

Blatt 1 (für den 12. Oktober)

Aufgabe 1. Richards Paradoxon. Sei n die kleinste natürliche Zahl die nicht mit einem deutschen Satz mit weniger als tausend Buchstaben definiert werden kann.

- Frage: Was ist n ?

Aufgabe 2. Hüllenoperatoren. Die folgende Situation ist in der Mathematik allgegenwärtig:

2A. Sei A eine Menge, und f_i eine Funktion von A^{m_i} nach A (für $i = 1, \dots, n$, wobei m_i jeweils eine natürliche Zahl ist).

Eine Teilmenge C von A heißt abgeschlossen unter den f_i , wenn $f_i(c_1, \dots, c_{m_i}) \in C$ für alle $c_1, \dots, c_{m_i} \in C$.

- Zeige: Für jede Teilmenge X von A gibt es eine kleinste Obermenge C von X die unter allen f_i abgeschlossen ist. (Diese Menge heißt üblicherweise Abschluss von X .)
- Zeige weiters: Die Kardinalität (=Größe) von C ist gleich dem Maximum von \aleph_0 (d.h., der Kardinalität von \mathbb{N}) und der Kardinalität von X .
- Zeige weiters: Wenn jedes $a \in X$ eine Eigenschaft P hat, und P unter allen f_i erhalten bleibt (d.h.: a_i, \dots, a_{m_i} hat Eigenschaft P impliziert $f_i(a_i, \dots, a_{m_i})$ hat Eigenschaft P), dann hat jedes $a \in C$ Eigenschaft P .
- Wie kann man die Menge der Terme (Grundbegriffe Skript 2.5) als Abschluss (von welcher Ausgangsmenge, unter welchen Funktionen?) im Raum der Zeichenketten auffassen?

2B. Ein Hüllenoperator H auf A ist eine Abbildung $H : P(A) \rightarrow P(A)$ (wobei $P(A)$ die Potenzmenge von A ist) die folgendes erfüllt: $H(X) \supseteq X$, $H(H(X)) = H(X)$, und $X \subseteq Y \rightarrow H(X) \subseteq H(Y)$.

Ein Hüllenoperator erhält unendliche Kardinalitäten, wenn $|H(X)| = \max(\aleph_0, |X|)$ für alle Teilmengen X von A .

- Auf welche Weise definiert die obige "Abschluss unter Funktionen" einen Hüllenoperator? (Definiere und beweise dass der so definierte Operator ein Hüllenoperator ist.)
- Erhält der so definierte Hüllenoperator unendliche Kardinalitäten?
- Bringe zwei Beispiele aus dem mathematischen Alltag von Hüllenoperatoren die unendliche Kardinalitäten erhalten, und zwei die sie nicht erhalten.

Aufgabe 3. Satz von Birkhoff (Universelle Algebra). Fixiere eine (funktionale) Signatur σ (wie in Def 2.2 des Grundbegriffe Skriptums). Homomorphismus und Substruktur sind in 2.3 und 2.4 definiert). Wir definieren das (direkte) Produkt von σ -Strukturen $(M_i)_{i \in I}$ (I ist eine beliebige nichtleere Indexmenge, endlich oder unendlich): Es ist die σ -Struktur mit Grundmenge $\prod_{i \in I} M_i$ und den Funktionen $f(\langle a_i \rangle_{i \in I}) = \langle f_i(a_i) \rangle_{i \in I}$. (Mit anderen Worten: Funktionen werden punktweise definiert.)

Fixiere eine Menge Σ von Gleichungen, d.h. jedes Element von Σ ist ein String der Form $t_1 = t_2$, mit t_i ein σ -Term (definiert in 2.5.) Die durch Σ definierte Varietät ist die Klasse aller σ -Strukturen M die alle Gleichungen in Σ erfüllt, d.h. (in der Terminologie von 2.8): für alle Belegungen β gilt $\beta(t_1) = \beta(t_2)$.

Eine Klasse \mathcal{K} von Strukturen heißt Varietät, wenn es eine Gleichungsmenge Σ gibt, die auf diese Weise \mathcal{K} definiert.

3A.

- Ist die Klasse aller Gruppen eine Varietät?
- Die Klasse aller Körper?
- Finde je ein (anderes) Beispiel von Klassen von (funktionalen) Strukturen die eine Varietät bzw keine Varietät sind.

3B.

- Zeige: Eine Varietät \mathcal{K} ist abgeschlossen unter Homomorphismus, Substruktur und Produkt. (D.h., wenn $M \in \mathcal{K}$ und N homomorph zu \mathcal{K} , dann ist auch $N \in \mathcal{K}$, etc.)

3C (schwieriger, suchen Sie sich allenfalls Hinweise im Internet).

- Zeige die Umkehrung: Die Klasse \mathcal{K} von σ -Strukturen sei abgeschlossen unter Homomorphismus, Substruktur und Produkt. Dann gibt es eine Menge Σ von Gleichungen die \mathcal{K} (als Varietät) definiert.

Aufgabe 4. Konservative Erweiterungen. Für diese Aufgabe benötigen wir die Begriffe von Termen und Formeln in Prädikatenlogik (siehe entweder Skripten von Hans Adler oder von Ziegler).

Fixiere ein (prädikatenlogische) Struktur σ .

Sei ψ_1 der σ -Satz

$$(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y)$$

($\varphi(x, y)$ ist eine σ -Formel mit nur den freien Variablen x und y .) Sei ψ_2 der σ -Satz

$$(\forall x)(\exists! y)\varphi(x, y)$$

Dabei steht $\exists! y$ für “es gibt genau ein y ”.

- Wie kann $\exists! y$ formal ausgedrückt werden?

Sei τ die Struktur die sich ergibt wenn man σ um genau ein einstelliges (neues) Funktionssymbol f erweitert.

4A. Angenommen die σ -Struktur M erfüllt ψ_2 .

- Zeige: Es gibt genau eine τ -struktur N mit folgender Eigenschaft: Das Universum (=Grundmenge) von ist dasselbe wie von M , für alle σ -Formeln $\phi(x_1, \dots, x_n)$ und a_1, \dots, a_n in (der Grundmenge von) M gilt: $M \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ gdw $N \models \phi(a_1, \dots, a_n)$, und $N \models (\forall x)\varphi(x, f(x))$.
- Was ändert sich, wenn M nicht ψ_2 erfüllt, sondern ψ_1 ?

4B.

- Formuliere/beweise entsprechende Aussagen für Funktionen in mehreren Variablen, für Konstanten und für Relationen.

4C. Sei T eine σ -Theorie (d.h., eine Menge von σ -Sätzen) und T' eine τ -Theorie. Wir nennen T' eine konservative Erweiterung von T , wenn für jeden σ -Satz ζ gilt: $T' \vdash \zeta$ gdw $T \vdash \zeta$.

- Sei $\psi_2 \in T$ und sei T' die τ -Theorie $T \cup \{(\forall x)\varphi(x, f(x))\}$.

Zeige: T' ist eine konservative Erweiterung von T , d.h.: Für einen σ -Satz ζ gilt $T' \vdash \zeta$ gdw $T \vdash \zeta$.

Wieviele verschiedene konservative Erweiterungen von T gibt es, die $(\forall x)\varphi(x, f(x))$ enthalten?

- Was ändert sich, wenn wir nicht $\psi_2 \in T$ voraussetzen sondern nur $\psi_1 \in T'$?

Hinweis: Verwende 4A und den Vollständigkeitssatz.