Blatt 3 (für den 9. November)

Aufgabe 7. Dichte lineare Ordnung: Back and forth. Eine lineare Ordnung heisst dicht, wenn es zwischen je zwei Punkten $x < y$ einen weiteren $x < z < y$ gibt. Eine lineare Ordnung hat "keine Endpunkte", wenn es weder ein kleinstes noch ein größtes Element gibt.

Eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte nennen wir auch "DLO".

- Finde ein Beispiel für eine abzählbare und einen überabzählbare DLO.

Zwei Ordnungen $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ sind isomorph, wenn es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt so dass $a <_X b$ gdw $f(a) <_Y f(b)$. (D.h. genau dann wenn $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ als first order Strukturen isomorph sind.)

- Zeige: Je zwei abzählbare DLOs sind isomorph.

Hinweis: Seien X und Y zwei abzählbare DLOs. Ein (endlicher) partieller Isomorphismus zwischen X und Y ist ein Isomorphismus zwischen (endlichen) Teilmengen von X und Y. Zeige: Zu jedem endlichen partiellen Isomorphismus f zwischen X und Y und jedem $x \in X$ gibt es einen endlichen partiellen Isomorphismus g_1 mit x im Definitionsbereich. (Und daher gilt auch: für $y \in Y$ gibt es einen e.p.I. g_2 mit y im Zielbereich.) Zähle nun sowohl X als auch Y auf und konstruiere mit Induktion einen Isomorphismus.

Aufgabe 8. Kategorizität.

8A. Definitionen. Sei σ eine Signatur, T eine (konsistente) Theorie (d.h., ein Menge von σ-Sätzen aus der nicht $\neg(\forall x)x = x$ abgeleitet werden kann).

T heißt vollständig, wenn für jeden σ-Satz ϕ gilt: $T \vdash \phi$ oder $T \vdash \neg\phi$.

Sei κ eine (unendliche) Kardinalzahl. T heißt κ-kategorisch, wenn je zwei Modelle der Größe κ isomorph sind.

Zwei σ-Strukturen M und N heissen elementar äquivalent, wenn für jeden σ-Satz ϕ gilt: $M \models \phi$ gdw $N \models \phi$.

Wir nehmen an T hat ein unendliches Modell.

- Zeige: T hat zwei nichtisomorph Modelle. (Hinweis: zwei verschiedene Kardinalitäten.)
- Zeige: T ist vollständig genau dann wenn je zwei T-Modelle elementar äquivalent sind.
- Zeige: Wenn T κ-kategorisch ist (für irgendein κ), dann ist T vollständig.

8B. Nochmals DLOs. Fixiere die Signatur σ der Ordnungen, d.h. $\sigma = \{<\}$ (2 stelliges Relationssymbol).

- Formuliere "das Universum ist eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte" (informell!) als first order Satz ϕ (in der Signatur σ).

Eine Ordnung $\mathcal{A} = (A, <)$ ist also genau dann DLO wenn $\mathcal{A} \models \phi$ gilt. Sei $T = \{\phi\}$.

- Zeige: T ist $\aleph_0$-kategorisch.
- Zeige: T ist nicht κ-kategorisch für $\kappa = |\mathbb{R}|$. (Hinweis: $\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ ist nicht isomorph zu $\mathbb{R}$.) (Bemerkung: Für alle überabzählbaren κ ist T nicht κ-kategorisch.)

8C. Vektorräume. Fixiere die Signatur σ der Vektorräume über $\mathbb{Q}$, d.h., zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ gibt es das einstellige Funktionssymbol $\cdot q$ und zusätzlich ein zweistelliges Funktionssymbol $+$.

- Zeige: "Das Universum ist ein Vektorraum (über $\mathbb{Q}$)" läßt sich als first order Satz formulieren. Sei T dieser Satz.
- Zwei T-modelle sind isomorph als σ-Strukturen gdw sie isomorph als Verktorräume sind.
- Zeige: T ist nicht $\aleph_0$-kategorisch.
- Zeige: T ist κ-kategorisch für überabzählbares κ.
- Zeige: T ist vollständig
- Wie sieht es mit Vektorräumen über $\mathbb{R}$ aus?

9. Modelle der Zahlentheorie. Fixiere die Signatur $\sigma = \{0, 1, +, \cdot, <\}$. Sei T die Menge aller σ-Sätze die in $\mathbb{N}$ gelten.

9A Ein nonstandard Modell.

- Zeige: Es gibt ein abzählbares T-modell dass nicht isomorph zu $\mathbb{N}$ ist.

So ein Modell nennt man auch nonstandard modell.

Hinweis: Erweiterer σ um ein neues Konstantensymbl c, und T um die Sätze $c > 1$, $c > 1 + 1, \ldots$ zu T'. Wie sieht ein Modell von T' aus? (Dann wird c einfach wieder weggelassen.)

9B Viele nonstandard Modelle.

- Zeige: Es gibt überabzählbar viele nichtisomorphe nonstandard Modelle.

Hinweis: Sei P die Menge der "standard" Primzahlen. Für jede Teilmenge A von P ist die Theorie T' erweitert um die Sätze $p|c$ (für $p \in A$) und $p \nmid c$ (für $p \notin A$); d.h. genau die (standard) Primzahlen in A teilen c. Wieso ist T' konsistent? Ein Modell von T' "realisiert" A. Wieviele A können in einem konkreten Modell maximal realisiert werden? Wieviele A gibt es insgesamt?

9C Einsetzen in die Definitionen. Sei T wie oben die Menge der Sätze die in $\mathbb{N}$ gelten.

- Zeige: T ist nicht $\aleph_0$ kategorisch.
- Zeige: T ist vollständig.

10. Einfache Beispiele zum Kompaktheitssatz und Skolem Löwenheim. Fixiere eine Signatur σ.

Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heisst "durch einen Satz definierbar", wenn es einen σ-Satz φ gibt so dass für jede σ-Struktur M gilt: $M \in \mathcal{K}$ gdw $M \models \phi$.

$\mathcal{K}$ heisst "durch eine Satzmenge definierbar", wenn es eine Menge T von σ-Sätzen gibt so dass für jede σ-Struktur M gilt: $M \in \mathcal{K}$ gdw $M \models T$.

Zeige:

- $\mathcal{K}$ ist durch einen Satz definierbar gdw $\mathcal{K}$ durch eine endliche Satzmeng definierbar ist.

Sei nun σ die Signatur der Gruppen, $\sigma = \{\cdot\}$. Welche der folgenden Klassen sind durch einen Satz, durch eine Satzmenge oder weder noch definierbar:

- Die Klasse der Gruppen.
- Die Klasse der unendlichen Gruppen.
- Die Klasse der endlichen Gruppen.
- Die Klasse der zyklischen Gruppen. (D.h., es gibt ein a so daß es für alle b ein $n \geq 0$ gibt mit $a^n = b$.)
- Die Klasse der torsionsfreien Gruppen. (D.h., für alle $a \neq e$ und $n > 0$ ist $a^n \neq e$.)
- Die Klasse der abzählbaren Gruppen.
- Die Klasse der Gruppen mit höchstens 10^{10} Elementen.