Blatt 2 (für den 19. Oktober)

Aufgabe 5. Die Signatur σ der Graphen besteht aus einem zweistelligen Relationssymbol E.

Ein (ungerichter) "allgemeiner" Graph sei eine σ-Struktur die folgende Sätze erfüllt: $(\forall x)(\forall y) xEy \to yEx$.

(Offenbar schreiben wir hier xEy für "x und y stehen in Relation E zueinander; statt formal Exy. Wir werden das für die meisten zweistelligen Relationssymbole so halten, zB $x < y$ statt $< xy$ etc.)

Ein allgemeiner Graph ist also nichts anderes als eine Struktur mit einer symmetrischen zweistelligen Relation.

Ein (ungerichter) Graph ist ein allgemeiner Graph der zusätzlich $(\forall x)\neg xEx$ erfüllt (d.h. die Relation ist irreflexiv).

5A Injektive Homomorphismen. Sei (für $l \geq 2$) G_l der Graph der einen "Kreis" mit n Knoten darstellt. D.h.: die Grundmenge ist $a_1, \dots, a_n$, und es gilt $a_i E a_{i+1}$ und $a_n E a_1$ (und damit auch $a_{i+1} E a_i$ sowie $a_1 E a_n$). (Im Fall $l = 2$ besteht G_2 einfach aus zwei verbundenen Knoten.)

Sei G ein (beliebiger) Graph, und $\phi : G_l \to G$ ein Homomorphismus.

- Sei $l = 2$. Ist dann ϕ (notwendigerweise) injektiv?
- Was gilt für l gerade, $l > 2$?
- Was gilt für l ungerade?
- Was gilt falls G nur ein allgemeiner Graph ist?

5B Kerne. Allgemein gilt: Wenn ein Homomorphismus $\phi : M \to N$ injektiv ist, dann ist ϕ ein Isomorphismus der Strukturen M und $\phi[M]$ (einer Unterstruktur von N).

Ein endlicher Graph G heißt Kern, wenn jeder Endomorphismus ϕ (d.h., $\phi : G \to G$ Homomorphismus) injektiv ist. (Und damit automatisch ein Automorphismus von G. Warum?)

Ein endlicher Graph H heißt Kern des Graphen G, wenn es einen Homomorphismus $\phi : H \to G$ gibt und einen Homomorphismus $\phi' : G \to H$ und H unter allen Graphen mit dieser Eigenschaft die wenigsten Punkte hat.

- Welche der Graphen G_l sind Kerne?
- Welche Graphen mit genau zwei Knoten gibt es? Welche davon sind Kerne?
- Zeige: Wenn H Kern von G ist, dann ist H ein Kern.
- Zeige: Jeder endliche Graph G hat einen Kern. (Ohne Eindeutigkeit, das ist die nächste Aufgabe).

5C Eindeutigkeit des Kerns. Wir wissen schon: Jeder Graph G hat einen Kern.

- Zeige: Dieser Kern ist bis auf Isomorphie eindeutig, und ein Teilgraph von G.

6. ZFC Axiome. Sie σ wieder die Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol E.

Ein gerichteter Graph ohne Schleifen ist eine σ-Struktur M die $(\forall x)\neg xEx$ erfüllt.

Das Extensionalitätsaxiom lautet:

$$[(\forall t) tEx \leftrightarrow tEy] \to x = y$$

Das Paarmengenaxiom:

$$(\forall x, y)(\exists z)[(\forall t) tEz \leftrightarrow (t = x \lor t = y)]$$

Das Fundierungsaxiom:

$$(\forall x)\Big((\exists y) yEx \to (\exists y)\big[yEx \land \neg(\exists z)(zEx \land zEy)\big]\Big)$$

6A Beispiele. Welche der folgenden σ-Strukturen sind (gerichtete) Graphen? Welche erfüllen Extensionalität? Fundierung? Paarmengenaxiom?

- $(\mathbb{N}, \leq)$,
- $(\mathbb{N}, <)$,
- $(\mathbb{N}_{\geq 2}, E)$ mit xEy gdw x und y sind teilerfremd.
- $(\mathbb{Z}, <)$,

6B Einfache Implikationen.

- Zeige: Eine σ-Struktur die Fundierung und Paarmengenaxiom erfüllt, ist ein (gerichteter) Graph. (Hinweis: Wäre x ein Gegenbeispiel, dann widerspricht die "Paarmenge" $\{x, x\}$ (die natürlich nur das Singleton $\{x\}$ ist) der Fundierung.)
- Zeige: Eine σ-Struktur die Fundierung und Paarmengenaxiom erfüllt, erfüllt auch: $\neg(\exists x, y)[xEy \land yEx]$. (Hinweis: genauso.)

6C Alltagsmathematik. In der naiven Mengenlehre der "Alltags-Mathematik" verwendet man eine Element-Beziehung E (üblichwerweise als $\in$ geschrieben) und verwendet als "Grundmenge" (über die quantifiziert wird) "alle mathematischen Objekte".

- Ist das Paarmengenaxiom "wahtr", d.h. in der "Alltags-Mathematik" erfüllt? D.h.: Gibt es zu zwei beliebigen mathematischen Objekten x, y immer die Paarmenge $\{x, y\}$?
- Ist das Extensionalitätsaxiom in der "Alltags-Mathematik" erfüllt? (Welche "Elemente" hat zB die natürliche Zahl 17?)
- Ist das Fundierungsaxiom in der "Alltags-Mathematik" erfüllt?