Einheit 5

Noch offen: **Aufgabe 2.4.** des Vorlesungsskriptums (S.21).

Aufgabe 5.1. Wir verwenden einige offensichtliche Abkürzungen und Umschreibungen, um die formalen first order Sprache (=Prädikatenlogik 1. Stufe, siehe Definition 2.12 im Skriptum) etwas lesbarer zu machen. So werden wir zB

(a) $(\forall x, z)\ [\ x < z\ \rightarrow\ \exists y\ x < y < z\ ]$

schreiben statt

(a') $\neg\exists\overset{1}{\mathsf{x}}\exists\overset{3}{\mathsf{x}}\neg\rightarrow<\overset{1}{\mathsf{x}}\overset{3}{\mathsf{x}}\exists\overset{2}{\mathsf{x}}\wedge<\overset{1}{\mathsf{x}}\overset{2}{\mathsf{x}}<\overset{2}{\mathsf{x}}\overset{3}{\mathsf{x}}$

Übersetzen Sie die folgenden semi-formalen Formeln in die formale Sprache des Skriptums:

(b) $\forall x\ \exists y\ x > y$
(c) $(\forall x, y)\ [\ x < y \vee x = y \vee y < x\ ]$
(d) $(\forall x, y)\ [\ x + y > x \vee x + y = x\ ]$

Welche der Formeln (a)–(d) gilt in den folgenden Strukturen (I) und (II):

(I) $(\mathbb{N}, <, +)$
(II) $(\mathbb{Q}, <, +)$

(Eigentlich müsste man hier, wie immer, notationell zwischen Relations-symbol und den konkreten Relationen auf $\mathbb{N}$ und auf $\mathbb{Q}$ unterscheiden.)

Aufgabe 5.2. Im folgenden verwende eine semi-formale Sprache.

- Formuliere die Gruppenaxiome in der Sprache er Signatur $\{\cdot\}$.
- Formuliere die Eigenschaft "lineare Ordnung" in der Sprache er Signatur $\{<\}$.

Die first order Sprache ist sehr eingeschränkt und umfasst viele wichtige mathematischen Standard-Begriffe nicht. Anhand des Beispiels der Sprache der Gruppentheorie (Signatur $\{\cdot\}$): Argumentieren Sie dass die folgenden Eigenschaften nicht formulierbar sind (ohne Beweis, zeigen Sie einfach dass die offensichtlichen Formeln nicht in der Definition der first order Sprache enthalten sind):

- Torsionsgruppe (für jedes $x \in G$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$.)
- Einfach (es gibt keine Normalteiler).

Aufgabe 5.3 (etwas schwieriger). Dichte lineare Ordnung. Fixiere die Signatur $\{<\}$. Betrachte folgende Formeln

(1) $(\forall x, y, z)\ [\ (x < y \wedge y < z)\ \rightarrow\ x < z\ ]$
(2) $\neg\exists x\ x < x$
(3) $(\forall x, y)\ [\ x < y\ \wedge\ x = y\ \wedge\ y < x\ ]$
(4) $(\forall x, z)\ [\ x < z\ \rightarrow\ \exists y\ x < y < z\ ]$
(5) $\forall x\ \exists y\ x < y$
(6) $\forall x\ \exists y\ y < x$

(Bemerkung: die formal exakten Formeln (momentan mit einem typo und einer Redundanz) finden Sie in der Aufgabe 4.6 des Skriptums (S. 41).) Bemerkung: (1)–(3) sind genau die Eigenschaften einer linearen Ordnung; (4) nennt man "dicht"; und (5),(6) "ohne Endpunkte".

Eine DLO ist eine $\{<\}$-Struktur, in der die Formeln (1)–(6) gelten.

Zeige: Je zwei abzählbare DLOs sind isomorph.

Hinweis: Seien M und N zwei abzählbare DLOs. Zeige: Jeder partielle endliche Isomorphismus $f : M \rightarrow N$ (Definition?) läßt sich zu einem endlichen partiellen Isomorphismus $f' : M \rightarrow N$ fortsetzen, der ein vorgegebenes Element von M (oder N) im Definitionsbereich (bzw Bildbereich) enthält. Konstruiere auf diese Weise mittels Aufzählungen von M und von N einen Isomorphismus.

Aufgabe 5.4. Übungsaufgabe 2.5 des Skriptums (S.24): Bestimmen Sie die vier Redukte von $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \times, <)$ die isomorph zu Redukten von $(\mathbb{Q}, 0, 1, -, +, \times)$ sind.