Blatt 1: Codierung

Definitionen.

- Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen (mit 0).
- Für eine Menge A ist A^* die Menge der endlichen Folgen mit Elementen aus A. Insbesondere ist $\mathbb{N}^*$ die Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen. (Ein Element von $\mathbb{N}^*$ ist also von der Form $(x_0, \dots, x_l)$ für ein $l \geq 0$, oder ist die leere Folge ().) Manchmal nennt man A auch Alphabet und die Elemente von A^* Zeichenketten oder strings.
- Ein Code von A^* ist eine injektive Abbildung $\phi : A^* \to \mathbb{N}$. Man nennt $\phi(s)$ auch den "Code von s". (ϕ muss nicht surjektiv sein, d.h. nicht jede natürliche Zahl muss Code einer Folge sein.)

Aufgabe 1.1: Endliches Alphabet.

- Kann man die Dezimalschreibweise als Kodierung der endlichen Folgen von Dezimalziffern auffassen? D.h.: ist die Abbildung $\phi : A^* \to \mathbb{N}$ ein Code, mit $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und $\phi(s_1, \dots, s_l) = \Sigma_{i<l}(s_i 10^{l-i})$?
- Wenn nicht: Wie kann man ϕ modifizieren um eine Codierung zu erhalten?
- Verallgemeinerung: Gegeben eine endliche Menge $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}$. Gib eine Kodierung von A^* an.

Aufgabe 1.2: Unendliches Alphabet.

- Gib eine Codierung $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ an.

  (Hinweis: Primzahlzerlegung. Wie oben beachte aber dass zB die Folgen $(0, 1)$ (1) und $(1, 0)$ alle verschieden sind und daher auf verschiedene natürliche Zahlen abgebildet werden müssen.)

Die obigen Aufgaben (d.h.: ihre naheliegenden Lösungen) verwenden Exponentiation im Folgenden Sinn: Wenn man als Formel z.B. aufschreiben will, dass "die i-te Komponente von $\phi^{-1}(y)$ gleich x ist", benötigt man in dieser Formel Exponentiation. Das will man aus technischen Gründen aber manchmal vermeiden[1]

Aufgabe 1.3: Cantorsche Paarfunktion.

- Zeige: Die Funktion $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, die (n, k) auf $\frac{1}{2}(n + k)(n + k + 1) + k$ abbildet, ist eine Bijektion.

  (Hinweis: Am einfachsten kann man das "graphisch" zeigen, unter Verwendung der als bekannt vorausgesetzten (und mit Induktion leicht zu beweisenden) Formel $\Sigma_{1 \leq i \leq n} i^2 = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Zeichnen Sie $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Gitter auf. Welcher Punkt (d.h., welches Paar von natürlichen Zahlen) wird auf 0 abgebildet, welches auf 1 etc.)

Aufgabe 1.4: Gödelsche β Funktion.

- Sei $\beta(a, b, i)$ die kleinste natürliche Zahl n mit $n \cong a \mod b(i + 1) + 1$. (Anders formuliert: $\beta(a, b, i)$ ist der Rest von $\frac{a}{b(i+1)+1}$.)

  Zeige: für alle Folgen $(x_0, \dots, x_{n-1})$ natürlicher Zahlen gibt es a und b so dass $\beta(a, b, i) = x_i$ für alle $i < n$.

---

[1] Zum Beispiel für den Beweis des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes. Wenn man "ungeschickte" Codierungen verwendet kann man den Unvollständigkeitssatzesnur in einer schwächeren Form beweisen, nämlich für Theorien der Sprache $(+, \cdot, \exp)$.

Hinweise:
(a) Wir brauchen den Chinesischen Restsatz (kann ohne Beweis vorausgesetzt werden): Wenn $m_0, \ldots, m_{k-1}$ paarweise teilerfremd sind, und $r_i < m_i$ dann gibt es ein r mit $r_i \cong r_i \mod m_i$ für alle i.
(b) Sei $b = n! \cdot \max_{i<n}(x_i)$. Zeige: $b \cdot 1 + 1, b \cdot 2 + 2, \ldots, b \cdot (n-1) + 1$ sind paarweise teilerfremd.