Noch offen: **Aufgabe 9.3.** von Einheit 9.

Einheit 10: Rekursiv aufzählbar

Notation: Für Teilmengen von $\mathbb{N}$ verwenden wir folgende Begriffe austauschbar:

- rekursiv (recursive) = entscheidbar = berechenbar (computable)
- rekursiv aufzählbar (recursively enumerable, r.e.) = aufzählbar = computably enumerable (c.e.)

Berechenbare und aufzählbare Mengen. Im Skriptum wurde definiert:

- Eine Menge A is rekursiv (oder: entscheidbar) genau dann wenn es ein Computerprogramm gibt, das auf Input n ausgibt ob $n \in A$ oder nicht.
- Eine Menge B ist aufzählbar, wenn B die Projektion einer entscheidbaren Menge ist.

Es wurde auch gezeigt dass aufzählbar äquivalent zu folgendem ist (was vielleicht die intuitiv bessere Vorstellung von aufzählbar ist): $B \neq \emptyset$ is aufzählbar genau dann wenn A durch ein Computerprogramm aufgelistet werden kann, d.h., wenn es eine (totale) berechenbare Funktion f gibt so dass A der Wertebereich von f ist.

Aufgabe 10.1. Zeige:

- A ist aufzählbar gdw A der Definitionsbereich einer partiellen berechenbaren Funktion ist. (D.h.: wenn es ein Computerprogramm P gibt, dass auf Input n terminiert wenn $n \in A$ und sonst nicht; d.h., P sagt einem nicht ob n in A ist oder nicht; sondern es bestätigt einem nur wenn n in A ist.)
- A ist aufzählbar gdw A der Bildbereich einer partiellen berechenbaren Funktion ist. (D.h. es gibt ein Computerprogramm das A auflistet, aber dabei für manche Listenplätze gar keinen Wert ausgibt.)
- Wenn f eine monotone totale bereichenbare Funktion ist, dann ist der Bildbereich von f nicht nur aufzählbar, sondern sogar rekursiv. (Detaillierter Beweis nicht nötig, Church-Turing These kann verwendet werden.)

Aufgabe 10.2: Beispiele. (Benutze, wie immer, die Church-Turing These.)

- Wir betrachten die Menge der Polynome (in beliebig vielen Variablen) mit ganzzahligen Koeffizienten. Argumentiere: Die Teilmenge derjenigen Polynome, die eine ganzzahlige Nullstelle haben, ist aufzählbar.
  (Bemerkung: Diese Menge ist nicht rekursiv, das ist der Satz von Matijasevich (1971)).
- Wir betrachten nun die Menge der first order Sätze (zB in der "Universalsignatur" 2.19). Zeige dass die Teilmenge derjenigen Sätze, die ein *endliches* Modell haben, aufzählbar ist. (Bemerkung: sie ist nicht rekursiv, das ist Trakhtenbrot's Theorem (1950))
- Das Halteproblem H ist aufzählbar (und wir haben bereits gesehen: nicht rekursiv).

Aufgabe 10.3: Logik und Berechenbarkeit. Zum Begriff der Allgemeingültigkeit, logische Folgerung und der Notation $S \vDash \phi$ siehe `Übungsblatt 6`.

In der Vorlesung wird gezeigt werden, dass die Menge T_0 der allgemeingültigen Sätze aufzählbar ist (Gödelscher Vollständigkeitssatz (1929)).
Allgemeiner gilt (gleicher Beweis): für jede aufzählbare Axiomenmenge S ist die Menge der aus S folgenden Sätze aufzählbar.
Im allgemeinen sind solche Mengen aber nicht entscheidbar. Insbesondere ist T_0 nicht entscheidbar (Entscheidungsproblem, Church and independently Turing (1936)).[1]
Es gibt allerdings Axiomenmengen S mit entscheidbarer Folgerungsmenge. Im Folgenden ein Beispiel:

---

[1]Die Situation ist genau umgekehrt wenn man endliche Modelle betrachtet. $\vDash \phi$ heisst ϕ gilt in allen (auch unendlichen) Modellen, und ist äquivalent zu: $\neg\phi$ hat kein Modell, d.h.: "$\neg\phi$ ist unerfüllbar".

Wir haben also behauptet: Ob ϕ gültig ist ist aufzählbar; natürlich ist dann auch die Menge der gültigen Sätz der Form $\neg\phi$ aufzählbar, und damit die Menge aller unerfüllbaren Sätze.

Weil es aber nicht entscheidbar ist ob ϕ gültig ist, kann es auch nicht entscheidbar sein ob ein Satz erfüllbar ist; damit kann die Menge der erfüllbaren Sätze nicht einmal aufzählbar sein.

Zur Erinnerung: In `Übungsblatt 5`, Aufgabe 5.3 haben wir DLO definiert, eine endliche Liste von Sätzen der Sprache $\{<\}$ mit der Eigenschaft: Je zwei abzählbare Modelle von DLO sind isomorph (und damit isomorph zu $(\mathbb{Q},<)$).

- Zeige: DLO ist vollständig: Wenn ψ ein Satz der Sprache $\{<\}$ ist, dann gilt entweder DLO$\models \psi$ oder DLO$\models \neg\psi$.
- Zeige: Wenn S eine rekursiv aufzählbare, vollständige Axiomenmenge ist, dann ist $M := \{\phi : S \models \phi\}$ entscheidbar. (Verwende dabei die noch nocht bewiesene Tatsache dass M aufzählbar ist, und argumentiere mit Church-Turing These dass im Fall von vollständigen Theorien dann auch das Komplement von M aufzählbar ist. Dann verwende Bemerkung 3.23 vom Vorlesungsskriptum.)

Bemerkung: Insbesondere ist also entscheidbar, welche Sätze der Sprache $\{<\}$ in $(\mathbb{Q},<)$ gelten.

Weitere Beispiele. Die Theorien $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ und $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ sind ebenfalls alle vollständig endlich axiomatisierbar (und damit entscheidbar). Man kann allerdings zeigen (Fischer und Rabin (1974)) daß jedes Entscheidungsverfahren extrem ineffizient sein muss (worst case Laufzeit hyperexponentiell in der Größe der input-Formel).

Die Theorien $(\mathbb{N},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot,\sin)$ und viele Variationen davon sind nicht rekursiv aufzählbar axiomatisierbar (Gödelscher Unvollständigkeitssatz), oder anders formuliert: Jedes rekursiv aufzählbare Axiomensystem in der Sprache $\{+,\cdot\}$ das aus Sätzen besteht die in $\mathbb{N}$ gelten, muss unvollständig sein. Beispiele dafür sind die Peano Arithmetik (PA).

Wir haben gesehen: Die Menge der endlich-erfüllbaren Sätze ist aufzählbar; und wir haben behauptet sie ist nicht entscheidbar, d.h. die Menge der endlich-unerfüllbaren Sätze, oder "dualisiert" die Menge endlich-allgemeingültigen Sätze ist nicht aufzählbar.