Blatt5

Aufgabe 12: 2nd order logic. Die Sprache der 2nd order logic is definiert wie die 1st oder Sprache, nur hat man folgende zusätzliche Elemente:

- Im Alphabet gibt es auch 2nd order Variablen, nennen wir sie zB P, Q, P_1, P_2, ..., und ein 2nd order quantifizierungs symbol $\forall^{2nd}$.
- Terme sind genauso definiert wie in 1st order.
- Beim Aufbau der 2nd order Formeln hat man alle Atomformeln und Verknüpfungen der first order zur Verfügung. Zusätzlich die atomaren Formeln $P(t)$ für P eine 2nd order Variable und t ein Term; und wenn ϕ eine 2nd order Formel ist, dann auch $(\forall^{2nd} P)\phi$ (2nd order Quantifizierung).

12A: Semantik / Definition der Wahrheit. Eine 2nd order Struktur ist genau dasselbe wie eine first order Struktur. Definiere auf die offensichtliche Weise für eine Struktur M (analog zu Tarski's Wahrheitsdefinition für first order Strukturen): Was ist eine Belegung? (Da muss man sich noch um die freien P's kümmern.) Wann ist eine 2nd order Formel φ in M (unter einer bestimmten Belegung) erfüllt? Der Begriff $M \models \varphi$ ist also für 2nd order genauso einfach und natürlich zu definieren wie für first order; und damit auch der Begriff der semantischen Folgerung $T \vDash \varphi$.

12B: Die natürlichen Zahlen. Fixiere zB die Signatur $\{0, 1, +, \cdot, <\}$. Formuliere das Induktionsaxiom (für die natürlichen Zahlen) als 2nd order Satz. Argumentiere (genaue Details nicht nötig): Es gibt eine endliche Menge T von 2nd order Sätzen, die $\mathbb{N}$ vollständige charakterisieren. D.h.: Wenn M eine Struktur ist die T erfüllt, dann ist M zu $\mathbb{N}$ isomorph. (Hinweis: Wir zeigen: M ist gleich der Evaluierungen aller Terme 0 und $1+\cdots+1$: Ansonsten gibt es ein kleinstes x das nicht dieser Form ist (hier setzen wir voraus dass das 2nd order Induktionsaxiom in T ist), dann muss T beweisen können dass jedes $x \neq 0$ einen Vorgänger y hat mit $x = y + 1$; dieses y wäre also ein Term t und dementsprechend wäre $x = t+1$, ein Widerspruch. Weiters muss T gewährleisten dass die elementaren Gleichungen für konkrete Terme, wie zB $(1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1) = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$ ist etc.)

12C: 2nd order Vollständigkeitssatz. Zeige: Für 2nd order Logik gibt es kein Beweiskalkül (für den der Vollständigkeitssatz gilt). Genauer: Wenn T eine endliche Menge von 2nd order Sätzen ist, dann ist die Menge $\{\varphi : T \vDash \varphi\}$ i.A. nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 13: Schröder Bernstein. Zeige (in "naiver Mengenlehre", ohne Auswahlaxiom): Wenn es eine injektive Funktion $f : A \to B$ und eine injektive Funktion $g : B \to A$ gibt, dann gibt es eine Bijektion $h : A \to B$.

(Hinweis: ein Beweis finden sich zB in wikipedia, unter Cantor–Bernstein–Schroeder theorem.)

Bemerkung: Wir definieren $|A| \leq |B|$ durch: es gibt eine injektive Funktion $f : A \to B$; und $|A| = |B|$ durch: es gibt eine bijektive Funktion $f : A \to B$. Aus dem Satz folgt also: Wenn $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$, dann ist $|A| = |B|$. (Transititivität, d.h. $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |C|$ impliziert $|A| \leq |C|$) ist sowieso trivial, genauso wie $|A| = |B|$ impliziert $|A| \leq |B|$.) Wenn man die Kardinalität von A also als Äquivalenzklasse aller zu A gleichgrossen Mengen definiert, dann sind diese Kardinalitäten eine partielle Ordnung. Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu der Aussage dass diese Ordnung total ist.

Aufgabe 14: Zwei Aufgaben aus dem neuen Kunen.

14A: Exercise I.7.25. Zeige (mit Fundierungsaxiom): Jede transitive Menge, auf der $\in$ die Trichotomie erfüllt, ist eine Ordinalzahl.

14B: Exercise I.7.26. Zeige (mit Fundierungsaxiom): z ist Ordinalzahl gdw z und alle Elemente von z transitiv sind.