Blatt 6 (für den 30.11.)

Wir besprechen eventuell noch kurz einige "übrig gebliebenen" Aufgaben: von Blatt 1 Bsp 1-3, und Blatt 5b Bsp 36.

Prädikatenlogik

Im folgenden seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Strukuren zur selben prädikatenlogischen Sprache mit Universen M bzw N. (Analog haben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ jeweils die Universen A, B, C.)

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ heißt dass $\mathcal{M}$ eine Teilstruktur von $\mathcal{N}$ ist: $M \subseteq N$, und für alle m in M und f Funktionssymbol gilt: $f^{\mathcal{M}}(m) = f^{\mathcal{N}}(m)$, für R Relationssymbol gilt: $R^{\mathcal{M}}(m)$ genau dann wenn $R^{\mathcal{N}}(m)$ (analog für Funktionssymbole und Relationssymbole höherer Stelligkeiten), und für c Konstante gilt $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$ (d.h., insbesondere ist $c^{\mathcal{N}}$ in M).
- $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ heisst dass M elementare Unterstruktur von N ist, d.h. dass $M \subseteq N$ und für alle $\phi(x_1, \dots, x_n)$ und $m_1, \dots, m_n \in M$: $\mathcal{M} \models \phi(m_1, \dots, m_n)$ gdw $\mathcal{N} \models \phi(m_1, \dots, m_n)$.
- $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ heisst dass M und N elementar äquivalent sind, d.h. dass für alle ϕ ohne freie Variable gilt: $\mathcal{M} \models \phi$ gdw $\mathcal{N} \models \phi$.

(37) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Zeige:

- Wenn ϕ quantorenfrei ist, dann gilt für a_i in M: $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ gdw $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$.
- Wenn ϕ von der Form $\exists y \psi(y, \bar{x})$ ist, mit ψ quantorenfrei, dann gilt immerhin noch dir Implikation von links nach rechts.

(38) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Angenommen $\mathcal{N} \models \exists y \psi(y, \bar{a})$ für $\bar{a}$ in M. Offenbar gibt es also ein b in N (aber i.A. nicht in M) mit $\mathcal{N} \models \psi(b, \bar{a})$. Zeige:

- $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ impliziert dass es auch so ein b in M gibt.
- (Tarski Vaught) Angenommen, für alle ϕ der Form $\exists y \psi(y, \bar{a})$ und $\bar{a} \in M$ gilt, dass es ein b in M gibt mit $\mathcal{N} \models \psi(b, \bar{a})$. Dann ist $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$.

(39) $A \subseteq B$, $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$ und $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ impliziert dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. (Das wurde in der Vorlesung beim Beweis von Löwenheim-Skolem aufwärts aus dem Kompaktheitssatz und L-S abwärts gebraucht.)

(40) $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ impliziert $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ und $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Falls es für jedes Element m von M eine Konstante c gibt so dass $c^{\mathcal{M}} = m$, dann gilt auch die Umkehrung.