\aleph_0}$-kategorisch; d.h.: Es gibt mehr als eine (modulo Isomorphie) DLO der Grösse $|\mathbb{R}|$. Weil aber T vollständig sind, erfüllen aöll diese (nichtisomorphen) Ordnungen genau dieselben $\{<\}$-Sätze wie $\mathbb{R}$ (und wie $\mathbb{Q}$).

Anders als von mir am Ende der Übung behauptet, waren *alle* der von Ihnen vorgeschlagenen Ordnungen völlig korrekte Beispiele von Ordnungen die nicht isomorph zu $\mathbb{R}$ sind:

Es gilt ja: $(\mathbb{R},<)$ ist die (eindeutige) DLO die eine abzählbare dichte Teilmenge hat und die ordnungs-vollständig ist.

Insbesondere ist also $\mathbb{R}$ ordnungs-vollständig, und eine nicht-vollständige Ordnung X kann daher nicht isomorph zu $\mathbb{R}$ sein, insbesondere:

- $\mathbb{R}+\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{R}+\mathbb{R}$ (was isomorph ist ist zu $\mathbb{R}\setminus\{0\}$),
- die Irrationalzahlen (was isomorph sind zu $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ mit der lexikographischen Ordnung, siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Baire_space_(set_theory)`);
- Jedes nonstandard Modell von $\mathbb{R}$ (der standard Teil hat ja kein Supremum).

(Dagegen sind $(0,1)$ oder $\mathbb{R}+\{x\}+\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathbb{R}$.)

Diese Beispiele zeigen auch dass man relativ leicht eine grosse Menge von paarweise nichtisomorphen DLOs der größe $|\mathbb{R}|$ angeben kann.