Blatt 8 (für den 18.01.)

Das Kleene Praedikat $T_n(m, x_1, \dots, x_n, g)$ sagt aus dass die Maschine m auf Input $x_1, \dots, x_n$ nach $(g)_1$ Schritten mit Output $(g)_2$ und Endkonfiguraion $(g)_3$ hält. Es ist rekursiv. (Sogar primitiv rekursiv.)

Rekursiv aufzaehlbar

$A \subseteq \mathbb{N}^n$ ist rekursiv aufzählbar (oder: r.e.), wenn es eine rekursive Relation $B \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ gibt so dass $A = \{(x_1, \dots, x_n) : (\exists y)\,(x_1, \dots, x_n, y) \in B\}$. (D.h. A ist die Projektion von B.)

Intuitiv gesprochen: B ist rekursiv, wenn es ein Computerprogramm gibt das entscheidet ob $\bar{x} \in B$; A ist r.e. wenn es ein Computerprogramm gibt das für einen Input $\bar{x} \in A$ bestätigt (nachprüft/nachrechnet) dass dieser Input in A ist, d.h. zB "ist in A" ausgibt (aber auf Input $\bar{x} \notin A$ entweder "ist nicht in A" ausgibt oder aber auch gar nicht hält).

Bem: A ist r.e. gdw $A = \emptyset$ oder $A = f''\mathbb{N}$ für eine rekursiv Funktion f (Ziegler Lem 13.2)

(47) Beweise: A ist r.e. genau dann wenn es eine Maschine m gibt so dass m auf Input x hält genau dann wenn $x \in A$.

(48) Die Haltemenge $H \subset \mathbb{N}$ ist definiert durch: $m \in H$ gdw die Maschine m auf (eindimensionalen) Input m hält. Zeige: H ist r.e., aber nicht rekursiv. (Benutze (47) und Ziegler 13.5)

(49) Sei $A, B \subseteq \mathbb{N}$ beide r.e. Ist dann $B \setminus A$ notwendigerweise r.e.?

(50) Sei $A := \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{10}]$, die Menge der ganzzahligen Polynome mit 10 Variablen. A ist "natürlich" isomorph zu $\mathbb{N}$. (Wie könnte so eine Isomorphie aussehen?) Sei $B \subseteq A$ definiert durch: $f(X_1, \dots, X_{10}) \in B$ gdw es $z_1, \dots, z_{10}$ in $\mathbb{Z}$ gibt so dass $f(z_1, \dots, z_{10}) = 0$, d.h., wenn das Polynom eine ganzzahlige Nullstelle hat. Argumentiere: B ist r.e.

Bem: Satz von Matjasevitch: B ist nicht rekursiv.

Sie A' und B' analog definiert, aber für nur eine Variable statt für 10. Zeige dass B' rekursiv ist.