Blatt 9 (für den 25., 28. und 29.Jänner)

Fixiere die first order Sprache $L = (0, 1, +, \cdot, <)$.

Eine Menge/Eigenschaft $P \subseteq \mathbb{N}^n$ ist arithmetisch, wenn es eine L-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ gibt mit (nur) $x_1, \dots, x_n$ als freie Variablen so daß $P(m_1, \dots, m_n)$ genau dann wenn $\mathbb{N} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$.

(51). $P(n, m)$ heiße: n ist in L mit weniger als m Zeichen definierbar. Genauer: $P(n, m)$ genau dann wenn es eine L-Formel $\varphi(x)$ gibt die aus weniger als m Symbolen besteht und so daß $\mathbb{N} \models \varphi(k)$ genau dann wenn $k = n$.

Zeige: $P(n, m)$ ist nicht arithmetisch.

(Hinweis: ansonsten wäre die kleinste Zahl, die nicht mit weniger als ... Zeichen definierbar ist, definierbar.)

(52). Zeige: Die Wahrheit in $\mathbb{N}$ ist nicht arithmetisch, d.h. es gibt keine L-Formel $W(x)$ so daß $\mathbb{N} \models \varphi$ genau dann wenn $\mathbb{N} \models W(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Hinweis: das folgt aus (51), ist aber auch eine trivial Konsequenz des Unvollständikeitssatzes wie er im Ziegler steht.

(53). Eine Σ^0-Formel ist eine L-Formel, die nur beschränkte Quantoren enthält, d.h. nur Quantoren der Form $\forall x_1 < x_2$ und $\exists x_1 < x_2$. (Formale Definition mit Induktion: Wenn ψ eine Σ^0-Formel ist, dann auch $\forall x_1 \, (x_1 < x_2 \to \psi)$ etc.)

Eine Σ^1-Formel hat die Form $\exists x \psi$, wobei ψ eine Σ^0-Formel ist.

Eine Menge/Eigenschaft $P \subseteq \mathbb{N}^n$ ist Σ^0, wenn es eine Σ^0-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ gibt mit (nur) $x_1, \dots, x_n$ als freie Variablen so daß $P(m_1, \dots, m_n)$ genau dann wenn $\mathbb{N} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$; analog für Σ^1.

Zeige: Jede Σ^0 Eigenschaft ist rekursiv; jede Σ^1 Eigenschaft ist rekursiv aufzählbar (r.e.).

(54). Jede rekursiv aufzählbare (r.e.) Relation ist bekanntlich arithmetisch. Zeige: ein r.e. Funktion ist sogar durch eine Σ^1-Formel definierbar. (Mit (53) ergibt sich also: r.e. ist dasselbe wie Σ^1.)

(55). Die Busy Beaver Funktion $BB(n)$ ist der maximale output, der mit einer Registermaschine mit n Programmzeilen auf Input 0 erreicht werden kann.

Zeige: BB ist nicht rekursiv, und für jede (totale) rekursive Funktion f gibt es ein n so dass $f(m) < BB(m)$ für alle $m > n$.

Hinweis: Wir können annehmen dass f monoton ist. Sei f durch das Programm m berechnet. Zeige: es gibt ein $d \in \mathbb{N}$ und für jedes $x \in \mathbb{N}$ ein Programm m^x mit $x + d$ Programmzeilen so daß $m^x(0) > f(2x)$.

(56). Zeige: Für jede konsistente arithmetische L-Satzmenge T gibt es eine arithmetische Vervollständigung von T.

Bem1: diese Vervollständigung ist nicht "korrekt", $\{phi : (N) \models \phi\}$ ist ja bekanntlich nicht arithmetisch.

Bem2: eine rekursive konsistente Satzmenge T (die elemenntare Arithmetik wie zB Q enthält) hat aber niemals eine r.e. Vervollständigung.