Blatt 8 (für den 14. Dezember)

Quantorenelimination in algebraisch abgeschlossenen Körpern

Details zu dem Folgenden findet sich zB in einem Skript von Marker, insbesondere
`http://homepages.math.uic.edu/~marker/orsay/orsay1.pdf` und
`http://homepages.math.uic.edu/~marker/orsay/orsay2.pdf`.

Fixiere die Signatur $\tau = \{0, 1, +, \cdot\}$. Die Theorie ACF_p der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p (p eine Primzahl) ist die Menge der folgenden τ-Sätze:

- Die Körper-Axiome, (Falls nötig, finden Sie eine Auflistung der Körperaxiome in Marker 1.18)
- Für jede natürliche Zahl n den Satz $(\forall a_1, \dots, a_n)(\exists x)x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$. (Dabei ist x^n natürlich nur eine Abkürzung für den Term $(\cdots(x \cdot x)\cdots x)$, d.h. n-fache Multiplikation von x.)
- Falls $p > 0$, den Satz $(\forall x)x + \cdots x = 0$ (p oft). Falls $p = 0$, dann sattdessen die unendliche Satzmenge $\{\neg(\forall x)x + \cdots x = 0(p \text{ oft}) : n \in \omega\}$.

(8A) Kategorizität.

- Zeige: ACF_p ist $\aleph_1$-kategorisch (und κ-kategorisch für alle überabzählbaren κ).
  Hinweis: Sei M ein ACF_p-Modell ist. Klarerweise ist M ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige dass der Primkörper von M F_p (oder eben $\mathbb{Q}$) ist. Verwende folgende Tatsache: Seien M und N zwei algebraisch abgeschlossene Körper mit gleicher Charakteristik und gleichen Transzendenzgrad (über ihrem Primkörper), dann sind M und N isomorph.
- Folgere: ACF_p ist eine vollständige Theorie.
  Hinweis: Sieh Blatt 3 Aufgabe 8.
- Folgere: ACF_p ist (rekursiv) entscheidbar.
- Zeige: ACF_p ist nicht $\aleph_0$-kategorisch.

(Siehe Marker 26–28)

(8B) Kompaktheitssatz. Zeige: Die übliche Anwendung des Kompaktheitssatzes beweist die Äquivalenz von:

- φ gilt in $\mathbb{C}$
- φ gilt in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0
- φ gilt in allen algebraisch abgeschlossenen Körpern der Charakteristik 0
- Es gibt unendlich viele Primzahlen p so dass φ in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p gilt.
- Es gibt ein p_0 so dass für alle Primzahlen $p > 0$ gilt: φ gilt in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p.

(Das ist Marker 28–29.)

Bemerkung: Eine schöne Anwendung ist Marker Th4.11: Sei $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polynomiell, d.h., es gibt Polynome $f_1(X_1 \dots, X_n), \dots, f_n(X_1 \dots, X_n)$ mit $f(a_1, \dots, a_n) = (f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_1(a_1, \dots, a_n))$. Sei f injektiv. Dann ist f bijektiv.

(8C) Quantorenelimination. Wir wissen also bereits dass ACF_p entscheidbar ist. Es gilt sogar etwas stärkeres:

Zu jedem Satz ϕ kann man (rekursiv) einen quantorenfreien Satz ψ konstruieren mit $\mathrm{ACF}_p \vDash \phi \leftrightarrow \psi$.

Bonusaufgabe: Sehen Sie sich die Beweis der Quantorenelimination in algebraisch abgeschlossenen Körpern an (Marker Kapitel 5 und 6) und referieren Sie über den Beweis (ohne Details).