Noch offen: Aufgabe 10.2 und Aufgabe 10.3. von Einheit 10.

Einheit 11: Vollständigkeitssatz

Sei T eine Satzmenge. Definition 4.16 des Skriptums sagt:
$T \vDash \phi$ heißt: Jedes T-Modell erfüllt ϕ, d.h., ϕ folgt (semantisch) aus T.
$T \vdash \phi$ heißt: Aus T läßt sich ϕ syntaktisch ableiten.

Der Vollständigkeitssatz (allenfalls: plus Korrektheitssatz) sagt (Skriptum 4.17):
$T \vDash \phi$ gdw $T \vdash \phi$.

Eine wichtige Folgerung ist der Kompaktheitssatz (4.18):
T hat ein Modell gdw jede endliche Teilmenge von T ein Modell hat.

Man kann den Vollständigkeitssatz auch als Aussage darüber auffassen, wie "schwach" die Formulierungskraft der first order Logik ist.

Dieses Blatt gibt dazu ein paar Beispiele.

Aufgabe 11.1 Endlichkeit ist nicht first order charakterisierbar. Fixiere eine beliebige Signatur σ und eine Satzmenge T.

- Beweise: Wenn T beliebig grosse endliche Modelle hat, dann auch ein unendliches.

(Hinweis: wir kennen bereits Sätze ϕ_n die besagen dass das Universum mindestens n Elemente hat. Verwende den Kompaktheitssatz.)

Damit können wir nun zB leicht zeigen:

- Beweise: Endlichkeit ist nicht first order charakterisierbar. Genauer: Es gibt keine Satzmenge T so dass M ein T-Modell ist genau dann wenn M endlich ist.
- Folgere: Unendlichkeit ist nicht durch einen einzelnen Satz charakerisierbar. Genauer: Es gibt keinen Satz ϕ so dass M ein $\{\phi\}$-Modell ist genau dann wenn M unendlich ist.

Sei nun σ die Signatur nun die der elementaren Gruppentheorie ist. Bekanntlich ist "Gruppe" mit einem Satz charakerisierbar, und "unendliche Gruppe" mit einer unendlichen Satzmenge. Analog wie oben sieht man:

- Zeige: Endliche Gruppen sind nicht (first order) charakerisierbar.
- Zeige: Unendliche Gruppen auch nicht durch einen einzelnen Satz charakerisierbar.

Aufgabe 11.2 Nonstandard-Modelle. Für eine beliebige Signatur σ und eine σ-Struktur M sei $\mathrm{Th}(M)$ die Menge aller σ-Sätze die in M gelten. (Offenbar eine vollständige Theorie, siehe Skriptum 4.9)

Besonders interessant für die Mathematik ist (für zB die Signatur $\{0, 1, +, \cdot, <\}$) die elementare Arithmetik $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$.

- Zeige: Es gibt ein Modell M von $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$, in dem es ein "unendliches" Element x gibt, d.h. $M \vDash x > 1$, $M \vDash x > 1+1$, $M \vDash x > 1+1+1$, etc. Zeige dass so ein M nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ sein kann.

(Hinweis: Erweitere die Signatur um ein neues Konstantensymbol x, erweitere die Theorie um geeignete Sätze und verwende den Kompaktheitssatz).

Bemerkungen. Die Sprache der Prädikatenlogik ist stark genug, dass $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ alle "klassischen" zahlentheoretischen Fragen enthält. Der Unvollständigkeitssatz zeigt weiters, dass $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ nicht rekursiv ist (und dass es daher auch kein konsistentes, rekursiv aufzählbares Axiomensystem T geben kann so daß alle $\phi \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ aud T folgen).

Die Prädikatenlogik ist allerdings nicht stark genug, um $\mathbb{N}$ bis auf Isomorpie zu charakterisieren (das war ja gerade die letzte Aufgabe).

Mit second order Logik kann man $\mathbb{N}$ sehr wohl (mit einem einzigen Satz) bis auf Isomorphie charakterisieren. Der Grund ist dass man in second order logik das allgemeine Induktionsprinzip formulieren kann. Diese endliche 2nd-order-Axiomatisierung von $\mathbb{N}$ zeigt auch, dass es kein Beweiskalkül bzw keinen Vollständigkeitssatz für die second order Logik geben kann: Daraus und aus der endlichen 2nd-order-Axiomatisierung bekäme man dann dass $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ rekursiv wäre, ein Widerspruch zum Unvollständigkeitssatz.