Blatt 2

Noch offen: Aufgabe 1.4 von Blatt 1.

Intermezzo: Logik, Diagonalisierung

Aufgabe 2.1: Das Richard Paradoxon. Es gibt nur endlich viele (deutsche) Sätze mit weniger als tausend Buchstaben. Dementsprechend kann man nur endlich viele natürliche Zahlen mit solchen Sätzen definieren. Sei n die kleinste natürliche Zahl, die sich nicht mit einem (deutschen) Satz mit weniger als tausend Buchstaben definieren läßt.

- Warum ist diese Definition von n paradox/nicht sinnvoll? Was ist das offensichtliche Problem?

Bemerkung: Will man in der Mathematik (bzw der math Logik) Begriffe wie Aussage, Definition und definierbar, Beweis und beweisbar etc untersuchen, dann muss man sich (schon aus Gründen der Wohldefiniertheit) auf eine bestimmte formale Sprache (Objektsprache) festlegen. Am verbreitetsten ist dabei Prädikatenlogik, die auch in der Vorlesung vorgestellt wird. Das Richard Paradoxon zeigt sehr schön, dass so eine Festlegung auf eine Objektsprache notwendig ist und notwendigerweise eine wirkliche Einschränkung darstellt: Die Metasprache (eine Sprache, z.B. Deutsch, mit der man über die Objektsprache spricht) kann Begriffe ausdrücken die in der Objektsprache nicht möglich sind (wie zB "definierbar (in der Objektsprache) mit weniger als k Zeichen"); allgemeiner gilt (wie von Tarski gezeigt) dass in der Objektsprache kein Wahrheisprädikat für die Objektsprache formuliert werden kann.

Aufgabe 2.2: Cantorsche Diagonalisierung.

- Zeigen Sie: Die Menge X der Funktionen $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist überabzählbar. (D.h., es gibt keine Aufzählung $X=\{f_0,f_1,\dots\}$.)
- Kann man die LOOP Programme als $P_0,P_1,\dots$ aufzählen? Folgere: Es gibt nicht LOOP-berechenbare Funktionen.
- (Zusatzaufgabe, nicht nötig um Bsp anzukreuzen): Kann man die LOOP Programme "effektiv", d.h., "mit einem Computer" aufzählen? Genauer: Gibt es so eine Aufzählung P_n und ein Computerprogramm M, das auf Input n,m den Output $P_n(m)$ liefert (d.h., den output, den das n-ten Loop Programms auf Input m liefert)? Kann es ein entsprechendes Loop Programm M geben mit $M(n,m)=P_n(m)$?
- (Zusatzaufgabe, nicht nötig um Bsp anzukreuzen): Der vorherige Punkt impliziert, dass Loop Programme nicht den allgemeinen Begriff der Berechenbarkeit umfassen: $P_n(m)$ ist berechenbar, aber nicht Loop berechenbar. Folgt allgemein, dass es gar keinen formalen "universellen Begriff der Berechenbarkeit" geben kann (so wie das Richard Paradoxon zeigt, dass es keinen formalen "universellen Begriff der Definierbarkeit" geben kann)?

Loop Programme und primitiv rekursive Funktionen

Aufgabe 2.3.

- Zeige: Zu jedem LOOP Programm gibt es ein äquivalentes Programm, das nur die Befehle `Inc` und `Zero` (sowie die loop-Schleife) verwendet.

Aufgabe 2.4. Gegeben sei das folgende LOOP Programm:

```
output=Zero()
loop input_1 times {
  loop input_2 times {
    output=Inc(output)
  }
}
```

- Welche Funktion $g:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ wird durch dieses Programm berechnet?