Blatt 7 (für den 14.12.)

primitiv rekursive Funktionen, Ackermann Funktion

Primitiv rekursive Funktionen sind Funktionen die aus den Grundfunktionen (R0) unter (wiederholter) Anwedung von Einsetzung (R1) und primitiver Rekursion (R2) gebildet werden können. (Siehe Ziegler Skriptum Seiten 60 und 61.)

Die Ackermann Funktion $A(n, m)$ ist definiert durch

- $A(0, y) = y + 1$
- $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$
- $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$

(41) Zeige (oder argumentiere): $A(n, m)$ ist rekursiv (oder: berechenbar).

(42) Zeige: $A(3, y) = 2^{y+3} - 3$

(43) Zeige: Zu jeder primitiv rekursiven Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ so dass für alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt: $f(x_1, \ldots, x_n) < A(a, x_1 + \cdots + x_n)$.

(44) Folge aus (43) dass A nicht primitiv rekursiv ist.

Berechenbare Funktionen

(45) Zeige (oder argumentiere): $n|m$ (n teilt m) ist berechenbar (d.h. die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f(n, m) = 1$ wenn $n|m$ und 0 sonst).

(46) Argumentiere, dass $n|m$ sogar primitiv rekursiv ist.